2024北京一六一中初三（下）开学考

数　学

考生须知:

1．本试卷共4页，满分100分，考试时间120分钟.

2．试卷答案一律填涂在答题卡或书写在答题纸上，在试卷上作答无效.

3．在答题卡上，用2B铅笔作答，在答题纸上，用黑色字迹签字笔作答.

4．考试结束后，将答题卡、答题纸一并交回.

一、选择题（本题共16分，每小题2分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求．把正确答案涂写在答题纸上相应的位置.）

1. 1.2023年5月30日神舟十六号载人飞船发射取得圆满成功，此次任务是我国载人航天工程进入空间站应用与发展阶段的首次载人飞行任务．下列有关航天的4个图标图案中是中心对称图形的是（　）

A. 　B. 　C. 　D. 

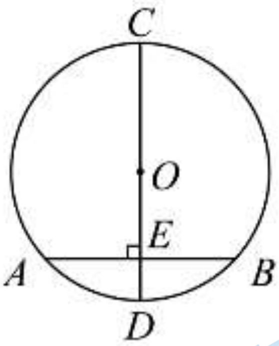
2. 抛物线 $y=x^2-4x+5$ 的顶点坐标是（　）

A.（−2, 1）　B.（2, 1）　C.（−2, −1）　D.（2, −1）

3. 将一元二次方程 $x^2-8x+10=0$ 通过配方转化为 $(x+a)^2=b$ 的形式，下列结果中正确的是（　）

A. $(x-4)^2=6$　B. $(x-8)^2=6$　C. $(x-4)^2=-6$　D. $(x-8)^2=54$

4. 如图，AB 是⊙O 的一条弦，直径是 CD，若 $CD\perp AB$，垂足为 E，$OE=3$，$DE=2$，则 AB 的长度为（　）



A. 5　B. 6　C. 8　D. 10

5. 实数 a、b、c 在数轴上对应点的位置如图所示．如果 $a+b=0$，那么下列结论正确的是（　）

A. $|a|>|c|$　B. $a+c<0$　C. $abc<0$　D. $\frac{a}{b}=1$

6. 不透明的袋子中装有两个小球，上面分别写着“1”，“2”，除数字外两个小球无其他差别．从中随机摸出一个小球，记录其数字，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，记录其数字，那么两次记录的数字之和为 3 的概率是（　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

7. 根据下列表格中二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的自变量 x 与函数值 y 的对应值，判断方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$，a，b，c 为常数）的一个解 x 的范围是（　）

x	6.17	6.18	6.19	6.20
$y=ax^2+bx+c$	-0.03	-0.01	0.02	0.04

A. $6<x<6.17$　　B. $6.17<x<6.18$

C. $6.18<x<6.19$　　D. $6.19<x<6.20$

8. 目标完成率，一般是指个体的实际完成量与目标完成量的比值，树立明确具体的目标，能够促使人们更好地完成任务．某读书会有 10 位成员（编号分别为 $A-J$），如图是根据他们年初制定的目标阅读量和年末实际完成情况绘制的统计图，下列结论正确的有（　　）

①目标完成率为 100%的是 A,G；

②目标阅读量与实际阅读量相差最多的是 J；

③目标完成率最高的是 D，最低的是 C；

④目标完成率超过 75%且实际阅读量不少于 5 本的有三人．

A. ①②　　B. ①②③　　C. ①③④　　D. ①②③④

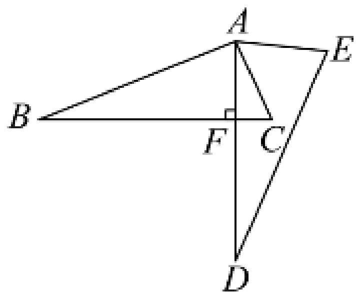
二、填空题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

9. 因式分解：$4m^2n+4mn+n=$____________.

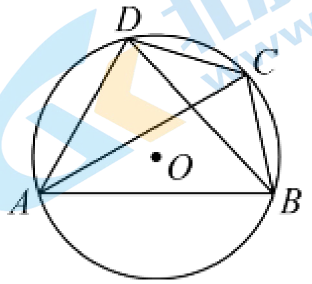
10. 二次函数 $y=3x^2-4x+5$ 的图像与 y 轴的交点坐标为____________.

11. 若点 $A(-1, y_1)$，$B\left(\frac{1}{2}, y_2\right)$，$C(2, y_3)$ 在抛物线 $y=(x-2)^2+k$ 上，则 y_1，y_2，y_3 的大小关系为__________（用“>”连接）

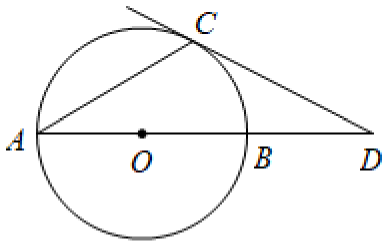
12. 如图，将 ΔABC 绕点 A 逆时针旋转一定角度得到 ΔADE，若 $\angle CAE=65^\circ$，$\angle E=70^\circ$，且 $AD\perp BC$，则 $\angle BAC=$______.



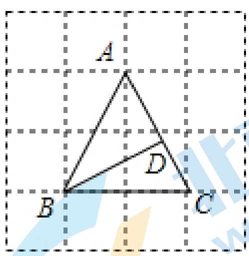
13. 如图，点 A、B、C、D 在 $\odot O$ 上，$CB=CD$，$\angle CAD=30^\circ$，$\angle ACD=50^\circ$，则 $\angle ADB=$__________.



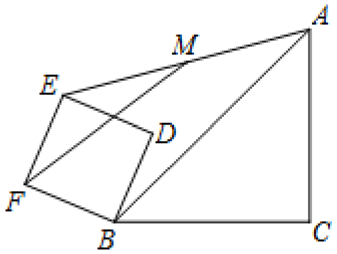
14. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 D 在 AB 的延长线上，DC 切 $\odot O$ 于点 C，如果 $\angle D=30^\circ$，$AB=4$，那么线段 CD 的长是__________.



15. 如图所示，△ABC 的顶点 A，B，C 在边长为 1 的正方形网格的格点上，$BD\perp AC$ 于点 D，则 BD 的长为___.



16. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=BC=4$，$\angle ACB=90^\circ$，正方形 $BDEF$ 的边长为 2，将正方形 $BDEF$ 绕点 B 旋转一周，连接 AE，点 M 为 AE 的中点，连接 FM，则线段 FM 的最大值是___.



三、解答题（本题共 68 分，第 17—18 题，每小题 5 分，第 19 题 4 分，第 20—21 题，每小题 5 分，第 22—26 题，每小题 6 分，第 27，28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-(\pi-2)^0+\left|\sqrt{3}-2\right|+\sqrt{3}$.

