高三新高考备考监测联考
数　学

考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分. 考试时间120分钟.
2. 请将各题答案填写在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容：集合与常用逻辑用语，函数与导数，三角函数与解三角形，平面向量，数列.

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共13小题，每小题4分，共52分. 在每小题给出的四个选项中，第1～10题只有一项符合题目要求；第11～13题，有多项符合题目要求，全部选对的得4分，选对但不全的得2分，有选错的不得分.

1. 若集合 $M=\{x|-1<2-x\leqslant 1\}$，$N=\{x|x^2-6x+8<0\}$，则 $M\cup N=$

A. $(2,3]$　　B. $(2,3)$　　C. $[1,4)$　　D. $(1,4)$

2. 若 $\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BC}=(1,0)$，则 $\overrightarrow{AB}=$

A. $(2,2)$　　B. $(2,0)$　　C. $(0,2)$　　D. $(0,-2)$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{3-3^{-x}}+\ln|x|$ 的定义域为

A. $[-1,+\infty)$　　B. $[-1,0)\cup(0,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-1,0)\cup(0,+\infty)$

4. 若 $\{a_n\}$ 是首项为1的等比数列，则“$\frac{a_8}{a_6}>9$”是“$a_2>3$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知两个单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 60°，向量 $\boldsymbol{m}=5\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，则 $|\boldsymbol{m}|=$

A. $\sqrt{19}$　　B. $\sqrt{21}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 7

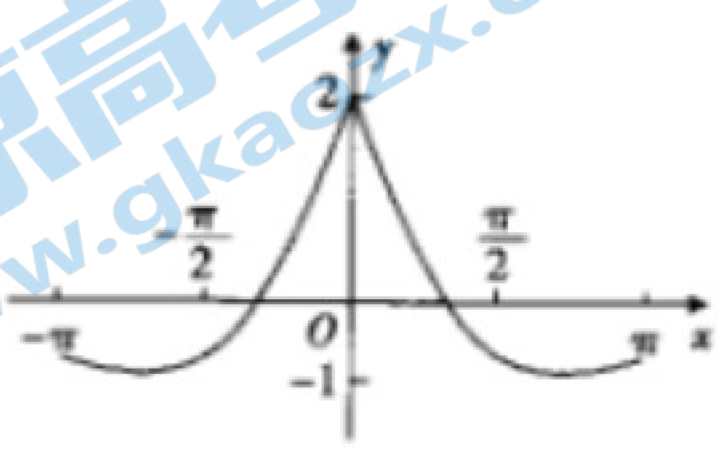
6. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC=3$，$AB=4$，$BC=6$，则 $\triangle ABC$ 的最大内角的余弦值为

A. $\frac{43}{48}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{7}{12}$　　D. $-\frac{11}{24}$

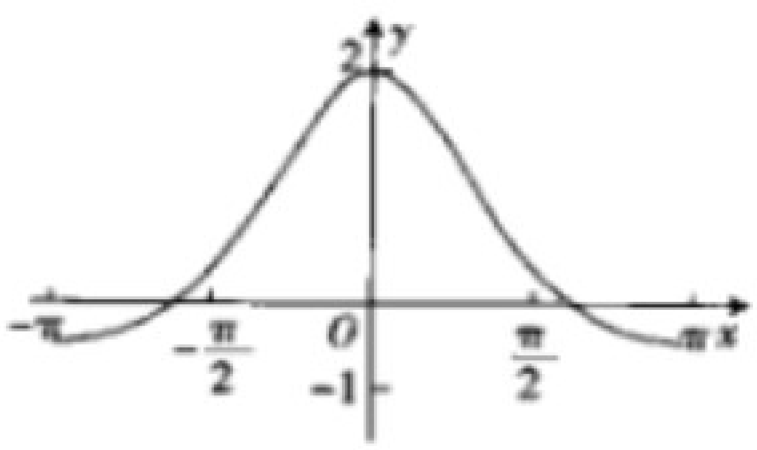
7. 已知 $\cos 27^\circ\approx 0.891$，则 $\sqrt{2}(\cos 72^\circ+\cos 18^\circ)$ 的近似值为

