秘密★启用前【考试时间：2021年5月10日15:00—17:00】

眉山市高中2021届第三次诊断性考试

数　学（文史类）

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{-3,-2,-1,0,1\}$，$B=\{x|x^2<9\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-3,-2,-1,0,1\}$　　B. $\{-3,-2,-1\}$

C. $\{0,1\}$　　D. $\{-2,-1,0,1\}$

2. 复数 $\frac{2-3i}{2i}=$

A. $-\frac{3}{2}-i$　　B. $-\frac{3}{2}+i$　　C. $\frac{3}{2}-i$　　D. $\frac{3}{2}+i$

3. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{5\pi}{6}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

4. 某部门为了解某平台"直播带货"商品销售反馈情况，随机抽取了 A,B,C,D,E,F,G,H 这8类商品，收集了这几类商品分别在新规实施前后的消费者评价得分，绘制成右图所示的雷达图. 根据统计图判断，下面的叙述一定不正确的是

A. 新规实施后，D 类商品的评价得分提升幅度最大

B. 新规实施后，H,F 类商品的评价得分低于新规实施前

C. 这8类商品评价得分的平均分高于新规实施前的平均分

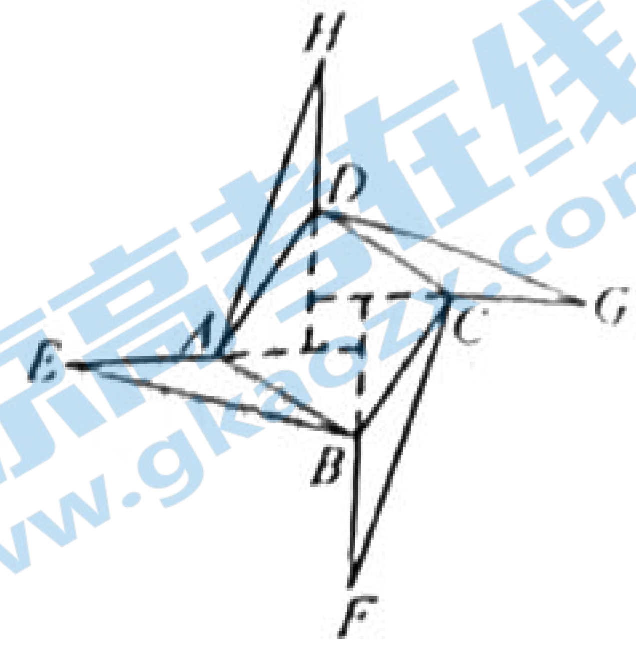
D. 有7类商品的评价得分高于新规实施前

5. 直线 l 经过圆 $C:x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 的圆心 C，且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，则直线 l 的方程为

A. $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}-1=0$　　B. $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}+1=0$

C. $\sqrt{3}x-3y+\sqrt{3}+3=0$　　D. $\sqrt{3}x-3y-\sqrt{3}-3=0$

6. 如图是在"赵爽弦图"的基础上创作出的一个"数学风车"平面模型，图中正方形 $ABCD$ 内部为"赵爽弦图"（由四个全等的直角三角形和一个小正方形组成），$\triangle ABE,\triangle BCF,\triangle CDG,\triangle DAH$ 是 4 个全等三角形，且 $AB=AE$，$\angle BAE=150°$．若在该模型中随机抽取一点，则该点取自于"赵爽弦图"的概率为



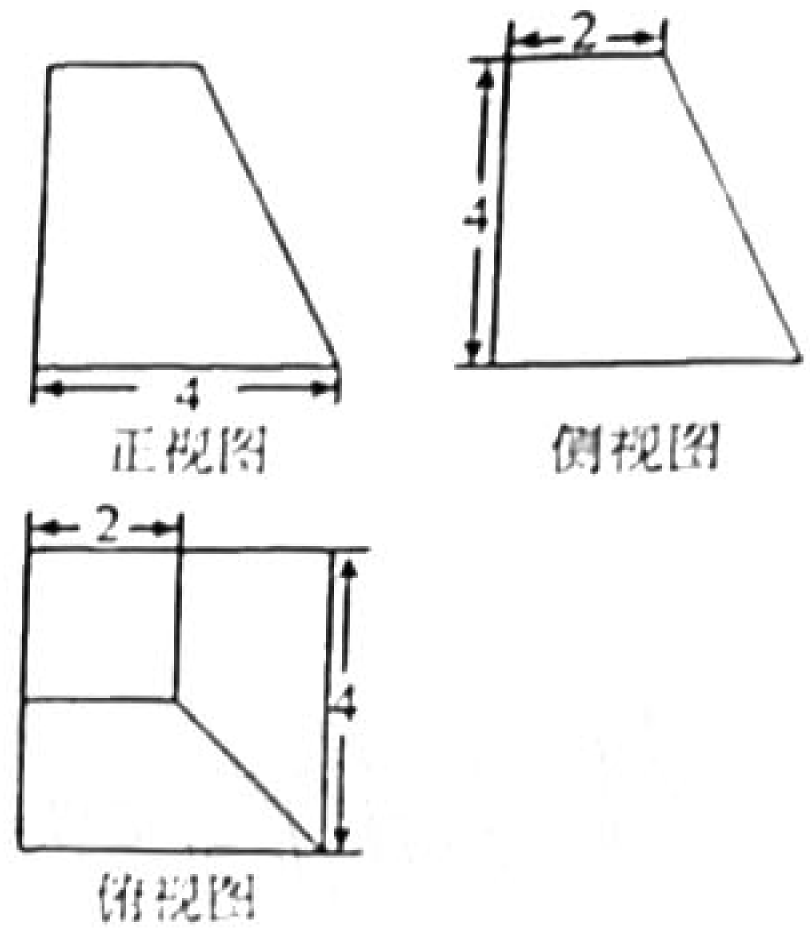
A. $\frac{1}{3}$　　　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$　　　　D. $\frac{3}{4}$