18. 解不等式组 $\begin{cases}x-3(x-1)\geq 1\\ \dfrac{1+3x}{2}>x-1\end{cases}$，并写出它的所有非负整数解.

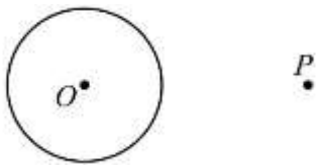
19. 阅读下面材料：

在学习《圆》这一章时，老师给同学们布置了一道尺规作图题：

尺规作留：过圆外一点作圆的切线.

已知：P 为$\odot O$ 外一点.

求作：经过点 P 的$\odot O$ 的切线.



小敏的作法如下：

如图，

①连接 OP，作线段 OP 的垂直平分线 MN 交 OP 于点 C.

②以点 C 为圆心，CO 的长为半径作圆，交$\odot O$ 于 A，B 两点.

③作直线 PA，PB.

（1）请补充完整小敏的作图.

（2）连接 OA，OB 可证 $\angle OAP=\angle OBP=90°$，其依据是______________________________

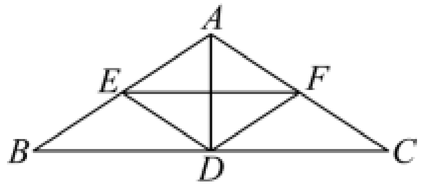
由此可证明直线 PA，PB 都是$\odot O$ 的切线，其依据是______________________________

20. 已知，关于 x 的一元二次方程 $x^2+(a-1)x-a=0$.

(1)求证：方程总有两个实数根；

(2)若该方程有一个根是负数，求 a 的取值范围.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，点 D，E，F 分别为 BC，AB，AC 的中点.



（1）求证：四边形 $AEDF$ 是菱形；

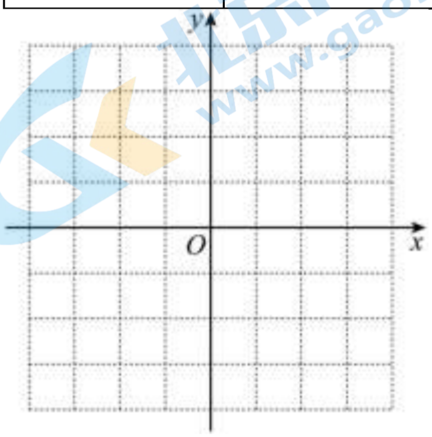
（2）若 $AB=6$，$BC=10$，求四边形 $AEDF$ 的面积．

22. 对于抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$．

（1）它与 x 轴交点的坐标为_______，与 y 轴交点的坐标为________，顶点坐标为_______；

（2）在坐标系中利用描点法画出此抛物线；

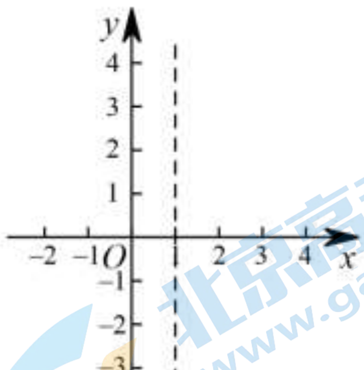
x	…					…
y	…					…



（3）当 $0<x<4$ 时，结合函数图象，直接写出 y 的取值范围________；

（4）若点 $(-1,y_1)$，(t,y_2) 在抛物线上，且 $y_2>y_1$，直接写出 t 的取值范围________.

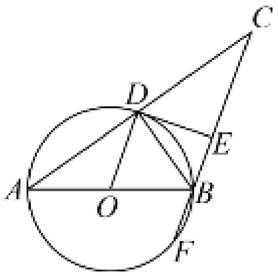
23. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $x=1$ 与 x 轴交于点 A，直线 l_1：$y=kx-2$ 经过点 A，且与 y 轴交于点 B．



（1）求点 A 和点 B 的坐标及直线 l_1 的解析式；

（2）直线 l_2 与直线 l_1 关于直线 $x=1$ 对称，若直线 $y=m$ 与直线 l_1, l_2 围成的区域 W 内（不包含边界）恰有 1 个整点，直接写出 m 的取值范围.（注：横、纵坐标都是整数的点叫做整点.）

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，AB 为 $\odot O$ 的直径，AC 与 $\odot O$ 相交于点 D，过点 D 做 $DE \perp BC$ 于点 E，CB 延长线交 $\odot O$ 于点 F.



（1）求证：DE 为 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $BE=1$，$BF=2$，求 AD 的长.

25. 通常把脏衣服用洗衣液清洗后会进行拧干，但由于不可能拧净衣服上的全部污水，所以还需要用清水进行多次漂洗，不断降低衣服中污水的含量．某小组研究了如何用清水漂洗衣服效果更好，部分内容如下，请补充完整：实验研究：先准备几件相同的洗过一次并拧干（存留一些污水）的衣服，把每件衣服分别用一定量的清水浸泡，经过充分搓洗，使清水与衣服上存留的污水混合均匀，然后拧干，视为一次漂洗，称重、记录每次漂洗后衣服上存留的污水重量和比例，如：把一件存留 1 斤污水的衣服用 10 斤清水漂洗后，拧干到仍然存留 1 斤污水，则漂洗后衣服中存有的污物是原来的 $\frac{1}{11}$，在多次实验后，通过对收集的数据进行分析，该小组决定使用 20 斤清水，采用三种不同的方案，对每件衣服分别进行漂洗，并假设每次拧干后的衣服上都存留约 1 斤的污水.

数据计算：对三种漂洗方案进行计算、比较.

方案一：采用一次漂洗的方式．将 20 斤清水一次用掉，漂洗后衣服中存有的污物是原来的________；

方案二：采用两次漂洗的方式，且两次用水量不同．如第一次用 12 斤清水，第二次用 8 斤清水，漂洗后衣服中存有的污物是原来的________；

方案三：采用两次漂洗的方式，且两次用水量相同，每次用 10 斤清水，漂洗后衣服中存有的污物是原来的________.

实验结论：对比可知，在这三种方案中，方案________的漂洗效果最好（填“一”“二”或“三”）.

