重庆市南开中学高2020级高三上周练 11月17日

数学（文科）试题

第Ⅰ卷（选择题共60分）

一、选择题（本大题共12个小题，每小题5分，共60分，每小题只有一个选项符合要求）

1．设集合$A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x\mid x^2-2x>0\}$，则$A\cap B=$(　　)

A．$\{3\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{-1,3\}$　　D．$\{0,1,2\}$

2．设$a\in R$，则“$a=0$”是“直线$l_1:ax+4y-5=0$与直线$l_2:2x+ay-a=0$垂直”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．设复数z满足$(z+2i)\cdot i=3-4i$，则复数z在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

4．已知正方形$ABCD$的边长为2，M为平面$ABCD$内一点，则$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$的最小值为(　　)

A．-4　　B．-3　　C．-2　　D．-1

5．能使圆$C:(x-1)^2+(y+2)^2=4$恰有四个点到直线$l:2x+y+m=0$距离等于1，则m的一个值为(　　)

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．3　　D．$3\sqrt{5}$

6．已知$x>0$，$y>0$，$lg4^x+lg2^y=lg8$，则$\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{4}{y}$的最小值是(　　)

A．3　　B．$\dfrac{9}{4}$　　C．$\dfrac{46}{15}$　　D．9

7．已知圆$C:x^2+y^2-2x+4y=0$关于直线$3x-2ay-11=0$对称，则圆C中以$(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a}{2})$为中点的弦长为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

8．已知实数x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ x+y-3\leqslant 0\\ y\geqslant 1\end{cases}$，则$z=2^{-2x+y}$的最大值是(　　)

A．2　　B．1　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．-1

9．已知$a>0$，函数$f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})$在$(\dfrac{\pi}{3},\pi)$上单调递减，则$\omega$的取值范围是(　　)

A．$[\dfrac{2}{3},1]$　　B．$[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}]$　　C．$[1,\dfrac{9}{8}]$　　D．$[\dfrac{1}{2},2]$

10. 在直径 AB 为 2 的圆上有长度为 1 的动弦 CD，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的取值范围是(　　)

A. $[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]$　　B. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$　　C. $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$　　D. $(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

11. 在数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=\frac{1}{4},a_2=\frac{1}{5}$，且 $a_1\cdot a_2+a_2\cdot a_3+\ldots+a_n\cdot a_{n+1}=na_1\cdot a_{n+1}$，则 $\frac{1}{a_{10}}+\frac{1}{a_{11}}+\cdots+\frac{1}{a_{84}}=$(　　)

A. 3750　　B. 3700　　C. 3650　　D. 3600

12. 已知函数 $f(x)=(k+\frac{4}{k})lnx+\frac{4-x^2}{x}$，$k\in[4，+\infty)$，曲线 $y=f(x)$ 上总存在两点 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，使曲线 $y=f(x)$ 在 M，N 两点处的切线互相平行，则 x_1+x_2 的取值范围为(　　)

A. $(\frac{8}{5},+\infty)$　　B. $(\frac{16}{5},+\infty)$　　C. $[\frac{8}{5},+\infty)$　　D. $[\frac{16}{5},+\infty)$

第Ⅱ卷(非选择题，共 90 分)

二、填空题：（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\cos(2x-\frac{\pi}{3})$ 的振幅是______.

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_{n+1}=2a_n+3^n$，$a_1=1$，则 $a_n=$_______.

15. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处有极小值 10，则 $a-b=$______.

16. 已知锐角 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 ab，c，若 $b-a=2a\cos C$，则 $\frac{\cos^2 A}{\cos(C-A)}$ 的取值范围是________.

三、解答题：(共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(一) 必考题：共 60 分，每题考生都必须在答题卡上作答.