7. 某四棱台的三视图如右图所示，则该几何体的表面积为

A. $44+12\sqrt{3}$　　　　B. $40+12\sqrt{5}$

C. $40+12\sqrt{3}$　　　　D. $44+12\sqrt{5}$



8. 在$\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是角 A,B,C 所对的边，若$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{c^2-a^2-b^2}{4}$，则 $C=$

A. $\frac{\pi}{3}$　　　　B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　　　D. $\frac{5\pi}{6}$

9. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，A 是 C 的准线上一点，面积为 $4\sqrt{3}$ 的等边$\triangle AFB$ 的顶点 B 恰在抛物线 C 上，则 p 等于

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 2021 年 3 月 20 日，"沉睡三千年，一醒惊天下"的三星堆遗址向世人展示了其重大考古新发现——6 个三星堆文化"祭祀坑"现已出土 500 余件重要文物．为推测文物年代，考古学者通常用碳 14 测年法推算，碳 14 测年法是根据碳 14 的衰变程度来计算出样品的大概年代的一种测量方法．2021 年，考古专家对某次考古的文物样本上提取的遗存材料进行碳 14 年代测定，检测出碳 14 的残留量约为初始量的 68%，已知碳 14 的半衰期（放射性物质质量衰减一半所用的时间）是 5730 年，且属于指数型衰减．以此推算出该文物大致年代是（参考数据：$\log_{\sqrt[5730]{0.5}}10\approx-19034.7$，$\log_{\sqrt[5730]{0.5}}68\approx-34881$）

A. 公元前 1400 年到公元前 1300 年　　B. 公元前 1300 年到公元前 1200 年

C. 公元前 1200 年到公元前 1100 年　　D. 公元前 1100 年到公元前 1000 年

11. 已知函数 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$，若将 $f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，然后向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，且函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 φ 的最小值是

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{12}$　　D. $\frac{\pi}{24}$

12. 若曲线 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y=kx+b$，则 $k+b$ 的最小值为

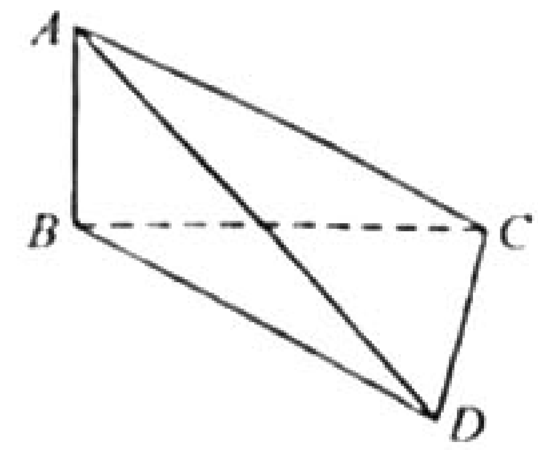
A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geq 0, \\ x+y\geq 0, \\ x\leq 2, \end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最小值为______.

14. 计算 $\dfrac{\cos 20^\circ-\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=$______.

15. 中国古代数学家刘徽所注释的《九章算术》中，称四个面均为直角三角形的四面体为"鳖臑"．如图所示的鳖臑 $ABCD$ 中，$AB\perp$ 面 BCD，$CD\perp BC$，若 $CD=1$，$AC=\sqrt{5}$，且顶点 A,B,C,D 均在球 O 上，则球 O 的表面积为______.



16. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两焦点为 F_1,F_2，过双曲线 C 上一点 P 作两渐近线的垂线，垂足分别为 A,B，若 $3|F_1F_2|^2=64|PA|\cdot|PB|$，则双曲线 C 的离心率为______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生依据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=\lambda a_{n-1}+1(n\geq 2)$，且 $\{a_n+1\}$ 为等比数列.