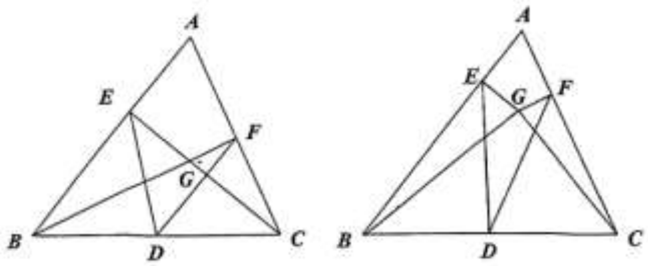
推广证明：将脏衣服用洗衣液清洗后，再用清水进行漂洗，假设每次拧干后还存留 a（$a>0$）斤污水，现用 m（$m>0$）斤清水漂洗（方案二中第一次用水量为 x 斤），请比较并证明方案二与方案三的漂洗效果.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(1,m)$，$(3,n)$，在抛物线 $y=ax^2+bx+4(a>0)$ 上，设抛物线的对称轴为 $x=t$.

（1）当 $m=n$ 时，求抛物线与 y 轴交点的坐标及 t 的值；

（2）点 $(x_0,n)(x_0 \neq 3)$，在抛物线上，若 $m<n<4$，求 t 的取值范围及 x_0 的取值范围.

27. 已知 $\triangle ABC$，点 D 为 BC 中点，F，E 为边 AC，AB 上的动点，且满足 $DE=DF$，G 为平面内一点，$GE\perp AB$，$GF\perp AC$，连接 BG，CG．



（1）若点 G 为 $\triangle ABC$ 边 AB 和边 AC 上的高的交点，求证：$\angle ABG=\angle ACG$；

（2）若点 G 不与三角形高的交点重合，$\angle ABG$ 与 $\angle ACG$ 是否还有上述关系？请说明理由．

28. 对于点 P 和图形 G，若在图形 G 上存在不重合的点 M 和点 N，使得点 P 关于线段 MN 中点的对称点在图形 G 上，则称点 P 是图形的 G 的“中称点”．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A 1,0 ，$B(1,1)$，$C(0,1)$．

（1）在点 $P_1\left(\frac{1}{2},0\right)$，$P_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$P_3(1,-2)$，$P_4(-1,2)$ 中，_____是正方形 $OABC$ 的“中称点”；

（2）$\odot T$ 的圆心在 x 轴上，半径为 1．

①当圆心 T 与原点 O 重合时，若直线 $y=x+m$ 上存在 $\odot T$ 的“中称点”，求 m 的取值范围；

②若正方形 $OABC$ 的“中称点”都是 $\odot T$ 的“中称点”，直接写出圆心 T 的横坐标 t 的取值范围．

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求．把正确答案涂写在答题纸上相应的位置．）

1. 【答案】C

【分析】本题考查的是中心对称图形，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与自身重合．根据中心对称图形的概念判断．把一个图形绕某一点旋转 180 度，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形．

【详解】解：选项 A、B、D 不都能找到一个点，使图形绕某一点旋转 180 度后与原来的图形重合，所以不是中心对称图形．

选项 C 能找到一个点，使图形绕某一点旋转 180 度后与原来的图形重合，所以是中心对称图形．

故选：C．

2. 【答案】B

【分析】利用配方法化成顶点式求解即可．

【详解】$\because y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$，

$\therefore$ 顶点坐标为$(2,1)$，

故选：B．

【点睛】本题考查了二次函数的性质，化成顶点解析式是求抛物线的顶点坐标的一种方法，也可以直接代入顶点坐标公式．

3. 【答案】A

【分析】将常数项移到方程的右边，两边都加上一次项系数一半的平方配成完全平方式后即可．

【详解】解：$\because x^2-8x+10=0$，

$\therefore x^2-8x=-10$，

$\therefore x^2-8x+16=-10+16$，即 $(x-4)^2=6$，

故选 A．

【点睛】本题考查了解一元二次方程的能力，熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法：直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法，结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键．

4. 【答案】C

【分析】如图所示，连接 OA，先由垂径定理得到 $AB=2AE$，再求出 $OA=5$，进而利用勾股定理求出 AE 的长即可得到答案．

【详解】解：如图所示，连接 OA，

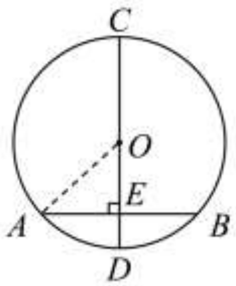
$\because CD$ 是直径，$CD\perp AB$，

$\therefore AB=2AE$，$OA=OD=OE+DE=5$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOE$ 中，由勾股定理得 $AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=4$，

$\therefore AB = 2AE = 8$，

故选 C.



【点睛】本题主要考查了垂径定理，勾股定理，正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键．

5. 【答案】C

【分析】根据 $a+b=0$，确定原点的位置，根据实数与数轴即可解答．

【详解】解：$\because a+b=0$，

$\therefore$原点在 a，b 的中间，

如图，

由图可得：$|a|<|c|$，$a+c>0$，$abc<0$，$\dfrac{a}{b}=-1$，

故选：C．

【点睛】本题考查了实数与数轴，解决本题的关键是确定原点的位置．

6. 【答案】C

【分析】先根据题意画出树状图，再利用概率公式计算即可．

【详解】解：画树状图如下：

所以共 4 种情况：其中满足题意的有两种，

所以两次记录的数字之和为 3 的概率是 $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

故选 C.

【点睛】本题考查的是画树状图求解概率，掌握画树状图求概率是解题的关键．

7. 【答案】C

【分析】$ax^2+bx+c=0$应该在$ax^2+bx+c<0$与$ax^2+bx+c>0$之间，从表格中选择对应的数据即可．

【详解】解：由表格得：

$x=6.18$时，$ax^2+bx+c=-0.01<0$，

$x=6.19$时，$ax^2+bx+c=0.02>0$，

$\therefore ax^2+bx+c=0$ 的一个解 x 的范围为：$6.18<x<6.19$．

故选：C．

【点睛】本题考查了一元二次方程解的范围，理解方程解得含义是解题关键．

8.【答案】B

【分析】根据统计图中的数据分析即可得到结论．

【详解】解：∵A、G 的实际完成量与目标完成量都相同，

∴A、G 的目标完成率为 100%，故①正确；

∵A、G 相差为 0，B 相差 2，C 相差 4，D 相差 3，E 相差 3，F 相差 3，H 相差 1，I 相差 2，J 相差 5，

∴目标阅读量与实际阅读量相差最多的是 J，故②正确；

从 A 到 J 的完成度分别为 $100\%,\frac{2}{3},\frac{3}{7},\frac{5}{2},\frac{7}{10},\frac{3}{2},100\%,\frac{6}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{9}$，

∴完成度最高的时 D，最低的是 C，故③正确；

目标完成率超过 75%且实际阅读量不少于 5 本的有 D，H，F，G 共 4 人，故④错误；

故选 B．

【点睛】本题考查统计图的实际应用．由统计图得出必要的信息和数据是解答本题的关键．

二、填空题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

9.【答案】$n(2m+1)^2$

【分析】原式提取 n，再利用完全平方公式分解即可．

【详解】解：$4m^2n+4mn+n=n\left(4m^2+4m+1\right)=n(2m+1)^2$，

故答案为：$n(2m+1)^2$

【点睛】此题考查了提公因式法与公式法的综合运用，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键．

10.【答案】$(0,5)$

【分析】求函数图像与 y 轴的交点坐标，令 $x=0$ 即可求得．

【详解】解：将 $x=0$ 代入 $y=3x^2-4x+5$ 中，

得：$y=5$

故答案为 $(0,5)$

【点睛】本题考查了二次函数与坐标轴交点坐标的求法，理解与坐标轴交点坐标的特点是解题关键．

11.【答案】$y_1>y_2>y_3$

【分析】先求出抛物线的对称轴和开口方向，再根据开口向上离对称轴越远函数值越大进行求解即可．

【详解】解：∵抛物线解析式为 $y=(x-2)^2+k$，

∴抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=2$，

∴离对称轴越远函数值越大，

∵点 $A(-1, y_1)$，$B\left(\frac{1}{2}, y_2\right)$，$C(2, y_3)$ 在抛物线 $y=(x-2)^2+k$ 上，$2-(-1)>2-\frac{1}{2}>2-2$，

∴ $y_1>y_2>y_3$，

故答案为：$y_1>y_2>y_3$．

【点睛】本题主要考查了比较二次函数函数值的大小，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键．

12. 【答案】85°

【分析】由旋转的性质可知，∠C=∠E，∠BAC=∠DAE，又因为∠E＝70°，BC 垂直于 AD，可得∠DAC=20°，即可求得∠BAC 的度数．

【详解】解：∵△ABC 绕点 A 逆时针旋转一定角度得到△ADE，

∴∠C=∠E，∠BAC=∠DAE，

∵∠E＝70°，BC 垂直于 AD，

∴∠DAC=90° －∠C=90° －∠E=20°，

∵∠CAE＝65°，

∴∠BAC=∠DAE=∠DAC＋∠CAE=20° ＋65° =85°．

故答案为 85°．

【点睛】本题主要考查角的概念及其计算和图形的旋转，熟练掌握旋转的性质是解答本题的关键．

13. 【答案】70°

【分析】根据三角形内角和定理，得出 $\angle ADC=100°$，再根据同弧所对的圆周角相等，得到 $\angle BDC=\angle CAD=30°$，即可求出 $\angle ADB$ 的度数．

【详解】解：∵ $\angle CAD=30°$，$\angle ACD=50°$，

∴ $\angle ADC=180°-\angle CAD-\angle ACD=100°$，

∵ $CB=CD$，

∴ $CB=CD$，

∴ $\angle BDC=\angle CAD=30°$，

∴ $\angle ADB=\angle ADC-\angle BDC=100°-30°=70°$，

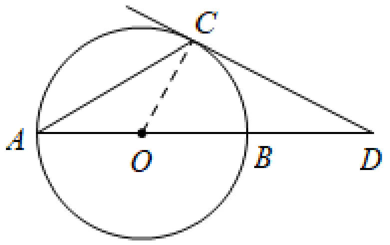
故答案为：$70°$．

【点睛】本题考查了三角形内角和定理，圆的性质，解题关键是掌握同弧所对的圆周角相等．

14. 【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】如图，连接 OC，证明 $OC\perp DC$，结合 $AB=4$，$\angle D=30°$，可得 $OC=2$，$OD=2OC=4$，再利用勾股定理可得答案．

【详解】解：如图，连接 OC，



$\because DC$ 切$\odot O$于点 C，

$\therefore OC \perp DC$，

$\because AB=4$，$\angle D=30°$，

$\therefore OC=2$，$OD=2OC=4$，

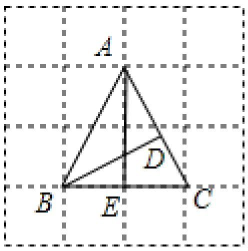
$\therefore CD=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

故答案为：$2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查的是切线的性质，含$30°$的直角三角形的性质，勾股定理的应用，求解$OD=4$是解本题的关键.

15. 【答案】$\frac{4}{5}\sqrt{5}$

【分析】根据图形和三角形的面积公式求出△ABC的面积，根据勾股定理求出 AC，根据三角形的面积公式计算即可.

【详解】

解：△ABC的面积$=\frac{1}{2}\times BC\times AE=2$，

由勾股定理得，$AC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

则$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times BD=2$，

解得$BD=\frac{4}{5}\sqrt{5}$，

故答案为：$\frac{4}{5}\sqrt{5}$

【点睛】本题考查的是勾股定理的应用，掌握在任何一个直角三角形中，两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方是解题的关键.

16. 【答案】$3\sqrt{2}$

【分析】利用勾股定理求出 AB，延长 EF 至 K，使 $FK=EF$，则△EBK是等腰直角三角形，求出 BK，根据

三角形中位线定理得到$MF=\frac{1}{2}AK$，再利用三角形三边关系解答.

【详解】解：在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=BC=4$，$\angle ACB=90°$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，

如图，延长 EF 至 K，使 $FK=EF$，则$\triangle EBK$是等腰直角三角形，

$\therefore BK=BE=\sqrt{2}BD=2\sqrt{2}$，

$\because M$是 AE 的中点，F 是 EK 的中点，

$\therefore MF$ 是$\triangle AEK$的中位线，

$\therefore MF=\frac{1}{2}AK$，

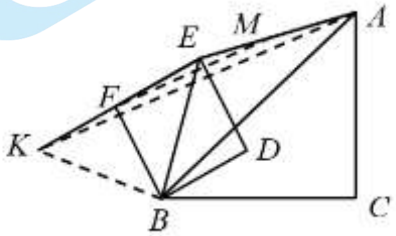
在$\triangle ABK$中，$AB-BK\le AK\le AB+BK$，

$\therefore 4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\le AK\le 4\sqrt{2}+2\sqrt{2}$，即$2\sqrt{2}\le AK\le 6\sqrt{2}$，

$\therefore \sqrt{2}\le MF\le 3\sqrt{2}$，

$\therefore$线段 FM 的最大值是$3\sqrt{2}$，

故答案为：$3\sqrt{2}$.



【点睛】此题考查等腰直角三角形的性质，正方形的性质，勾股定理，三角形中位线的判定及性质定理，熟记各知识点并熟练应用是解题的关键.

三、解答题（本题共 68 分，第 17—18 题，每小题 5 分，第 19 题 4 分，第 20—21 题，每小题 5 分，第 22—26 题，每小题 6 分，第 27，28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 【答案】4

【分析】根据负整数指数幂，零指数幂，化简绝对值，实数的混合运算进行计算即可求解.

【详解】解：$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-(\pi-2)^0+\left|\sqrt{3}-2\right|+\sqrt{3}$

$=3-1+2-\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$=4$.

【点睛】本题考查了实数的混合运算，熟练掌握负整数指数幂，零指数幂，化简绝对值是解题的关键.

18. 【答案】原不等式组的解集为$-3<x\le 1$，不等式组的非负整数解为 0，1.

【分析】分别解出不等式组中的每一个不等式，即得出不等式组的解集，再在解集中找出非负整数即可.

【详解】解：$\begin{cases} x-3(x-1)\geq 1 ① \\ \dfrac{1+3x}{2}>x-1 ② \end{cases}$

解不等式①得：$x\leq 1$，

解不等式②得：$x>-3$，

∴原不等式组的解集为$-3<x\leq 1$，

∴不等式组的非负整数解为 0，1.

【点睛】本题考查求不等式组的整数解．掌握解不等式组的方法和步骤是解题关键.

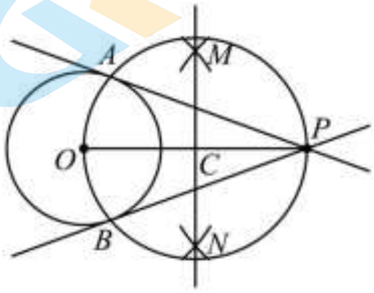
19.【答案】(1）见解析　（2）直径所对的圆周角是直角；经过半径的外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线

【分析】(1）根据尺规作图作线段的垂直平分线处理；

（2）由垂直平分线的性质、直径所对的圆周角是直角可得$\angle OAP=\angle OBP=90^{\circ}$；由切线的判定定理“经过半径的外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线”可得证切线.

【小问 1 详解】

解：如图，



【小问 2 详解】

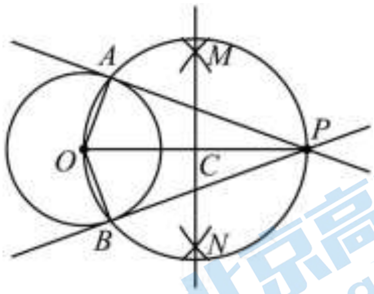
∵ MN 垂直平分 OP，

∴ $OC=CP$.

∴ OP 是⊙C 的直径.

∴ $\angle OAP=\angle OBP=90^{\circ}$，依据是：直径所对的圆周角是直角；

∴直线 PA，PB 都是⊙O 的切线，其依据是：经过半径的外端点并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.



【点睛】本题考查尺规作图作线段的垂直平分线，圆周角定理及推论，切线的判定定理；熟练掌握相关定理是解题的关键.

20.【答案】(1)证明见解析；(2)a>0.

【分析】(1）根据一元二次方程根的判别式化简后即可得求证；

（2）利用一元二方程的求根公式求出两根，可求出 a 的取值范围.

【详解】(1)证明：∵ $x^2+(a-1)x-a=0$.∴△=（a—1)^2+4a=a^2+2a+1=（a+1)≥ 0 ，∴方程总有两个实数根.

(2)由求根公式得，$x=\dfrac{-(a-1)\pm\sqrt{(a-1)^2+4a}}{2}=\dfrac{-(a-1)\pm(a+1)}{2}$，∴ $x_1=1$， $x_2=-a$， ∵方程有一个根是负数，∴－a＜0，∴a＞0；故答案为 a＞0.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根的判别式和求根公式，熟练掌握并灵活运用是解题的关键.

21.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{5\sqrt{11}}{2}$

【分析】（1）证明 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，得到 $DE=\frac{1}{2}AC=AF$，同理可得 $DF=\frac{1}{2}AB=AE$，再由 $AB=AC$，得到 $DE=AF=AF=DF$，则四边形 $AEDF$ 是菱形；

（2）设 AD、EF 交于 O，利用三角形中位线定理求出 $EF=5$，再根据菱形的性质和勾股定理求出 AD 的长即可得到答案.

【小问 1 详解】

证明：∵点 D， E， F 分别为 BC， AB， AC 的中点，

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $AF=\dfrac{1}{2}AC$，

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AC=AF$，

同理可得 $DF=\dfrac{1}{2}AB=AE$，

$\because AB=AC$，

$\therefore DE=AF=AE=DF$，

∴四边形 $AEDF$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：设 AD、EF 交于 O，

同理可证 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}BC=5$，

$\because AB=6$，

$\therefore AE=3$，

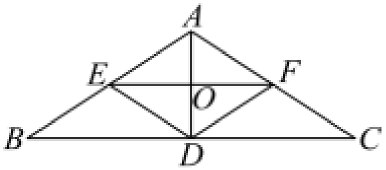
∵四边形 $AEDF$ 是菱形，

$\therefore AD\perp EF$，$OE=\dfrac{1}{2}EF=2.5$， $AD=2OA$，

在 Rt△AEO 中，由勾股定理得 $OA=\sqrt{AE^2-OE^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$，

∴ $AD=\sqrt{11}$，

∴ $S_{菱形AEDF}=\dfrac{1}{2}AD\cdot EF=\dfrac{5\sqrt{11}}{2}$.



【点睛】本题主要考查了菱形的性质与判定，勾股定理，三角形中位线定理，熟知菱形的性质与判定定理是解题的关键.

22. 【答案】（1）$(-1,0)$，$(3,0)$；$\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$；$1,-2$

（2）见解析　（3）$-2\le y<2.5$

（4）$t<-1$ 或 $t>3$

【分析】（1）分别令 $x,y=0$，求得与坐标轴的交点，化为顶点式求得顶点坐标，即可求解；

（2）根据列表描点连线画出函数图象即可求解；

（3）根据函数图象直接可得结果；

（4）根据题意得出 $y_1=0$，进而根据函数图象即可求解.

【小问 1 详解】

解：$y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{3}{2}$，

当 $x=0$，$y=-\dfrac{3}{2}$，

当 $y=0$，$0=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{3}{2}$，

解得：$x_1=-1,x_2=3$，

$y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}(x-1)^2-2$，

∴顶点坐标为 $1,-2$，

∴ $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{3}{2}$ 与 x 轴交点的坐标为 $(-1,0)$，$(3,0)$，与 y 轴交点的坐标为 $\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$，顶点坐标为：$1,-2$；

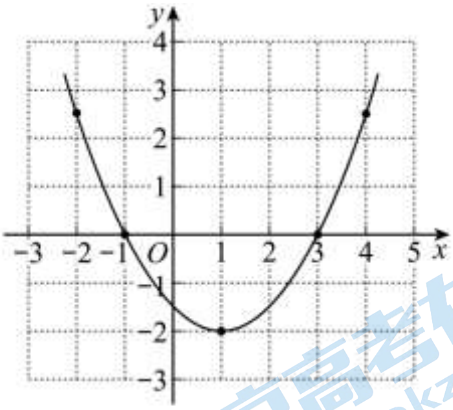
故答案为：$(-1,0)$，$(3,0)$；$\left(0,-\dfrac{3}{2}\right)$；$1,-2$.

【小问 2 详解】

列表如下，

x	…	-2	-1	1	3	4	…
y	…	2.5	0	-2	0	2.5	…

描点、连线如下，



【小问 3 详解】

当$0<x<4$时，$-2\le y<2.5$，

故答案为：$-2\le y<2.5$.

【小问 4 详解】

点$(-1,y_1)$，(t,y_2)在抛物线上，且$y_2>y_1$，

则$y_1=0$，

$\therefore y_2>0$，

根据$t<-1$或$t>3$

故答案为：$t<-1$或$t>3$.

【点睛】本题考查了二次函数的性质，画二次函数图象，根据函数图象求不等式的解集，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

23. 【答案】（1） $A(1,0)$，$B(0,-2)$，$y=2x-2$

（2）$1<m\le 2$或$-2\le m<-1$

【分析】（1）先求出点A的坐标，进而利用待定系数法求出直线l_1的解析式，再求出点B的坐标即可；

（2）先根据对称性求出直线l_2的解析式，再结合函数图象求解即可.

【小问 1 详解】

解：$\because$直线$x=1$与x轴交于点A，

$\therefore A(1,0)$，

把$A(1,0)$代入$y=kx-2$中得：$0=k-2$，

解得$k=2$，

$\therefore$直线l_1的解析式$y=2x-2$，

在 $y=2x-2$ 中，当 $x=0$ 时，$y=-2$，

$\therefore B(0,-2)$；

【小问 2 详解】

解：设 $P(s,\ n)$ 是直线 l_2 上一点，则 $P(s,\ n)$ 关于直线 $x=1$ 对称的点的坐标为 $(2-s,\ n)$，

$\because$ 直线 l_2 与直线 l_1 关于直线 $x=1$ 对称，

$\therefore$ 点 $(2-s,\ n)$ 在直线 l_1 上，

$\therefore 2(2-s)-2=n$，

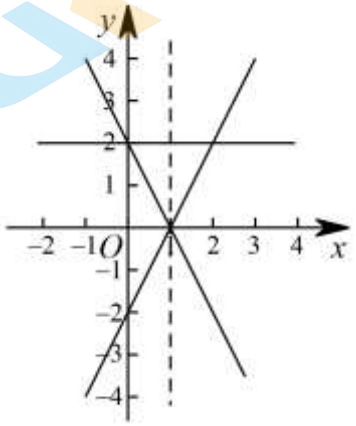
$\therefore n=-2s+2$，

$\therefore$ 直线 l_2 的解析式为 $y=-2x+2$，

$\because$ 直线 $y=m$ 与直线 l_1,l_2 围成的区域 W 内（不包含边界）恰有 1 个整点，

$\therefore$ 结合以下函数图象可知，该整点只能是点 $(1,1)$，

$\therefore 1<m\le 2$ 或 $-2\le m<-1$．



【点睛】本题主要考查了待定系数法求一次函数解析式，一次函数与几何变换，利用数形结合的思想求解是解题的关键．

24. 【答案】（1）证明见解析

（2）$2\sqrt{3}$

【分析】（1）先根据等边等等角证明 $\angle ODA=\angle C$，再由三角形内角和定理证明 $\angle C+\angle CDE=90°$，进而得到 $\angle ODA+\angle CDE=90°$，由此即可证明结论；

（2）如图所示，过点 O 作 $OH\perp BF$，连接 OF，由垂径定理得到 $BH=\dfrac{1}{2}BF=1$，则 $HE=2$，证明四边形 $ODEH$ 是矩形，得到 $OD=OB=EH=2$，$DE=DE$，

由勾股定理得 $OH=\sqrt{3}$，则 $DE=\sqrt{3}$,，由勾股定理得：$BD=2$，由圆周角定理得到 $\angle ADB=90°$，则 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=2\sqrt{3}$．

【小问 1 详解】

证明：$\because$ $AB=BC$，$OA=OD$，

$\therefore \angle ODA=\angle OAD$，$\angle A=\angle C$，

$\therefore \angle ODA=\angle C$，

$\because DE\perp BC$，即 $\angle DEC=90^\circ$，

$\therefore \angle C+\angle CDE=90^\circ$，

$\therefore \angle ODA+\angle CDE=90^\circ$，

$\therefore \angle ODE=90^\circ$，

$\therefore OD\perp DE$，

$\because OD$ 是$\odot O$ 的半径，

$\therefore DE$ 为$\odot O$ 的切线；

【小问 2 详解】

解：如图所示，过点 O 作 $OH\perp BF$，连接 OF，

$\therefore BH=\frac{1}{2}BF=1$，

$\therefore HE=2$，

$\because OH\perp HE$，$DE\perp HE$，$OD\perp DE$，

$\therefore$四边形 $ODEH$ 是矩形，

$\therefore OD=OB=EH=2$，$DE=DE$，

在 Rt$\triangle OBH$ 中，由勾股定理得：$OH=\sqrt{OB^2-BH^2}=\sqrt{3}$，

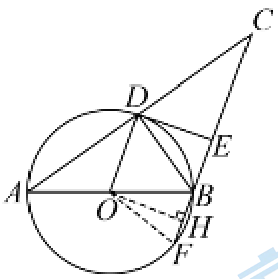
$\therefore DE=\sqrt{3}$，

在 Rt$\triangle BDE$ 中，由勾股定理得：$BD=\sqrt{DE^2+BE^2}=2$，

$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB=90^\circ$，

$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=2\sqrt{3}$．



【点睛】本题主要考查了切线的判定，垂径定理，圆周角定理，矩形的性质与判定，勾股定理等等，正确作出辅助线是解题的关键．

25. 【答案】方案一：$\frac{1}{21}$；方案二：$\frac{1}{117}$；方案三：$\frac{1}{121}$；实验结论：三；推广证明：见解析

【分析】本题考查分式的实际应用，根据题意列式等．

数据计算：分别计算出三种方案漂洗后衣服中存有的污物与原来的污物关系即可解答；

实验结论：比较数据计算得出的数据，即可作出判断；

推广证明：先用字母表示出三种方案漂洗后衣服中存有的污物与原来污物间的关系，再利用求差法比较即可解决问题．

【详解】解：根据题意可知：

方案一：漂洗后衣服中存有的污物是原来的$\frac{1}{20+1}=\frac{1}{21}$；

方案二：漂洗后衣服中存有的污物是原来的$\frac{1}{12+1}\times\frac{1}{8+1}=\frac{1}{117}$；

方案三：漂洗后衣服中存有的污物是原来的$\frac{1}{10+1}\times\frac{1}{10+1}=\frac{1}{121}$．

$\because \frac{1}{21}>\frac{1}{117}>\frac{1}{121}$，

∴方案三的漂洗效果最好，

故答案为：$\frac{1}{21}$；$\frac{1}{117}$；$\frac{1}{121}$；三；

推广证明理由如下：

方案一：漂洗后衣服中存有的污物是原来的$\frac{a}{a+m}$；

方案二：漂洗后衣服中存有的污物是原来的$\frac{a}{a+x}\times\frac{a}{a+m-x}=\frac{a^2}{(a+x)(a+m-x)}$；

方案三：漂洗后衣服中存有的污物是原来的$\frac{a}{a+\frac{1}{2}m}\times\frac{a}{a+\frac{1}{2}m}=\frac{4a^2}{(2a+m)^2}$，

$\because \frac{a}{a+m}-\frac{4a^2}{(2a+m)^2}=\frac{a(2a+m)^2-4a^2(a+m)}{(a+m)(2a+m)^2}=\frac{am^2}{(a+m)(2a+m)^2}>0$，

∴方案三比方案一漂洗效果好；

$\because \frac{a^2}{(a+x)(a+m-x)}-\frac{4a^2}{(2a+m)^2}=\frac{a^2[(2a+m)^2-4(a+x)(a+m-x)]}{(a+x)(a+m-x)(2a+m)^2}=\frac{a^2(m-2x)^2}{(a+x)(a+m-x)(2a+m)^2}$，

当$x\neq\frac{1}{2}m$时，$\frac{a^2}{(a+x)(a+m-x)}-\frac{4a^2}{(2a+m)^2}>0$，

∴方案三比方案二效果好，

综上所述：方案三漂洗效果最好．

26. 【答案】（1）抛物线与y轴交点的坐标为$(0,4)$，$t=2$

（2）$\frac{3}{2}<t<2$，$0<x_0<1$

【分析】本题考查二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，解题关键是根据数形结合求解；

（1）将点$(1,m),(3,n)$代入抛物线解析式，再根据$m=n$得出$3-t=t-1$，再求解即可；

（2）再根据$m<n<4$，可确定出对称轴的取值范围，进而可确定x_0的取值范围.

【小问1详解】

解：当$x=0$时，$y=4$.

$\therefore$抛物线与y轴交点的坐标为$(0,4)$.

$\because$点$(1,m)$，$(3,n)$在抛物线$y=ax^2+bx+4(a>0)$上，且$m=n$，

$\therefore 3-t=t-1$，

解得$t=2$.

【小问2详解】

解：由$m=a+b+4$，$n=9a+3b+4$，

$\because m<n$，

$\therefore 8a+2b>0$.

$\therefore b>-4a$.

$\because a>0$，

$\therefore -\dfrac{b}{2a}<2$，

即$t<2$.

$\because n<4$，

$\therefore 9a+3b<0$.

$\therefore b<-3a$.

$\therefore -\dfrac{b}{2a}>\dfrac{3}{2}$，

即$t>\dfrac{3}{2}$.

综上所述，$\dfrac{3}{2}<t<2$.

$\because$点$(x_0,n)(x_0\neq 3)$在抛物线上，

$\therefore (x_0,n)$，$(3,n)$关于抛物线的对称轴$x=t$对称，且$x_0<t$.

$\therefore 3-t=t-x_0$，解得$t=\dfrac{x_0+3}{2}$.

$\therefore \dfrac{3}{2}<\dfrac{x_0+3}{2}<2$.

$\therefore 0<x_0<1$.

27.【答案】（1）见解析　（2）是，理由见解析

【分析】（1）利用三角形内角和即可得到本题答案；

（2）取 BG 和 CG 中点分别为 H,I ，连接 EH,DH,FI,DI ，利用中位线定理及直角三角形斜边中线可得 $DI=EH$ ， $DH=FI$ ，则证明 $\triangle HDE\cong\triangle DIF$ ，再利用全等性质及外角和性质即可得到本题答案．

【小问 1 详解】

解：$\because GE\perp AB$， $GF\perp AC$，

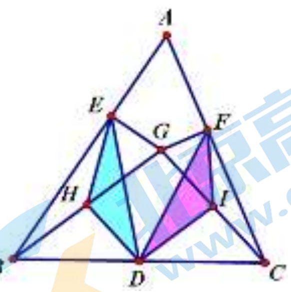
$\therefore\angle AEG=\angle AFG$，

$\because\angle AEG+\angle A+\angle ABF=\angle AFG+\angle A+\angle ACE=180°$，

$\therefore\angle ABG=\angle ACG$；

【小问 2 详解】

解：取 BG 和 CG 中点分别为 H,I ，连接 EH,DH,FI,DI ，



，

$\because$点 D 为 BC 中点，

$\therefore DI=\dfrac{1}{2}BG$， $DH=\dfrac{1}{2}CG$， $\angle GHD=\angle GID$，

$\because GE\perp AB$， $GF\perp AC$，

$\therefore EH=\dfrac{1}{2}BG$， $FI=\dfrac{1}{2}CG$，

$\therefore DI=EH$ ， $DH=FI$，

在 $\triangle HDE$ 和 $\triangle DIF$ 中，

$$\begin{cases}DI=EH\\DH=FI\\DE=DF\end{cases},$$

$\therefore\triangle HDE\cong\triangle DIF\left(\mathrm{SSS}\right)$，

$\therefore\angle EHD=\angle FID$，

$\therefore\angle EHG=\angle FIG$，

$\because EH=BH,FI=IC$，

$\therefore\triangle EHB$ 和 $\triangle FIC$ 是等腰三角形，

$\therefore\angle HEB=\angle EBH,\angle IFC=\angle ICF$，

$\therefore\angle EHG=2\angle EBH,\angle FIG=2\angle FCI$，

$\therefore\angle ABG=\angle ACG$．

【点睛】本题考查三角形内角和定理，全等三角形判定及性质，等腰三角形判定及性质，外角和性质．正

确作出辅助线是解决本题的关键.