17. 为了分析某个高三学生的学习状态．现对他前 5 次考试的数学成绩 x，物理成绩 y 进行分析．下面是该生前 5 次考试的成绩．

数学	120	118	116	122	124
物理	79	79	77	82	83

附 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$．

(1) 已知该生的物理成绩 y 与数学成绩 x 是线性相关的，求物理成绩 y 与数学成绩 x 的回归直线方程；

(2) 我们常用 R^2 来刻画回归的效果，其中 R^2 越接近于 1，表示回归效果越好．求 R^2．

(3) 已知第 6 次考试该生的数学成绩达到 132，请你估计第 6 次考试他的物理成绩大约是多少？

18．设$\{a_n\}$是等比数列，若$a_1=2$，且$2a_2$，a_3，S_3-6成等差数列．

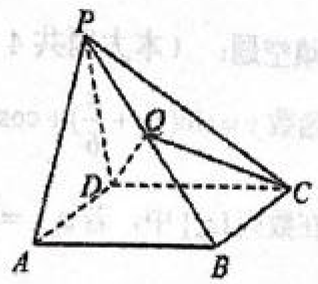
（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）当$\{a_n\}$的公比不为1时，设$a_nb_n=\dfrac{2^{n+1}}{4n^2-1}$，求证：数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n<1$．

19．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面四边形$ABCD$中，$AD//BC$，$AD=BC$，$AD=CD$，$AD\perp DC$；在ΔPAD中$PA=PD$，$\angle APD=60°$，平面$PAD\perp$平面PCD．

（1）证明：$AB\perp$平面PAD；

（2）若$AB=4$，Q为线段PB的中点，求三棱锥$Q-PCD$的体积．



20．已知椭圆$C:y^2=2px(p>0)$，点F为抛物线的焦点，焦点F到直线$3x-4y+3=0$的距离为d_1，焦点F到抛物线C的准线的距离为d_2，且$\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{3}{5}$．

（1）抛物线C的标准方程；

（2）若在x轴上存在点M，过点M的直线l分别与抛物线C相交于P、Q两点，且$\dfrac{1}{|PM|^2}+\dfrac{1}{|QM|^2}$为定值，求点$M$的坐标．

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=2a\ln x-x+\dfrac{1}{x}$.

（Ⅰ）若 $a=2$，求 $f(x)$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程;

（Ⅱ）若 $f(x)$ 对任意 $x\in(0,1]$ 均有 $f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围;

（Ⅲ）求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2\dfrac{k+1}{k}<1-\dfrac{1}{n+1}\quad(n\in N^*)$.

平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\\ y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点为极点，x 轴

为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-3=0$.

求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程;

若直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，设 $M(1,1)$，求 $\dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}$ 的值.

已知 $f(x)=|2x+2|+|x-1|$ 的最小值为 t

求 t 的值;

若实数 a，b 满足 $2a^2+2b^2=t$，求 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}$ 的最小值

重庆市南开中学高2020级高三上周练 11月17日
文科数学答案

一、选择题

1～6 CCBAAB　7～12 DCBAAB

二、填空题

13. 2　14. $a_n=\begin{cases}1 & (n=1)\\ 2^{n-1}+3^n & (n\geqslant 2)\end{cases}$　15. 15　16. $(\frac{\sqrt{2}}{2}，1)$

三、解答题

17. 解：（1）计算 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(120+118+116+122+124)=120$，

$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(79+79+77+82+83)=80$；

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{0\times(-1)+(-2)\times(-1)+(-4)\times(-3)+2\times2+4\times3}{(-1)^2+(-1)^2+(-3)^2+2^2+3^2}=\frac{3}{4}；$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=80-\frac{3}{4}\times120=-10$，

所以 y 关于 x 的线性回归方程是 $\hat{y}=\frac{3}{4}x-10$；

（2）由题意，填表得

y	79	79	77	82	83
$\hat{y}$	80	78.5	77	81.5	83

计算相关系数 $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{(-1)^2+0.5^2+0+0.5^2+0}{(-1)^2+(-1)^2+(-3)^2+2^2+3^2}=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}=0.9375$；