(1)求实数 λ 的值；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 12 分）

某城市为改善保障性租赁住房的品质，对保障性租赁住房进行调研，随机抽取了 200 名保障性租赁住房的租赁人进行问卷调查，并对租赁房屋的品质进行满意度测评，收集整理得到如下 2×2 列联表：

	30 岁及以下	30 岁以上	小计
满意	60		110
不满意		30	
小计			

(1)完成上述列联表；通过计算判断是否有 90% 的把握认为租赁人对保障性租赁住房品质的满意程度与年龄段（"30 岁及以下"和"30 岁以上"）有关系？

(2)现从满意度评分为"不满意"的人中按照表中年龄段分层抽取了 6 名租赁人进行座谈．若从 6 人中随机抽取 2 人给予一定的租赁优惠，求抽取的 2 人中"30 岁以上"年龄段至少有 1 人的概率.

附表及公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

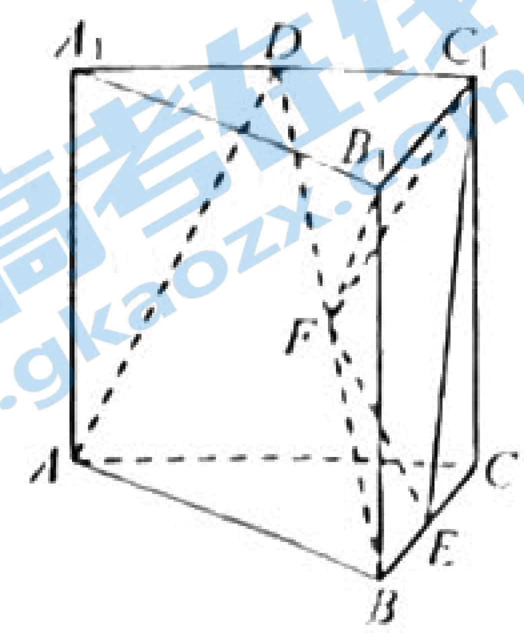
$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$AC=AA_1=4$，$BC=2$，$\angle ACB=60^\circ$，D，E 分别是 A_1C_1，BC 的中点.

(1)判断直线 C_1E 与平面 ABD 的位置关系，并证明你的结论；

(2)设 F 是 BD 的中点，求四棱锥 $F-B_1C_1EB$ 的体积.



20.（本小题满分 12 分）

已知 O 为坐标原点，A，B 分别为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点和上顶点，$\triangle AOB$ 的面积为 1，椭圆 C 的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求 a，b 的值；

(2)若与 AB 垂直的直线交椭圆 C 于 M，N 两点，且 $OM\perp ON$，求$\triangle AMN$ 的面积.

21.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=e^x-\cos x+ax^2-x$，其中 $a>0$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$的极值；

(2)若 $f(x)\geqslant(a-1)x$，求 a 的值.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知射线 l：$y=\sqrt{3}x(x\geqslant0)$，曲线 C_1：$\begin{cases}x=\dfrac{4t}{t^2+1},\\ y=\dfrac{4}{t^2+1}\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=8\sin\theta$.

(1)写出射线 l 的极坐标方程以及曲线 C_1 的普通方程；

(2)设射线 l 与 C_1 交于点 M，与 C_2 交于 O，N，求$|MN|$的值.

23.［选修 4—5：不等式选讲］（10 分）

已知 $f(x)=\left|x+\dfrac{3}{2}\right|+|1-2x|$.

(1)解不等式 $f(x)\leqslant\dfrac{7}{2}-x$；

(2)令 $f(x)$的最小值为 M，正数 a，b 满足 $a+2b=M$，求证：$a^2b^2+\dfrac{2}{ab}\geqslant\dfrac{17}{4}$.

眉山市高中2021届第三次诊断性考试
数学(文史类)参考答案

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题(60分)

1. 命题意图：本小题主要考查一元二次不等式的解、集合的交集等基础知识；考查运算求解能力.

解析：选择D. 因为集合 $B=\{x|x^2<9\}=\{x|-3<x<3\}$，所以 $A\cap B=\{-2,-1,0,1\}$.

2. 命题意图：本小题主要考查复数的除法运算等基础知识；考查运算求解能力.

解析：选择A. $\frac{2-3i}{2i}=\frac{(2-3i)\cdot(-i)}{2i\cdot(-i)}=\frac{-2i-3}{2}=-\frac{3}{2}-i$.

3. 命题意图：本小题主要考查平面向量的几何意义、向量的模与数量积、两个向量的夹角等基础知识；考查运算求解能力.

解析：选择B. 由 $|a+b|=\sqrt{3}|b|$，得 $|a|^2+2a\cdot b+|b|^2=3|b|^2$，又 $|a|=2|b|$，所以 $a\cdot b=-|b|^2$，所以 $\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{-|b|^2}{2|b|^2}=-\frac{1}{2}$，所以向量 a,b 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.

