

2022 北京陈经纶中学高一（上）期中 数 学

（时间：120 分钟 满分：150 分）

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题给出的四个选项中，有且只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，若集合 M 满足 $\complement_U M = \{1, 2\}$ ，则 ()

A. $2 \in M$ B. $3 \in M$ C. $4 \notin M$ D. $5 \notin M$

2. 若实数 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 且 $a > b$ ，则下列不等式恒成立的是 ()

A. $a^2 > b^2$ B. $ac > bc$ C. $\frac{a}{b} > 1$ D. $a - c > b - c$

3. 全称量词命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$ ” 的否定是 ()

A. $\forall x \notin \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$

C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$

4. 下列函数中，是奇函数且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 ()

A. $y = -x^2$ B. $y = x^{\frac{1}{2}}$ C. $y = x^{-1}$ D. $y = x^3$

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$ ，若 $f(a) = 4$ ，则 $a =$ ()

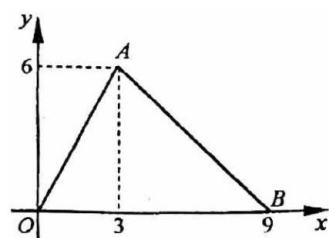
A. -4 或 -2 B. -4 或 2 C. -2 或 4 D. -2 或 2

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的函数，那么 “函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增” 是 “函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ” 的 ()

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

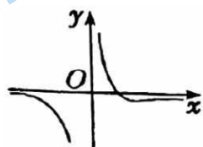
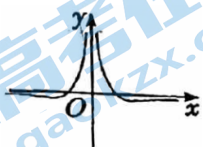
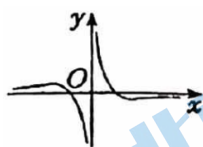
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象为折线 OAB ，则 $f(f(2)) =$ ()



A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

8. 函数 $f(x) = \frac{1-x^2}{x^3}$ 的图象可能是 ()



9. 德国著名数学家、解析数论的创始人狄利克雷，对函数论、三角级数论等都有重要贡献。狄利克雷函数就是以其名字命名的函数，其解析式为 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ ，则下列关于狄利克雷函数 $D(x)$ 的判断错误的是 ()

A. 对任意有理数 t , $D(x+t) = D(x)$

B. 对任意实数 x , $D(D(x)) = 1$

C. $D(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

D. 存在实数 x, y , $D(x+y) = D(x) + D(y)$

10. 已知 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的单调函数, 且对任意实数 x , 都有 $f[f(x)-x] = 4$, 则 $f(3)$ 的值为()

A. 3 B. 5 C. 7 D. 9

二、填空题: 本大题共 6 个小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. $64^{\frac{2}{3}}$ 的值是_____.

12. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 上的定义域为_____.

13. 已知集合 $A = \{x | x - a \leq 0\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围为_____.

14. 若函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(-1)$ 的取值范围是_____.

15. 若 $x > 1$, 则 $f(x) = 4x + \frac{1}{x-1}$ 的最小值是_____.

16. 设集合 X 是实数集 \mathbf{R} 的子集, 如果实数 x_0 满足: 对任意 $a > 0$, 都存在 $x \in X$, 使得 $0 < |x - x_0| < a$, 称 x_0 为集合 X 的聚点, 则在下列集合中:

① $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$; ② $\{x \in \mathbf{Z} | x \neq 0\}$; ③ $\left\{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$; ④ $\left\{x \mid x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$, 以 0 为聚点的集合有_____和_____.

三、解答题: 本大题共 5 个小题, 共 70 分.

17. (本小题满分 12 分)

设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x | 2x - 4 \geq x - 2\}$.

(1) 求 $\complement_U(A \cap B)$;

(2) 若集合 $C = \{x | 2x + a > 0\}$, 满足 $B \cup C = C$, 求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = (ax - 2)(x + 1)$

(I) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最值;

(II) 当 $a \leq 0$ 时, 求关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ 的解集.

19. (本小题满分 14 分)

经观测, 某公路段在某时段内的车流量 y (千辆/小时) 与汽车的平均速度 v 和 (千米/小时) 之间有如下关系: $y = \frac{920v}{v^2 + 3v + 1600} (v > 0)$.

(1) 在该时段内, 当汽车的平均速度 v 为多少时车流量 y 最大? 最大车流量为多少? (精确到 0.01 千辆)

(2) 为保证在该时段内车流量至少为 10 千辆/小时, 则汽车的平均速度应控制在什么范围内?