A. 1.77　　B. 1.78　　C. 1.79　　D. 1.81

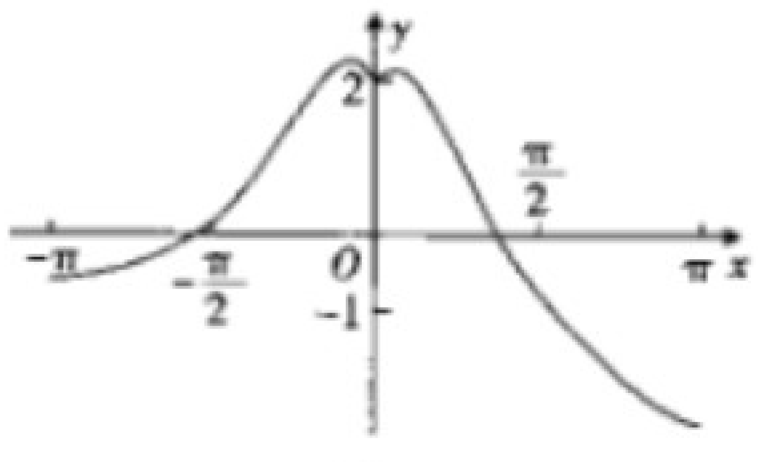
8. 函数 $f(x)=\frac{2\cos x-x^2}{e^{|x|}}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的图象大致为



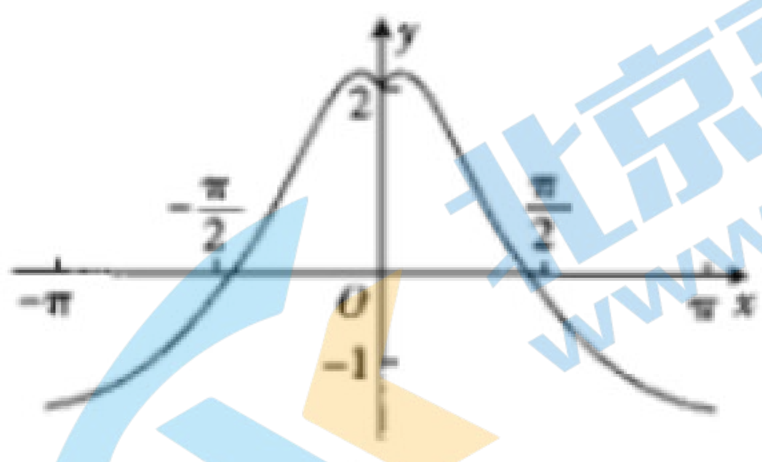
A



B



C



D

9. 将曲线 $y=2\sin(4x+\frac{\pi}{5})$ 上的每个点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变),再将所得曲线关于 y 轴对称,最后得到的曲线的对称轴方程为

A. $x=\frac{3\pi}{80}+\frac{k\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$　　B. $x=-\frac{3\pi}{80}+\frac{k\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$

C. $x=\frac{3\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$　　D. $x=-\frac{3\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

10. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(2-x)$,且 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称,当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$f(x)=2x+\log_3(4x+3)$,则 $f(\frac{1609}{2})=$

A. -4　　B. 4　　C. -5　　D. 5

11. 下列有四个关于命题的判断,其中正确的是

A. 命题"$\exists x_0\in(0,+\infty),3x_0+\cos x_0<1$"是假命题

B. 命题"若 $xy\neq 100$,则 $x\neq 4$ 或 $y\neq 25$"是真命题

C. 命题"$\forall x\in\mathbf{N},\lg(x+1)>0$"的否定是"$\exists x_0\notin\mathbf{N},\lg(x_0+1)>0$"

D. 命题"在$\triangle ABC$ 中,若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}<0$,则$\triangle ABC$ 是钝角三角形"是真命题

12. 已知函数 $f(x)=\frac{\sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x}{\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x}$,则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π　　B. $f(x)$ 的最大值为 2

C. $f(x)$ 的值域为 $(-2,2)$　　D. $f(x)$ 的图象关于 $(-\frac{\pi}{12},0)$ 对称

13. 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2(a<0)$ 在 $(\frac{a}{2},\frac{a+6}{3})$ 上有最大值,则 a 的取值可能为

A. -6　　B. -5　　C. -4　　D. -3

第Ⅱ卷

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2\lg x,x>0,\\(\frac{1}{4})^x,x<0,\end{cases}$ 则 $f(-f(10))=$ ▲ .