4. 命题意图：本小题主要考查统计图表等基本知识；考查阅读理解能力；考查统计思想.

解析：选择D. 根据雷达图，易知A，B，C项正确，D项错误.

5. 命题意图：本小题主要考查圆的标准方程、点斜式求直线方程、直线的倾斜角与斜率等基础知识；考查运算求解能力；考查配方法和数形结合思想.

解析：选择A. 将圆 $C:x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 配方为 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 知圆心 $C(1,-1)$，又直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，所以其斜率为 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，由点斜式得直线 l 的方程为 $y-(-1)=\sqrt{3}(x-1)$，即 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}-1=0$.

6. 命题意图：本小题主要考查分类加法和分步乘法原理等基础知识；考查分类与整合思想；考查

推理论证等能力和应用意识.

解析:选择 B. 设 $AB=2$,则$\triangle ABE$ 面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 150°=1$,则所求概率 $P=\frac{4}{4\times 1+4}=\frac{1}{2}$.

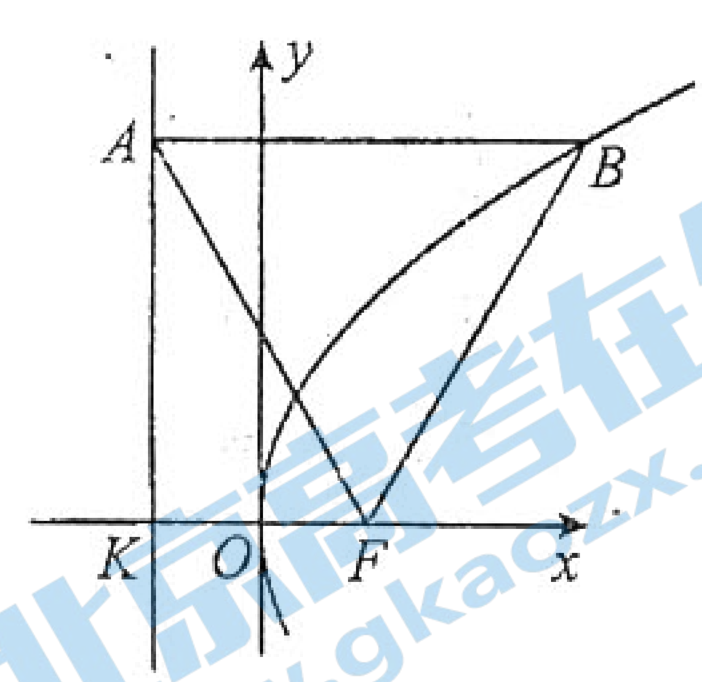
7. 命题意图:本小题主要考查空间几何体及其三视图、多面体的表面积等基础知识;考查空间想象能力、运算求解能力及创新意识;考查化归与转化等数学思想方法.

解析:选择 D. 由图可知,该四棱台的下底面边长为 4,上底面边长为 2,高为 4,从而左侧面和后侧面面积均为 $\frac{1}{2}(2+4)\cdot 4=12$,前侧面和右侧面面积均为 $\frac{1}{2}(2+4)\cdot\sqrt{2^2+4^2}=6\sqrt{5}$,总表面积为 $44+12\sqrt{5}$.

8. 命题意图:本小题主要考查三角形面积公式、余弦定理、特殊角的三角函数值等基础知识;考查运算求解能力;考查化归与转换等数学思想.

解析:选择 C. 由 $S_{\triangle ABC}=\frac{c^2-a^2-b^2}{4}$ 根据三角形面积公式得 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{c^2-a^2-b^2}{4}$,所以 $\sin C=\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}$,由余弦定理有 $\sin C=-\cos C$,即 $\tan C=-1$,所以 $C=\frac{3\pi}{4}$.

9. 命题意图:本小题主要考查抛物线的定义、性质等基础知识;考查推理论证能力、运算求解能力;考查数形结合、化归与转化等数学思想.



解析:选择 B. 由 $S_{\triangle AFB}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot|AF|^2=4\sqrt{3}$,得 $|AF|=4$;而 $|AB|=|BF|$,从而 $BA\perp$准线 AK(如图). 所以$\angle AFO=\angle FAB=\angle BFx=60°$,$p=|FK|=\frac{1}{2}|AF|=2$.

10. 命题意图:本小题主要考查函数建模、指数式与对数式运算等基础知识;考查抽象概括、运算求解等数学能力和应用意识;考查化归与转化等数学思想.

解析:选择 C. 设样本中碳 14 初始值为 k,衰减率为 p,经过 x 年后,残留量为 y,则 $y=k(1-p)^x$,由碳 14 的半衰期是 5730 年,即有 $k(1-p)^{5730}=\frac{1}{2}k$,即 $1-p=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$,所以 $y=k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$,由 $k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=68\%k$,所以 $x=\log_{\sqrt[5730]{0.5}}\frac{68}{100}=\log_{\sqrt[5730]{0.5}}68-2\log_{\sqrt[5730]{0.5}}10\approx 3188$,2021 年之前的 3188 年之前是大致是公元前 1167 年. 故大致年代为公元前 1200 年到公元前 1100 年之间.