所以 R^2 接近于1，表示回归效果越好；

（3）第6次考试该生的数学成绩达到132，计算 $\hat{y}=\frac{3}{4}x-10=\frac{3}{4}\times132-10=89$，

预测他的物理成绩为89分．

18. 解：（1）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q；由$2a_2$，a_3，S_3-6成等差数列，$a_1=2$，

$\therefore 2a_3=2a_2+S_3-6$，即$4q^2=4q+2+2q+2q^2-6$，即$q^2-3q+2=0$，解得$q=2$，或$q=1$，

所以$\{a_n\}$的通项为$a_n=2^n$ 或$a_n=2$；

（2）证明：由（1）知$a_n=2^n$，$a_nb_n=\dfrac{2^{n+1}}{4n^2-1}$；

$\therefore b_n=\dfrac{2}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$；

$\therefore T_n=b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b_n=(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\ldots\ldots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=1-\frac{1}{2n+1}<1$，

故数列$\{a_n\}$的前n项和$T_n<1$．

19. 解：（1）证明：由$AD//BC$，$AD=BC$，$AD=CD$，$AD\perp DC$可知，四边形$ABCD$为正方形，

在ΔPAD中，$PA=PD$，$\angle APD=60°$，$\therefore \Delta PAD$为等边三角形．

取PD的中点O，连接AO，

$\because \Delta PAD$为等边三角形，$\therefore AO\perp PD$，

又$\because AO\subset$平面PAD，平面$PAD\cap$平面$PCD=PD$，$\therefore AO\perp$平面PCD，

$\because CD\subset$平面PCD，$\therefore AO\perp CD$，

$\because CD\perp AD$，且$AO\cap AD=A$，$\therefore CD\perp$平面PAD，

$\because AB//CD$，$\therefore AB\perp$平面PAD；

（2）由（1）得$AO\perp$平面PCD，$\therefore A$到平面PCD的距离$d=AO=2\sqrt{3}$，

$\because$底面$ABCD$为正方形，$\therefore AB//CD$，

又$\because AB\not\subset$平面PCD，$\therefore AB//$平面PCD，

$\therefore A$，B两点到平面PCD的距离相等，均为d，

又Q为线段PB的中点，$\therefore Q$到平面PCD的距离$h=\dfrac{d}{2}=\sqrt{3}$，

由（1）知，$CD\perp$平面PAD，

$\because PD\subset$平面PAD，$\therefore CD\perp PD$，

$V_{Q-PCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta PCD}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times4\times\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$．

20. 解：(1) 由题意可得，焦点 $F(\frac{p}{2},0)$，则 $d_1=\dfrac{\frac{3p}{2}+6}{5}=\dfrac{3p+6}{10}$，$d_2=p$．

又 $\dfrac{\frac{3p+6}{10}}{p}=\dfrac{3}{5}$，解得：$p=2$．抛物线 C 的标准方程：$y^2=4x$；

(2) 设 $M(t,0)$，设点 M，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，显然直线 l 的斜率不为 0，

设直线 l 的方程为 $x=my+t$．

联立方程 $\begin{cases}x=my+t\\ y^2=4x\end{cases}$，整理可得 $y^2-4my-4t=0$．

$\triangle=16(m^2+t)>0$，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4t$，

$|PM|=\sqrt{1+m^2}|y_1|$，$|QM|=\sqrt{1+m^2}|y_2|$，

$\dfrac{1}{|PM|^2}+\dfrac{1}{|QM|^2}=\dfrac{1}{(1+m^2)y_1^2}+\dfrac{1}{(1+m^2)y_2^2}=\dfrac{y_1^2+y_2^2}{(1+m^2)y_1^2y_2^2}=\dfrac{16m^2+8t}{16(1+m^2)t^2}=\dfrac{t+2m^2}{2(1+m^2)t^2}=\dfrac{2m^2+t}{2t^2m^2+2t^2}$，