15. 直线 $2y+1=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 在 $(-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$ 上的交点的个数为 ▲ .

16. 张军自主创业,在网上经营一家干果店,销售的干果中有松子、开心果、腰果、核桃,价格依次为 120 元/千克、80 元/千克、70 元/千克、40 元/千克,为增加销量,张军对这四种干果进行促销:一次购买干果的总价达到 150 元,顾客就少付 $x(2x\in\mathbf{Z})$元. 每笔订单顾客网上支付成功后,张军会得到支付款的 80%.

①若顾客一次购买松子和腰果各 1 千克,需要支付 180 元,则 $x=$ ▲ ;

②在促销活动中，为保证张军每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为____▲____.（本题每空 2 分）

17.《九章算术》"竹九节"问题：现有一根 9 节的竹子，自上而下各节的容积成等差数列，上面 4 节的容积共 3 升，下面 3 节的容积共 4 升，则自上而下的第 1 节的容积为____▲____，这 9 节竹子的总容积为____▲____.（本题每空 2 分）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 82 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

18.（12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $A=30^\circ$，$a=8$，$b=8\sqrt{3}$.

(1)求 $\tan B$；

(2)若 $\triangle ABC$ 不是直角三角形，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19.（12 分）

已知函数 $f(x)=x-ae^{ax}(a>0)$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2)若 $f(x)<0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

20.（14 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $2S_n=3a_n-1$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=\dfrac{3^n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n，并比较 T_n 与 $\dfrac{13}{16}$ 的大小.

21.（14 分）

将函数 $g(x)=4\sin x\cos(x+\frac{\pi}{6})$的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$个单位长度后得到 $f(x)$的图象.

(1)若 $f(x)$为偶函数，$\tan\alpha>2$，求 $f(\alpha)$的取值范围；

(2)若 $f(x)$在$(\pi,\frac{7\pi}{6})$上是单调函数，求 φ 的取值范围.

22.（15 分）

已知函数 $f(x)=x(1-\sin x)$.

(1)求函数 $f(\pi x)$在$(-20,20)$上的零点之和；

(2)证明：$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上只有 1 个极值点.

23.（15 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-x+2a^2\ln x(a\neq0)$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $f(x)$存在两个极值点 x_1,x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

高三新高考备考监测联考
数学参考答案

1. C 【解析】本题考查集合的并集与一元二次不等式的解法，考查运算求解能力.
$\because M=[1,3),N=(2,4),\therefore M\cup N=[1,4)$.

2. C 【解析】本题考查平面向量的线性运算，考查运算求解能力.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=(0,2)$.

3. B 【解析】本题考查函数的定义域，考查运算求解能力.
$\because\begin{cases}3-3^{-x}\geqslant 0,\\ |x|>0,\end{cases}\therefore x\in[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

4. B 【解析】本题考查充分条件、必要条件，考查推理论证能力.
若$\frac{a_8}{a_6}>9$，则$q^2>9$，则$a_2=q<-3$或$a_2>3$；若$a_2=q>3$，则$\frac{a_8}{a_6}=q^2>9$. 故选 B.

5. A 【解析】本题考查平面向量的数量积与模，考查运算求解能力.
$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{(5\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)^2}=\sqrt{25-20\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4}=\sqrt{29-20\times\frac{1}{2}}=\sqrt{19}$.