11. 命题意图:本小题主要考查三角函数图象伸缩变换、平移变换、奇偶性和诱导公式等基础知识;考查运算求解能力、推理论证能力;考查化归与转化和数形结合等数学思想方法.

解析:选择 B. 因为 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍,得到 $y=$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，再将 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$向右平移 $\varphi(\varphi>0)$个单位长度，得到 $g(x)=\sin\left[2(x-\varphi)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-2\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$的图象. 因为函数 $g(x)$的图象关于 y 轴对称，所以 $-2\varphi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}-\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，因为 $\varphi>0$，所以当 $k=-1$ 时，φ 取得最小值$\frac{\pi}{6}$.

12. 命题意图：本小题主要考查导数几何意义及其应用等基础知识；考查推理论证、运算求解等数学能力；考查化归与转化、数形结合等数学思想.

解析：选择 C. 知 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$，则切线斜率 $k=\frac{1}{x_0}+\frac{1}{2}$，切线方程为 $y=\left(\frac{1}{x_0}+\frac{1}{2}\right)(x-x_0)+\ln x_0+\frac{1}{2}x_0$，即 $y=\left(\frac{1}{x_0}+\frac{1}{2}\right)x+\ln x_0-1$，则 $k+b=\frac{1}{x_0}+\ln x_0-\frac{1}{2}(x_0>0)$，令 $u(x)=\frac{1}{x}+\ln x-\frac{1}{2}(x>0)$，则 $u'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，当 $0<x<1$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$单调递减；当 $x>1$ 时，$u'(x)>0$，$u(x)$单调递增，故当 $x=1$ 时 $u(x)$取最小值 $u(1)=\frac{1}{2}$，所以 $k+b$ 的最小值为$\frac{1}{2}$.

二、填空题(20 分)

13. 命题意图：本小题主要考查不等式表示的可行域、目标函数的最值等基础知识；考查运算求解能力；考查数形结合等数学思想.

解析：填-2. 由$\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\x+y\geqslant 0,\\x\leqslant 2,\end{cases}$作图知约束条件表示的可行域是以$(0,0)$，$(2,2)$，$(2,-2)$为顶点的三角形及其内部，当目标函数 $z=x+2y$ 过顶点$(2,-2)$时取得最小值-2.

14. 命题意图：本小题主要考查两角和的正弦公式等基础知识；考查运算求解能力.

解析：填 2. 由 $\cos 20^\circ-\sqrt{3}\sin 20^\circ=2\left(\frac{1}{2}\cos 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\right)$

$=2(\sin 30^\circ\cos 20^\circ-\cos 30^\circ\sin 20^\circ)=2\sin 10^\circ$，所以$\frac{\cos 20^\circ-\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=2$.

15. 命题意图：本小题主要考查空间几何体中的位置关系、球体的表面积等基础知识；考查空间想象能力、运算求解能力、逻辑推理能力及创新意识；考查化归与转化等数学思想方法.

解析：填 6π. 因为 $AB\perp$面 BCD，所以 $AB\perp CD$，而 $CD\perp BC$，故 $CD\perp$面 ABC，从而 $CD\perp AC$，从而 AD 为球 O 的直径，又 $CD=1$，$AC=\sqrt{5}$，于是 $AD^2=6$，故球 O 的表面积为 $4\pi R^2=6\pi$.

16. 命题意图：本小题主要考查双曲线的几何性质等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力及创新意识；考查化归与转化、函数与方程等数学思想.

解析：填 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 易知 $|PA|\cdot|PB|=\frac{|ax+by|}{c}\cdot\frac{|ax-by|}{c}=\frac{a^2b^2}{c^2}=\frac{3(2c)^2}{64}$，所以 $3c^4=16a^2b^2$. 将 $b^2=c^2-a^2$ 代入得 $e^2=4$ 或 $e^2=\frac{4}{3}$，则 $e=2$ 或 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题(共 70 分)

(一)必考题

17. 命题意图：本小题主要考查递推数列、等比数列、数列的通项公式与前 n 项和公式等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查化归与转化等数学思想.

解析：(1)由 $a_n=\lambda a_{n-1}+1(n\geq 2)$ 得 $a_n+1=\lambda a_{n-1}+2=\lambda\left(a_{n-1}+\frac{2}{\lambda}\right)$. ………………… 3 分

因为 $\{a_n+1\}$ 为等比数列，所以 $\frac{2}{\lambda}=1$，

解得 $\lambda=2$. ……………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知数列 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列.