20. (本小题满分 15 分)

已知定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$, 且 $f(1) = \frac{1}{2}$.

(1) 求 a, b 的值;

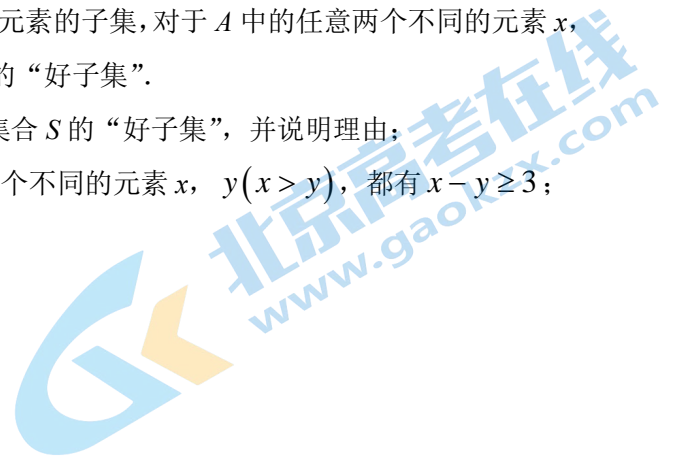
(2) 判断 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的单调性, 并用定义证明之;

(3) 解关于实数 t 的不等式 $f(t-1) + f(t) < 0$.

21. (本小题满分 15 分)

已知集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$, 设 A 是 S 的至少含有两个元素的子集, 对于 A 中的任意两个不同的元素 $x, y (x > y)$, 若 $x - y$ 都不能整除 $x + y$, 则称集合 A 是 S 的“好子集”.

- (1) 分别判断数集 $P = \{2, 4, 6, 8\}$ 与 $Q = \{1, 4, 7\}$ 是否是集合 S 的“好子集”, 并说明理由;
- (2) 证明: 若 A 是 S 的“好子集”, 则对于 A 中的任意两个不同的元素 $x, y (x > y)$, 都有 $x - y \geq 3$;
- (3) 求集合 S 的“好子集” A 所含元素个数的最大值.



参考答案

卷 I (选择题)

一、选择题 (本题共计 10 小题, 每题 5 分, 共计 50 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	B	C	B	A	C	A	C	B

卷 II (非选择题)

二、填空题 (本题共计 6 小题, 每题 5 分, 共计 30 分)

题号	11	12	13	14	15	16
答案	$\frac{1}{16}$	$\{x x \geq 0 \text{ 且 } x \neq 1\}$	$[1, +\infty)$	$(-\infty, 4]$	8	①和③

三、解答题 (本题共计 5 小题, 共计 70 分)

17. 解: (1) 由题意知 $A = \{x|-1 \leq x < 3\}$, $B = \{x|2x-4 \geq x-2\} = \{x|x \geq 2\}$,

$$\therefore A \cap B = \{x|-1 \leq x < 3\} \cap \{x|x \geq 2\} = \{x|2 \leq x < 3\}.$$

$$\text{则 } \complement_U(A \cap B) = \{x|x < 2 \text{ 或 } x \geq 3\}. \quad \text{【6 分】}$$

$$(2) C = \{x|2x+a > 0\} = \left\{x \mid x > -\frac{a}{2}\right\},$$

由 $B \cup C = C$ 知, $B \subseteq C$,

$$\therefore -\frac{a}{2} < 2, \text{ 解得, } a > -4.$$

所以, a 的取值范围是 $(4, +\infty)$ 【12 分】

18. 解: (I) 当 $a=1$ 时, $f(x) = (x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, $x \in [0, 2]$.

在区间 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上, $f(x)$ 单调递减; 在 $\left(\frac{1}{2}, 2\right]$ 上, $f(x)$ 单调递增.

$$\text{所以, 当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4};$$

又 $f(0) = -2$, $f(2) = 0 > -2$, 所以当 $x=2$ 时, $f(x)_{\max} = 0$ 【6 分】

(II) $f(x) > 0$, 即 $(ax-2)(x+1) > 0$,

当 $a=0$ 时, 得 $-2(x+1) > 0$, $x < -1$, 解集为 $(-\infty, -1)$;

