高三年级四月份测试题

数学试卷 A　　　　2020. 4

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知命题 p：$\forall x\in \mathbf{R}$，$e^x>1$，那么命题 p 的否定为

（A）$\exists x_0\in \mathrm{R}$，$e^{x_0}\le 1$　　（B）$\forall x\in \mathrm{R}$，$e^x<1$

（C）$\exists x_0\in \mathrm{R}$，$e^{x_0}>1$　　（D）$\forall x\in \mathrm{R}$，$e^x\le 1$

（2）下列函数中既是奇函数，又在区间 $(0,1)$ 上单调递减的是

（A）$f(x)=-x^3+2$　（B）$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x|$　（C）$f(x)=x^3-3x$　（D）$f(x)=\sin x$

（3）设集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}\,|\,x^2-3x-4>0\}$，$B=\{x|e^{x-2}<1\}$，则以下集合 P 中，满足 $P\subseteq(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$ 的是

（A）$\{-1,0,1,2\}$　（B）$\{1,2\}$　（C）$\{1\}$　（D）$\{2\}$

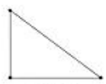
（4）已知 $a=\log_{\sqrt{3}}2$，$b=\log_{0.2}0.3$，$c=\tan\dfrac{11\pi}{3}$，则 a，b，c 的大小关系是

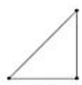
（A）$b<a<c$　（B）$c<b<a$　（C）$c<a<b$　（D）$b<c<a$

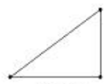
（5）若一个 n 面体有 m 个面是直角三角形，则称这个 n 面体的直度为 $\dfrac{m}{n}$，如图是某四面体的三视图，则这个四面体的直度为

（A）$\dfrac{1}{4}$　（B）$\dfrac{1}{2}$

（C）$\dfrac{3}{4}$　（D）1


正视图


侧视图


俯视图

(6) 已知向量$\boldsymbol{a}=(2,2\sqrt{3})$，若$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影是

（A）$\frac{3}{4}$　　（B）$-\frac{3}{4}$　　（C）$\frac{4}{3}$　　（D）$-\frac{4}{3}$

(7) 已知$\triangle ABC$，则“$\sin A=\cos B$”是“$\triangle ABC$是直角三角形”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

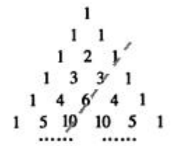
(8)“杨辉三角”是中国古代重要的数学成就，它比西方的“帕斯卡三角形”早了300多年. 如图是由“杨辉三角”拓展而成的三角形数阵，记a_n为图中虚线上的数$1, 3, 6, 10, \cdots$构成的数列$\{a_n\}$的第n项，则a_{100}的值为

（A）5049

（B）5050

（C）5051

（D）5101



(9) 已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$的渐近线与抛物线$M: y^2=2px(p>0)$交于点$A(2,a)$，直线AB过抛物线M的焦点，交抛物线M于另一点B，则$|AB|$等于

（A） 3.5　　（B）4　　（C）4.5　　（D）5

(10) 关于函数$f(x)=(x^2+ax-1)\mathrm{e}^x$，有以下三个结论：

① 函数恒有两个零点，且两个零点之积为-1；

② 函数的极值点不可能是-1；

③ 函数必有最小值.

其中正确结论的个数有

（A）3 个　　（B）2 个　　（C）1 个　　（D）0 个

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）在 $(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x})^5$ 的二项展开式中，x^{-2} 的系数为________．（用数字作答）

（12）设复数 z 在复平面内对应的点位于第一象限，且满足 $|z|=5$，$z+\bar{z}=6$，则 $\bar{z}$ 的虚部为________，

$\dfrac{1}{z}=$____________．

（13）设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的各项为整数，公比为 q，且 $q\neq -1$，$a_1+a_3<2a_2$，写出数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式________．

（14）在平面直角坐标系中，已知点 $A(0,1)$，$B(1,1)$，P 为直线 AB 上的动点，A 关于直线 OP 的对称点记为 Q，则线段 BQ 的长度的最大值是________．

（15）关于曲线 $C: x^2-xy+y^2=4$，给出下列四个结论：

① 曲线 C 关于原点对称，但不关于 x 轴、y 轴对称；

② 曲线 C 恰好经过 4 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

③ 曲线 C 上任意一点都不在圆 $x^2+y^2=3$ 的内部；

④ 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不大于 $2\sqrt{2}$．

其中，正确结论的序号是________．

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos(x-\dfrac{\pi}{4})\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间；

（Ⅱ）当 $x\in[0,\pi]$ 时，若 $f(x)\in(-1,1]$，求 x 的取值范围．

（17）（本小题 14 分）

体温是人体健康状况的直接反应，一般认为成年人腋下温度T（单位：℃）平均在$36℃\sim37℃$之间即为正常体温，超过37.1℃即为发热. 发热状态下，不同体温可分成以下三种发热类型：低热：$37.1\le T\le 38$；高热：$38<T\le 40$；超高热（有生命危险）：$T>40$.