所以 $a_n+1=2^n$，即 $a_n=2^n-1$. ……………………………………………… 9 分

所以 $S_n=(2-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^n-1)$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^n-2-n$. ………………………………………………… 12 分

18. 命题意图：本小题主要考查样本估计总体，统计案例，概率等基本知识；考查统计抽象概括的能力和应用意识；考查概率统计思想.

解析：(1)列联表如下：

	30 岁及以下	30 岁以上	小计
满意	60	50	110
不满意	60	30	90
小计	120	80	200

……………………………………………………………………………… 2 分

由题得 $K^2=\frac{200(60\times30-60\times50)^2}{110\times90\times80\times120}=\frac{100}{33}\approx3.0303>2.706$，

所以，有 90%的把握认为租赁人对保障性租赁住房品质的满意程度与年龄段有关系. ……
……………………………………………………………………………… 6 分

(2)在事先抽取的 6 名租赁人中，年龄在 30 岁及以下的有 4 人，记为 a,b,c,d；30 岁以上的有

2 人，记为 x,y.

从这 6 人中随机抽取 2 人，所有的基本事件有 $(a,b),(a,c),(a,d),(a,x),(a,y),(b,c),(b,d),(b,x),(b,y),(c,d),(c,x),(c,y),(d,x),(d,y),(x,y)$，共 15 个. ………… 9 分

其中，抽取的 2 人中“30 岁以上”年龄段至少有 1 人的基本事件有 9 个.

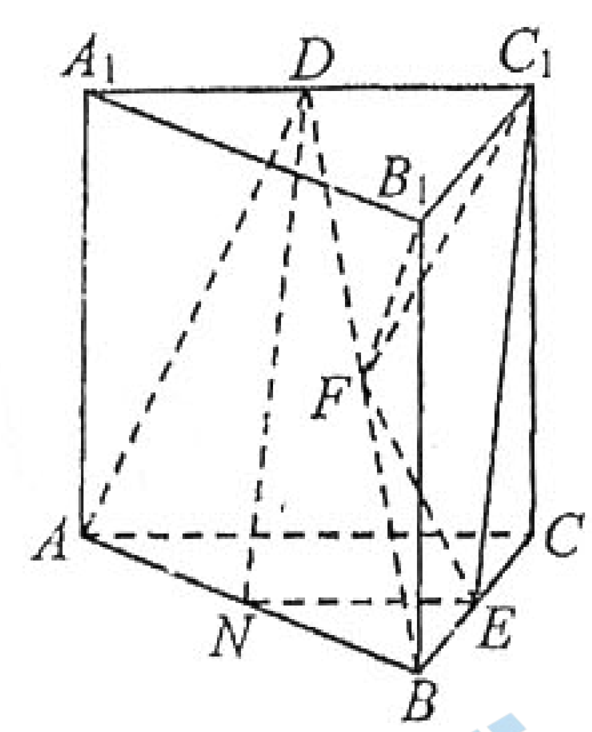
故在抽取的 2 人中“30 岁以上”年龄段至少有 1 人所求的概率 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. ………… 12 分

19. 命题意图：本小题主要考查三棱柱中的位置关系、空间直线与平面平行或垂直的性质与判定、几何体体积的计算等基础知识；考查空间想象能力、运算求解能力、逻辑推理能力及创新意识；考查化归与转化等数学思想方法.

解析：(1) $C_1E//$平面 ABD. ………… 2 分

证明：取 AB 的中点 N，连接 EN,DN，则 $NE=\frac{1}{2}AC=C_1D$，而 $NE//AC//C_1D$，

故 $ENDC_1$ 为平行四边形，从而 $C_1E//DN$. ………… 4 分



而 $DN\subset$平面 ABD，$C_1E\not\subset$平面 ABD，所以 $C_1E//$平面 ABD. ………… 6 分

(2) 因为 F 为线段 BD 的中点，所以点 F 到面 BB_1C_1C 的距离等于点 D 到平面 BB_1C_1C 的距离的 $\frac{1}{2}$，

而 D 为线段 A_1C_1 的中点，则 D 到平面 BB_1C_1C 的距离等于 A_1 到平面 BB_1C_1C 的距离的 $\frac{1}{2}$.
………… 8 分

在 $\triangle ABC$ 中，$AC=4,CB=2,\angle ACB=60^\circ$，由余弦定理得 $AB=2\sqrt{3}$，从而 $AB\perp BC$.

由已知，有 $BB_1\perp AB$，从而 $AB\perp$面 BCC_1B_1.

而 $A_1B_1//AB$，故 $A_1B_1\perp$面 BCC_1B_1，即 A_1 到平面 BB_1C_1C 的距离为 $d=2\sqrt{3}$. ………… 10 分

又四边形 B_1C_1EB 的面积为 $S_{B_1C_1EB}=\frac{1}{2}\times(2+1)\times4=6$，

所以 $V_{F-B_1C_1EB}=\frac{1}{3}\cdot6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. ………… 12 分

20. 命题意图：本小题主要考查椭圆的标准方程、几何性质，直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力及创新意识；考查数形结合、化归与转化、分类与整合等数学思想.

解析：(1) 因为 $\triangle OAB$ 的面积为 1，所以 $ab=2$，………… 2 分

而 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $a=2,b=1$. ………… 4 分

(2)由题意，可设 $MN: y=2x+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases} y=2x+m, \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 得 $17x^2+16mx+4m^2-4=0$. …………………………………… 6 分

于是 $x_1+x_2=-\dfrac{16m}{17}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{17}$，

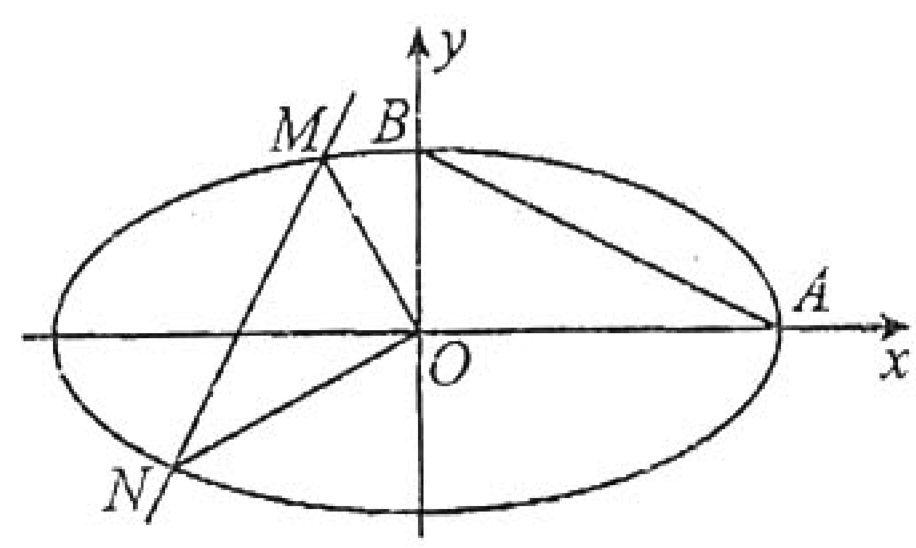
从而 $y_1y_2=(2x_1+m)(2x_2+m)=\dfrac{m^2-16}{17}$. …………………………………… 8 分

由 $OM\perp ON$ 得 $x_1x_2+y_1y_2=0$，解得 $m^2=4$(满足 $\Delta=16(17-m^2)>0$).

此时，$|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5}\cdot\dfrac{4\sqrt{13}}{17}$. …………………………………… 10 分

当 $m=2$ 时，A 到 MN 的距离为

$d=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$，$S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{12\sqrt{13}}{17}$，



当 $m=-2$ 时，A 到 MN 的距离为 $d=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

$S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot d=\dfrac{4\sqrt{13}}{17}$，

综上，$\triangle AMN$ 的面积为 $\dfrac{4\sqrt{13}}{17}$ 或 $\dfrac{12\sqrt{13}}{17}$. …………………………………… 12 分

21. 命题意图：本小题主要考查导数的几何意义、导数及其应用、函数极值与最值等基础知识考查推理论证、运算求解等数学能力和创新意识；考查分类与整合、函数与方程及数形结合等数学思想.

解析：(1)由题 $f(x)=e^x-\cos x+x^2-x$，

则 $f'(x)=e^x+\sin x+2x-1$， …………………………………… 1 分

令 $u(x)=e^x+\sin x+2x-1$，则 $u'(x)=e^x+\cos x+2$，

因为 $u'(x)=e^x+\cos x+2\geq e^x+1>0$，

所以函数 $u(x)$ 即 $f'(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，又 $f'(0)=0$， …………………………………… 2 分

则 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取极小值 $f(0)=0$，无极大值. …………………………………… 4 分

(2)令 $F(x)=f(x)-(a-1)x=e^x-\cos x+ax^2-ax$，

则 $F'(x)=e^x+\sin x+2ax-a$，且 $F(0)=0$，

由 $F'(0)=1-a=0$ 得 $a=1$. …………………………………… 5 分

①当 $a=1$ 时，$F(x)=e^x-\cos x+x^2-x=f(x)$，

由(1)知 $f(x)$ 的极小值为 0，则 $f(x)\geq 0$，即 $F(x)\geq 0$，符合题意. …………………… 6 分

令 $g(x)=F'(x)$，则 $g'(x)=e^x+\cos x+2a$，

②当 $a>1$ 时，$g'(x)>e^x+\cos x+2\geqslant e^x+1>0$，

所以函数 $g(x)$ 即 $F'(x)$ 为 R 上的增函数，

又 $F'(0)=1-a<0$，$F'(1)=e+\sin 1+a>0$，

所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $F'(x_0)=0$，

则 $x\in(0,x_0)$ 时，$F'(x)<F'(x_0)=0$，$F(x)$ 为减函数，

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$F(x)<F(0)=0$，不符合题意，舍去. ………………………………… 9 分

③当 $0<a<1$ 时，$g'(x)=e^x+\cos x+2a$ 为 $(-1,0)$ 上的增函数，

则 $g'(x)>\frac{1}{e}+\cos(-1)+2a>0$，所以 $g(x)$ 即 $F'(x)$ 为 $(-1,0)$ 上的增函数，

又 $F'(0)=1-a>0$，$F'(-1)=\frac{1}{e}+\sin(-1)-3a<\frac{1}{e}-\frac{1}{2}-3a<0$，

故存在 $x_0\in(-1,0)$，使得 $F'(x_0)=0$，

则 $x\in(x_0,0)$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 为增函数，

所以 $x\in(x_0,0)$ 时，$F(x)<F(0)=0$，不符合题意，舍去.

综上所述，a 的值为 1. ……………………………………………………………………… 12 分

(二)选考题(10 分)

22. 命题意图：本小题主要考查曲线的参数方程、极坐标方程，参数方程与普通方程互化、极坐标方程与直角坐标方程的互化等基础知识；考查运算求解能力；考查化归与转化等数学思想.

解析：(1)射线 $l: y=\sqrt{3}x(x\geqslant 0)$，化为极坐标方程为：$\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\geqslant 0)$. ……………………… 2 分

曲线 C_1：$\begin{cases} x=\dfrac{4t}{t^2+1}, \\ y=\dfrac{4}{t^2+1} \end{cases}$ 化为普通方程得 $x^2+(y-2)^2=4(y\neq 0)$. ……………………… 5 分

(2)曲线 C_1 的方程化为极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta(\rho>0)$. ……………………………… 7 分

因为射线 l 与 C_1 交于 M，与 C_2 交于 O，N，

所以 $|MN|=|\rho_1-\rho_2|=|4\sin\frac{\pi}{3}-8\sin\frac{\pi}{3}|=2\sqrt{3}$. ……………………………… 10 分

23. 本小题主要考查含绝对值的不等式、基本不等式、不等式证明方法等基础知识；考查运算求解、推理论证等数学能力；考查分类与整合、化归与转化等数学思想.

解析：(1)当 $x<-\frac{3}{2}$ 时，$f(x)=-x-\frac{3}{2}-2x+1=-3x-\frac{1}{2}\leqslant\frac{7}{2}-x$，得 $-2\leqslant x<-\frac{3}{2}$；

当 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\frac{3}{2}-2x+1=-x+\frac{5}{2}\leqslant\frac{7}{2}-x$，得 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$；

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\frac{3}{2}+2x-1=3x+\frac{1}{2}\leqslant\frac{7}{2}-x$，得 $\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{3}{4}$，

综上，原不等式的解集为 $\left\{x\mid -2\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right\}$. …………………………………………… 4 分

(2)由(1)可知，

当 $x<-\frac{3}{2}$ 时，$f(x)=-3x-\frac{1}{2}>4$；当 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-x+\frac{5}{2}\geqslant 2$；

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=3x+\frac{1}{2}>2$.

故 $f(x)$ 的最小值 $M=2$，则 $a+2b=2$. 于是 $2=a+2b\geqslant 2\sqrt{2ab}$，

则 $0<ab\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$ 时取"＝". …………………………………………… 6 分

下面证明不等式 $a^2b^2+\frac{2}{ab}\geqslant\frac{17}{4}$.

方法 1：令 $t=ab$，$a^2b^2+\frac{2}{ab}=t^2+\frac{2}{t}$，$u(x)=t^2+\frac{2}{t}$，$0<t\leqslant\frac{1}{2}$. ……………………………… 7 分

$u'(x)=2t-\frac{2}{t^2}=\frac{2(t^3-1)}{t^2}$，当 $0<t\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$ 单调递减.

故当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$u(x)$ 取最小值 $u(x)_{\min}=u\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}$，

所以，$a^2b^2+\frac{2}{ab}\geqslant\frac{17}{4}$，当且仅当 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$ 时取"＝". ……………………………………… 10 分

方法 2：$a^2b^2+\frac{2}{ab}=a^2b^2+\frac{1}{8ab}+\frac{1}{8ab}+\frac{7}{4ab}$

$\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2\cdot\frac{1}{8ab}\cdot\frac{1}{8ab}}+\frac{7}{4ab}$

$=\frac{3}{4}+\frac{7}{4ab}$

$\geqslant\frac{3}{4}+\frac{7}{4}\times 2=\frac{17}{4}$. ………………………………………………………………… 9 分

当且仅当 $ab=\frac{1}{2}$ 即 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$ 时取"＝"，

所以，$a^2b^2+\frac{2}{ab}\geqslant\frac{17}{4}$. ………………………………………………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。