当 $a \neq 0$ 时, 由 $(ax-2)(x+1) = 0$, 得 $x_1 = \frac{2}{a}$, $x_2 = -1$,

① $a < -2$ 时, $\frac{2}{a} > -1$, 解集为 $\left(-1, \frac{2}{a}\right)$

② $-2 < a < 0$ 时, $\frac{2}{a} < -1$, 解集为 $\left(\frac{2}{a}, -1\right)$;

③ $a = -2$ 时, $\frac{2}{a} = -1$, 解集为 \emptyset ; 【14 分】

19. 解: (1) 因为 $c > 0$,

$$\text{所以 } y = \frac{920v}{v^2 + 3v + 1600} = \frac{920}{v + \frac{1600}{v} + 3} \leq \frac{920}{2\sqrt{v \cdot \frac{1600}{v}} + 3} = \frac{920}{83} \approx 11.08$$

当且仅当 $v = \frac{1600}{v}$, 即 $v = 40$ 时等号成立.

所以 $v = 40$ 千米/小时，车流量最大，最大值为 11.08 千辆/小时。【8 分】

$$(2) \text{ 据题意有: } \frac{920v}{v^2 + 3v + 1600} \geq 10,$$

化简得 $v^2 - 89v + 1600 \leq 0$,

$$\text{即 } (v - 25)(v - 64) \leq 0$$

所以 $25 \leq v \leq 64$.

所以汽车的平均速度应控制在 $25 \leq v \leq 64$ 这个范围内。【14 分】

20. 解: (1) 因为 $f(x)$ 为奇函数

$$\text{所以 } f(-x) = \frac{-ax+b}{(-x)^2+1} = -f(x) = -\frac{ax+b}{x^2+1}$$

$$\text{整理得 } -ax+b = -ax-b$$

解得 $b = 0$

$$\text{又因为 } f(1) = \frac{a}{1+1} = \frac{1}{2}$$

解得 $a = 1$

综上所述, $a = 1, b = 0$ 【5 分】

(注: 用 $f(0) = 0$ 求需检验, 否则扣 1 分)

(2) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 证明如下:

$\forall x_1, x_2 \in (0,1)$, 且 $x_1 < x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$= \frac{x_1(x_2^2+1) - x_2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2) + x_1x_2(x_2 - x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

$$\because x_1 < x_2, \therefore x_1 - x_2 < 0$$

$$\text{又 } \because \forall x_1, x_2 \in (0,1)$$

$$\therefore 0 < x_1x_2 < 1 \text{ 即 } 1 - x_1x_2 > 0$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 得证. 【11 分】

(3) 由 $f(x)$ 是奇函数,

不等式 $f(t-1) + f(t) < 0$, 即 $f(t-1) < -f(t) = f(-t)$,

又 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数,

则 $-1 \leq t-1 < -t \leq 1$,

$$\text{解得 } 0 \leq t < \frac{1}{2}.$$

所以, t 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ 【15 分】

21. 解

(1) 由于 $4-2=2$ 整除 $4+2=6$, 所以集合 P 不是集合 S 的“好子集”;

由于 $4-1=3$ 不能整除 $4+1=5$, $7-1=6$ 不能整除 $7+1=8$, $7-4=3$ 不能整除 $7+4=11$, 所以集合 Q 是集合 S 的“好子集”. 【4分】

(2) (反证) 首先, 由于 A 是 S “好子集”, 所以 $x-y \neq 1$,

假设存在 A 中的任意两个不同的元素 $x, y(x > y)$, 使得 $x-y=2$,

则 x 与 y 同为奇数或同为偶数,

从而 $x+y$ 是偶数,

此时, $x-y=2$ 能整除 $x+y$, 与 A 是 S “好子集”矛盾.

故若 A 是 S 的“好子集”, 则对于 A 中的任意两个不同的元素 $x, y(x > y)$, 都有 $x-y \geq 3$; 【9分】

(3) 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} (a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n)$ 是集合 S 的一个“好子集”,

令: $a_{i+1} - a_i = b_i, (i=1, 2, 3, \dots, n-1)$,

由(2)知 $b_i \geq 3, (i=1, 2, 3, \dots, n-1)$

于是: $a_n - a_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} \geq 3(n-1)$.

从而: $3(n-1) \leq a_n - a_1 \leq 1000 - 1 = 999$

所以: $n \leq 334$.

另一方面: 取 $A = \{1, 4, 7, \dots, 997, 1000\}$ (证明是好子集),

此时集合 A 有 334 个元素, 且是集合 S 的一个“好子集”,

故集合 S 的“好子集” A 所含元素个数的最大值为 334. 【15分】

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