要使 $\dfrac{1}{|PM|^2}+\dfrac{1}{|QM|^2}$ 为定值，必有 $\dfrac{2}{2t^2}=\dfrac{t}{2t^2}$，解得 $t=2$，

$\therefore \dfrac{1}{|PM|^2}+\dfrac{1}{|QM|^2}$ 为定值时，点 M 的坐标为 $(2,0)$．

21. 解：$f'(x)=\dfrac{2a}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{-x^2+2ax-1}{x^2}$

(1) 当 $a=2$ 时 $k=f'(1)=2$ 且 $f(1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=2x-2$

(2) 由 $f'(x)=\dfrac{2a}{x}-1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{-x^2+2ax-1}{x^2}(x>0)$，考查 $g(x)=-x^2+2ax-1$，

$g(1)=2a-2,\Delta=4a^2-4$，故当 $a\le1$ 时，$g(x)\le0$ 在 $x\in(0,1]$ 恒成立，所以 $f'(x)\le0$，即 $f(x)$ 在 $x\in(0,1]$ 单调递减，$\therefore f(x)\ge f(1)=0$，故符合题意；

当 $a>1$ 时，$g(0)<0,g(1)>0\therefore\exists x_0\in(0,1]$ 使得 $g(x_0)=0$，即当 $x\in(x_0,1]$ 时 $g(x)>0\therefore f'(x)>0\therefore f(x)\le f(1)=0$ 不符合题意。

故所求实数 a 的取值范围是 $a\le1$

(3) 由 (2) 知当 $a=1$ 时，$2\ln x-x+\dfrac{1}{x}\ge0,x\in(0,1]$，则易知 $x\in[1,+\infty)$ 时

$2\ln x-x+\dfrac{1}{x}\le0$, 即 $\ln\sqrt{x}\le\dfrac{1}{2}(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})\therefore\ln^2\sqrt{x}\le\dfrac{1}{4}(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^2$，

即$\ln^2 x \le x+\frac{1}{x}-2$，令$x=\frac{k+1}{k}$可得：$\ln^2\frac{k+1}{k}\le\frac{k+1}{k}+\frac{k}{k+1}-2=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

从而取$k=1,2,\cdots n$并相加可得：

$\sum_{k=1}^{n}\ln^2\frac{k+1}{k}<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$，故原不等式得证。

22. 解：(1) 曲线C的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta-3=0$．转换为直角坐标方程为$x^2+y^2-2x-3=0$．

直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\\y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$为参数）．转换为直角坐标方程为$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-1=0$．

(2) 直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\\y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$为参数）．转换为标准式为$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t\\y=1-\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数）．

故把直线的参数方程$\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t\\y=1-\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$代入圆的方程$x^2+y^2-2x-3=0$，

整理得，$t^2-\sqrt{3}t-3=0$，（t_1和t_2为A、B对应的参数）．所以$t_1+t_2=\sqrt{3}$，$t_1\cdot t_2=-3$，

所以$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{|MA|+|MB|}{|MA\cdot MB|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1\cdot t_2|}=5$．

23. 解（1）$f(x)=|2x+2|+|x-1|=\begin{cases}3x+1, x\geqslant1\\x+3,-1<x<1\\-3x-1, x\leqslant-1\end{cases}$，

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增，$\therefore f(x)_{min}=f(-1)=2$，$\therefore t=2$；

(2) 由（1）可知$2a^2+2b^2=2$，则$a^2+b^2=1$，

$\therefore\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}=(\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2})(a^2+b^2)=5+\frac{b^2}{a^2}+\frac{4a^2}{b^2}\geqslant5+2\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{4a^2}{b^2}}=9$，

当且仅当$\frac{b^2}{a^2}=\frac{4a^2}{b^2}$，即$a^2=\frac{1}{3}$，$b^2=\frac{2}{3}$时取等号，故$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}$的最小值为9.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 20 万+。

北京高考在线_2020 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao