# 石景山区 2020-2021 学年第二学期高二期末试卷

# 数 学

| | |
|---|---|
| 考 | 1．本试卷共 4 页，共三道大题，20 道小题，满分 100 分．考试时间 120 分钟． |
| 生 | 2．在答题卡上准确填写学校名称、班级和姓名． |
| 须 | 3．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，选择题、作图题请用 2B 铅笔作答，其 |
| 知 | 他试题请用黑色字迹签字笔作答，在试卷上作答无效． |

**一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．**

1．已知集合 $A=\left\{x \mid x^{2}-x-2 \leq 0\right\}$，$B=\{x \mid -2<x \leq 1\}$，则 $A \cup B=$

A．$\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$　B．$\{x \mid -2<x \leqslant 2\}$　C．$\{x \mid -2<x \leqslant 1\}$　D．$\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

2. 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是

A. $y=\sqrt{x+1}$　B. $y=(x-1)^{2}$　C. $y=2^{-x}$　D. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

3. 对任意等比数列 $\{a_n\}$，下列说法一定正确的是

A．$a_1, a_3, a_9$ 成等比数列　B．$a_2, a_3, a_6$ 成等比数列

C．$a_3, a_6, a_9$ 成等比数列　D．$a_2, a_4, a_8$ 成等比数列

4. 袋中有 10 个除颜色以外完全相同的球，其中 5 个白球，3 个黑球，2 个红球.从中任意取出一球，已知它不是白球，则它是黑球的概率是

A．$\frac{1}{5}$　B．$\frac{3}{10}$　C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{3}{5}$

5. 已知 $a=\log_2 e$，$b=\ln 2$，$c=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$，则 $a, b, c$ 的大小关系为

A．$a>b>c$　B．$b>a>c$

C．$c>a>b$　D．$c>b>a$

6. 若$a,b,c,d\in R$，则“$a+d=b+c$”是“$a,b,c,d$依次成等差数列”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．设函数$f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，则

A．$x=\frac{1}{2}$时$f(x)$取到极大值　　B．$x=\frac{1}{2}$时$f(x)$取到极小值

C．$x=2$时$f(x)$取到极大值　　D．$x=2$时$f(x)$取到极小值

8．某人射击一次击中的概率是$0.6$，经过$3$次射击，此人至少有两次击中目标的概率为

A．$\frac{81}{125}$　　B．$\frac{54}{125}$　　C．$\frac{36}{125}$　　D．$\frac{27}{125}$

9．已知函数$f\left(x\right)=e^{x}-a\left|x\right|$有三个零点，则实数$a$的取值范围为

A．$\left(-\infty,0\right)$　　B．$\left(0,1\right)$　　C．$\left(0,e\right)$　　D．$\left(e,+\infty\right)$

10．在一次知识测验后，甲、乙、丙三人对成绩进行预测．

甲：我的成绩比乙高．　　乙：丙的成绩比我和甲的都高．

丙：我的成绩比乙高．

成绩公布后，三人成绩互不相同且只有一个人预测正确，那么三人按成绩由高到低的次序为

A．甲、乙、丙　　B．乙、甲、丙

C．丙、乙、甲　　D．甲、丙、乙

**二、填空题：本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分．**

11．函数$f\left(x\right)=xe^{x}$的导函数$f'\left(x\right)=$__________

12．某公司有 5 万元资金用于投资开发项目，如果成功，一年后可获利 12% ，一旦失败，一年后将丧失全部资金的 50% ，下表是过去 200 例类似项目开发的实施结果：

| 投资成功 | 投资失败 |
|---|---|
| 192 次 | 8 次 |

则该公司一年后估计可获收益的期望是__________（元）

13．已知 $f\left(x\right)=-x^3+ax+3$ 在定义域上单调递减，则实数 $a$ 的取值范围是______

14. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=-\frac{1}{4}$，$a_n\cdot a_{n-1}=a_{n-1}-1\left(n>1,n\in N^*\right)$，则 $a_{2021}=$________

15. 已知集合 $A_0=\{x|0<x<1\}$.给定一个函数 $y=f(x)$，定义集合

$A_n=\{y|y=f(x),x\in A_{n-1}\}$，若 $A_n\cap A_{n-1}=\phi$ 对任意的 $n\in N^*$ 成立，则称该函数

$y=f(x)$ 具有性质“$\varphi$”(例如 $y=x+1$ 具有性质“$\varphi$”).

下列函数：① $y=\frac{1}{x}$；② $y=x^2+1$；③ $y=\cos(\frac{\pi}{2}x)+2$，其中具有性质“$\varphi$”的函数的

序号是____________.

**三、解答题：本大题共 5 个小题，共 40 分．应写出文字说明，证明过程或演算步骤．**

16.（本小题满分 7 分）

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，$a_1=2$，$a_3=2a_2+16$．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和．

17. （本小题满分 7 分）

为推动乒乓球运动的发展，某乒乓球比赛允许不同协会的运动员组队参加.现有来自甲协会的运动员 3 名，其中种子选手 2 名；乙协会的运动员 5 名，其中种子选手 3 名.从这 8 名运动员中随机选择 4 人参加比赛.

（Ⅰ）设事件 $A$ 为“选出的 4 人中恰有 2 名种子选手，且这 2 名种子选手来自不同协会”，求事件 $A$ 发生的概率；

（Ⅱ）设随机变量 $X$ 为选出的 4 人中种子选手的人数，求 $X$ 的分布列.

18．（本小题满分 9 分）

已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+2$ .

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $0<a<3$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值及最小值.

19．(本小题满分 8 分)

为了提高学生学习数学的兴趣，某校决定在每周的同一时间开设《数学史》、《生活中的数学》、《数学与哲学》、《数学建模》四门校本选修课程，甲、乙、丙三位同学每人均在四门校本课程中随机选一门进行学习，假设三人选择课程时互不影响，且每人选择每一课程都是等可能的.

（Ⅰ）求甲、乙、丙三人选择的课程互不相同的概率；

（Ⅱ）设 $X$ 为甲、乙、丙三人中选修《数学史》的人数，求 $X$ 的分布列和数学期望 $E(X)$ .

20．（本小题满分 9 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x+kx,k\in R$ .

（Ⅰ）求 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若不等式 $f(x)\leqslant x^2+x$ 恒成立，求 k 的取值范围.

# 石景山区 2020—2021 学年第二学期高二期末

## 数学试卷答案及评分参考

**一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分.**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | $B$ | $A$ | $C$ | $D$ | $C$ | $B$ | $D$ | $A$ | $D$ | $A$ |

**二、填空题：本大题共 5 个小题，每小题 4 分，共 20 分.**

| 题号 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | $(x+1)\cdot e^x$ | 4760 | $(-\infty,0]$ | 5 | ①② |

**三、解答题：本大题共 5 个小题，共 40 分．解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤.**

16． (本小题满分 7 分)

解:（Ⅰ）设等比数列的公比为 $q$，

由 $a_1=2$，$a_3=2a_2+16$，得 $2q^2=4q+16$， ...........1 分

即 $q^2-2q-8=0$，解得 $q=-2$（舍）或 $q=4$． ...........3 分

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2\times4^{n-1}=2^{2n-1}$； ...........4 分

（Ⅱ）$b_n=\log_2 a_n=log_2 2^{2n-1}=2n-1$， ...........5 分

因为 $b_1=1$， $b_{n+1}-b_n=2(n+1)-1-2n+1=2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，以 2 为公差的等差数列， ..........6 分

则数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=n\times1+\dfrac{n(n-1)\times2}{2}=n^2$． ..........7 分

17．(本小题满分 7 分)

解：（Ⅰ）由已知，得 $P(A)=\dfrac{C_2^1C_3^1C_3^2}{C_8^4}=\dfrac{9}{35}$.