某位患者因患肺炎发热，于 12 日至 26 日住院治疗. 医生根据病情变化，从 14 日开始，以 3 天为一个疗程，分别用三种不同的抗生素为该患者进行消炎退热. 住院期间，患者每天上午 8:00 服药，护士每天下午 16:00 为患者测量腋下体温记录如下：

抗生素使用情况	没有使用		使用“**抗生素 A**”治疗			使用“**抗生素 B**”治疗		
日期	12 日	13 日	14 日	15 日	16 日	17 日	18 日	19 日
体温（℃）	38.7	39.4	39.7	40.1	39.9	39.2	38.9	39.0

抗生素使用情况	使用“**抗生素 C**”治疗			没有使用			
日期	20 日	21 日	22 日	23 日	24 日	25 日	26 日
体温（℃）	38.4	38.0	37.6	37.1	36.8	36.6	36.3

（Ⅰ）请你计算住院期间该患者体温不低于39℃的各天体温平均值；

（Ⅱ）在19 日—23日期间，医生会随机选取3 天在测量体温的同时为该患者进行某一特殊项目“α 项目”的检查，记X为高热体温下做“α 项目”检查的天数，试求X的分布列与数学期望；

（Ⅲ）抗生素治疗一般在服药后 2-8 个小时就能出现血液浓度的高峰，开始杀灭细菌，达到消炎退热效果. 假设三种抗生素治疗效果相互独立，请依据表中数据，判断哪种抗生素治疗效果最佳，并说明理由.

(18)（本小题 15 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB//CD$，$AD\perp DC$，且 $AB=1$，$AD=DC=DP=2$，$\angle PDC=120°$.

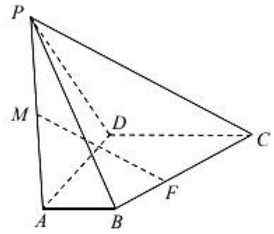
（Ⅰ）求证：$AD\perp PC$；

（Ⅱ）求二面角______________的余弦值；

从① $P-AB-C$，② $P-BD-C$，③ $P-BC-D$ 这三个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

（Ⅲ）若 M 是棱 PA 的中点，求证：对于棱 BC 上任意一点 F，MF 与 PC 都不平行.



(19)（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过椭圆右焦点 F 的直线 l 与椭圆交于 A，B 两点，当直线 l 与 x 轴垂直时，$|AB|=3$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）当直线 l 与 x 轴不垂直时，在 x 轴上是否存在一点 P（异于点 F），使 x 轴上任意点到直线 PA，PB 的距离均相等？若存在，求 P 点坐标；若不存在，请说明理由.

(20)（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行，求 a；

（Ⅱ）已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值不小于 2，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）写出 $f(x)$ 所有可能的零点个数及相应的 a 的取值范围.（请直接写出结论）

(21)（本小题 14 分）

已知集合 $S_n=\{X\mid X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots,n\}(n\geq 2)$，对于 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S_n$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$，定义 A 与 B 的差为 $A-B=(|a_1-b_1|,|a_2-b_2|,\cdots,|a_n-b_n|)$；$A$ 与 B 之间的距离为 $d(A,B)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n|$.

（Ⅰ）若 $A-B=(0,1)$，试写出所有可能的 A,B；

（Ⅱ）$\forall A,B,C\in S_n$，证明：（i）$d(A-C,B-C)=d(A,B)$；

（ii）$d(A,B),d(A,C),d(B,C)$ 三个数中至少有一个是偶数；

（Ⅲ）设 $P\subseteq S_n$，P 中有 $m(m>2$，且为奇数）个元素，记 P 中所有两元素间距离的平均值为 $\overline{d}_P$，

证明：$\overline{d}_P\leq\dfrac{n(m+1)}{2m}$.