28.【答案】（1）P_1，P_2；

（2）①$-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$；②$2-\sqrt{5}\le t\le\sqrt{5}-1$.

【分析】（1）由题意可知，正方形 $OABC$ 的“中称点”是以 $D(2,2)$，$E(-1,2)$，$F(-1,-1)$，$G(2,-2)$ 为顶点的正方形内部，如图可知 $P_1\left(\frac{1}{2},0\right)$，$P_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 符合题意；$P_3(1,-2)$，$P_4(-1,2)$，不符合题意；

（2）①由题意得：⊙T 的“中称点”在以 O 为圆心，3 为半径的圆内，当直线 $y=x+m$ 与此圆相切于点 D 时，求得直线与 y 轴交于点 $E\left(0,3\sqrt{2}\right)$；同理，相切于点 F 时，直线与 y 轴交于点 $G\left(0,-3\sqrt{2}\right)$，即可得到 m 的取值范围；

②如图，由由题意可知，正方形 $DEFG$ 在⊙T 内部，当⊙T 经过 $-1,2$ 时，解得 $t=\sqrt{5}-1$；当⊙T 经过 $(2,2)$ 时，解得 $t=2-\sqrt{5}$，即可求出 t 的取值范围.

【小问 1 详解】

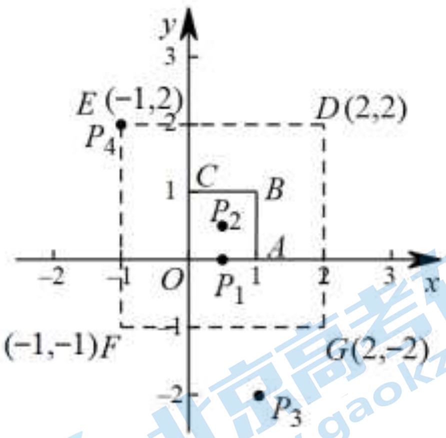
解：由题意可知，

正方形 $OABC$ 的“中称点”是以 $D(2,2)$，$E(-1,2)$，$F(-1,-1)$，$G(2,-2)$ 为顶点的正方形内部，如图：

$P_1\left(\frac{1}{2},0\right)$，$P_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 在正方形 $DEFG$ 内部，符合题意；

$P_3(1,-2)$ 在正方形 $DEFG$ 外，$P_4(-1,2)$ 在正方形 $DEFG$ 上，不符合题意；

故答案为：P_1，P_2；



【小问 2 详解】

①由题意得：⊙T 的“中称点”在以 O 为圆心，3 为半径的圆内，

当直线 $y=x+m$ 与此圆相切于点 D 时，设在 $D(x,y)$ $\left(x\langle 0,y\rangle 0\right)$，

则 $\angle DAO=\angle DOA=45^\circ$，

$\therefore x=y$,

$\because x^2+y^2=3^2$,

$\therefore x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \dfrac{3\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+m$,

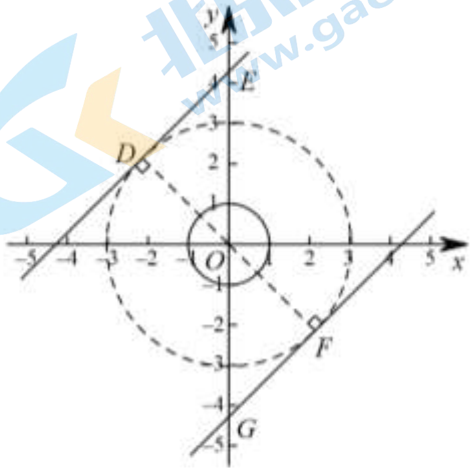
$\therefore m=3\sqrt{2}$,

故直线与 y 轴交于点 $E\left(0,3\sqrt{2}\right)$;

同理，相切于点 F 时，直线与 y 轴交于点 $G\left(0,-3\sqrt{2}\right)$,

$\because$ 直线 $y=x+m$ 上存在 $\odot T$ 的“中称点”,

$\therefore -3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$;

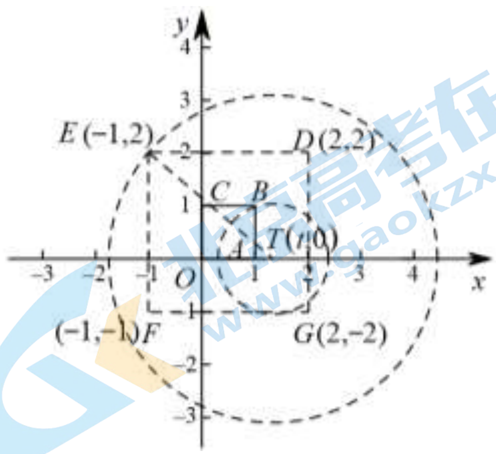


②如图，由由题意可知，正方形 $DEFG$ 在 $\odot T$ 内部，

当 $\odot T$ 经过 $-1,2$ 时，$t>0$,

$\left[t-(-1)\right]^2+2^2=3^2$,

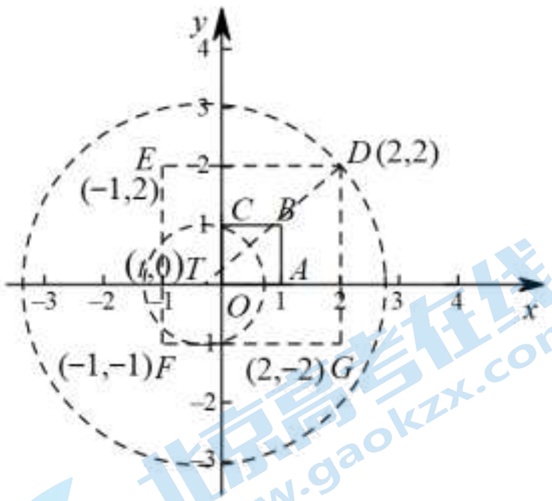
解得：$t=\sqrt{5}-1$ 或 $t=-\sqrt{5}-1$（舍去）



当$\odot T$经过$(2,2)$时，$t<0$，

$(t-2)^2+2^2=3^2$，

解得：$t=2-\sqrt{5}$或$t=\sqrt{5}+2$（舍去），



综上所述，

$\therefore 2-\sqrt{5}\le t\le\sqrt{5}-1$.

【点睛】本题考查了新定义的理解，轴对称，圆的基本性质，勾股定理解直角三角形，以及一次函数图像和性质；解题的关键是理解新定义，找到点的轨迹范围.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！