所以事件 $A$ 发生的概率为 $\dfrac{9}{35}$. ..........3 分

（Ⅱ）随机变量 $X$ 的所有可能取值为 $1,2,3,4,$ ..........4 分

其中 $P(X=k)=\dfrac{C_5^kC_3^{4-k}}{C_8^4},(k=1,2,3,4)$. ..........5 分

故 $P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_3^3}{C_8^4}=\dfrac{1}{14}$，$P(X=2)=\dfrac{C_5^2C_3^2}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_5^3C_3^1}{C_8^4}=\dfrac{3}{7}$，$P(X=4)=\dfrac{C_5^4C_3^0}{C_8^4}=\dfrac{1}{14}$， ..........6 分

所以随机变量 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{1}{14}$ | $\dfrac{3}{7}$ | $\dfrac{3}{7}$ | $\dfrac{1}{14}$ |

..........7 分

18．(本小题满分 9 分)

解:（Ⅰ）$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$ . ..........1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{a}{3}$ . ..........2 分

若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 时，

$f'(x)<0$．故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 单调递减；..3 分

若 $a=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增； ..........4 分

若 $a<0$，则当 $x\in\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\dfrac{a}{3},0\right)$ 时，

$f'(x)<0$．故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right),(0,+\infty)$ 单调递增，在 $\left(\dfrac{a}{3},0\right)$ 单调递减．　　..........5 分

（Ⅱ）当 $0<a<3$ 时，由（Ⅰ）知，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 单调递减，在 $\left(\dfrac{a}{3},1\right)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{a^3}{27}+2$，

最大值为 $f(0)=2$ 或 $f(1)=4-a$．　　.........7 分

不妨设最小值为 $m$，最大值为 $M$，则 $m=-\dfrac{a^3}{27}+2$，$M=\begin{cases}4-a,0<a<2,\\2,2\le a<3.\end{cases}$．

.........9 分

19．(本小题满分 8 分)

解：（Ⅰ）甲、乙、丙三人从四门课程中各任选一门，共有 $4^3=64$ 种不同的选法，

记“甲、乙、丙三人选择的课程互不相同”为事件 $M$，

事件 $M$ 共包含 $A_4^3=24$ 个基本事件，则 $P(M)=\dfrac{24}{64}=\dfrac{3}{8}$，

所以甲、乙、丙三人选择的课程互不相同的概率为 $\dfrac{3}{8}$．　　.......3 分

（Ⅱ）**方法一：** $X$ 可能的取值为 $0,1,2,3$，　　.......4 分

$P(X=0)=\dfrac{3^3}{4^3}=\dfrac{27}{64}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1\times3^2}{3^3}=\dfrac{27}{64}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2\times3}{4^3}=\dfrac{9}{64}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{4^3}=\dfrac{1}{64}$．　　.......6 分

所以 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{27}{64}$ | $\dfrac{27}{64}$ | $\dfrac{9}{64}$ | $\dfrac{1}{64}$ |

所以 $X$ 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{27}{64}+1\times\dfrac{27}{64}+2\times\dfrac{9}{64}+3\times\dfrac{1}{64}=\dfrac{3}{4}$．　　.......8 分

**方法二：**甲、乙、丙三人从四门课程中任选一门，可以看成三次独立重复试验，$X$ 为甲、乙、丙三人中选修《数学史》的人数，则 $X\sim B(3,\frac{1}{4})$，所以

$P(X=k)=C_3^k(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{3-k},k=0,1,2,3$， .......5 分

所以 $X$ 的分布列为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{27}{64}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{1}{64}$ |

.......7 分

所以 $X$ 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. .......8 分

20．(本小题满分 9 分)

解：（Ⅰ）函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=1+\ln x+k$， $f'(1)=1+k$， .......2 分

因为 $f(1)=k$，所以函数 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为

$y-k=(k+1)(x-1)$，即 $y=(k+1)x-1$. .......4 分

（Ⅱ）由 $f(x)\le x^2+x$，$f(x)=x\ln x+kx$，则 $x\ln x+kx\le x^2+x$，即 $\ln x+k\le x+1$，

设 $g(x)=\ln x-x+k-1$， .......5 分

$g'(x)=\frac{1}{x}-1$， $x\in(0,1)$， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，

$x\in(1,+\infty)$， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减， .......7 分

因为不等式 $f(x)\le x^2+x$ 恒成立，且 $x>0$，

所以 $\ln x-x+k-1\le 0$，所以 $g(x)_{\max}=g(1)=k-2\le 0$ 即可，故 $k\le 2$. .....9 分

**（以上解答题，若用其它方法，请酌情给分）**

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。