6. D 【解析】本题考查余弦定理的应用，考查运算求解能力.
因为BC边最长，所以A最大，且$\cos A=\frac{9+16-36}{2\times3\times4}=-\frac{11}{24}$.

7. B 【解析】本题考查三角恒等变换，考查运算求解能力.
$\cos 72^\circ+\cos 18^\circ=\sin 18^\circ+\cos 18^\circ=\sqrt{2}\sin(18^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin 63^\circ=\sqrt{2}\cos 27^\circ$，
$\sqrt{2}(\cos 72^\circ+\cos 18^\circ)\approx 2\times0.891=1.782$，所以$\sqrt{2}(\cos 72^\circ+\cos 18^\circ)$的近似值为 1.78.

8. A 【解析】本题考查函数图象的识别，考查推理论证能力.
易知$f(x)$为偶函数，排除 C. 因为$f(\frac{\pi}{2})<0$，$f(\pi)=-\frac{2+\pi^2}{e^\pi}>-\frac{2+\pi^2}{e^3}>-1$，所以排除 B，D，故选 A.

9. D 【解析】本题考查三角函数图象的周期变换与对称性，考查运算求解能力.
将曲线$y=2\sin(4x+\frac{\pi}{5})$上的每个点的横坐标伸长为原来的 2 倍后得到曲线$y=2\sin(2x+\frac{\pi}{5})$，再将所得曲线关于$y$轴对称，得到曲线$y=2\sin(-2x+\frac{\pi}{5})$，令$-2x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得$x=-\frac{3\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

10. C 【解析】本题考查函数的对称性与周期性，考查推理论证能力与抽象概括能力.
因为$f(x)$的图象关于点$(3,0)$对称，所以$f(x)+f(6-x)=0$. 又$f(x)=f(2-x)$，所以$f(2-x)+f(6-x)=0$，所以$f(x)=-f(x+4)$，则$f(x)=f(x+8)$，所以$f(\frac{1609}{2})=f(\frac{9}{2}+100\times8)=f(\frac{9}{2})$. 因为$f(\frac{9}{2})+f(6-\frac{9}{2})=0$，$f(\frac{9}{2})=-f(\frac{3}{2})=-(3+\log_3 9)=-5$，所以$f(\frac{1609}{2})=-5$.

11. AB 【解析】本题考查命题的否定与命题真假的判断，考查推理论证能力.
设$f(x)=3x+\cos x(x>0)$，则$f'(x)=3-\sin x>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)>f(0)=1$，从而命题"$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$3x_0+\cos x_0<1$"是假命题.
若$x=4$且$y=25$，则$xy=100$，所以命题"若$xy\neq100$，则$x\neq4$或$y\neq25$"是真命题.
易知选项 C 是错误的. 在$\triangle ABC$中，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}<0$，则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$，则$B$为锐角，从而不能判断$\triangle ABC$是钝角三角形，所以选项 D 也是错误的.

12. ACD 【解析】本题考查三角恒等变换及三角函数图象的性质，考查运算求解能力.
$\because f(x)=\frac{2\sin(4x+\frac{\pi}{3})}{-2\cos(2x+\frac{\pi}{6})}=-2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，$\cos(2x+\frac{\pi}{6})\neq0$，
当且仅当$\cos(2x+\frac{\pi}{6})=0$时，$|\sin(2x+\frac{\pi}{6})|=1$，$\therefore f(x)$的值域为$(-2,2)$，

$f(x)$的最小正周期为 π，$f(x)$的图象关于$(-\frac{\pi}{12},0)$对称.

13. ABC 【解析】本题考查导数的综合应用，考查化归与转化的数学思想及运算求解能力.

令 $f'(x)=2x(3x-a)$，得 $x_1=0,x_2=\frac{a}{3}(a<0)$，

当$\frac{a}{3}<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<\frac{a}{3}$ 或 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

从而 $f(x)$在 $x=\frac{a}{3}$处取得极大值 $f(\frac{a}{3})=-\frac{a^3}{27}$.

由 $f(x)=-\frac{a^3}{27}$，得$(x-\frac{a}{3})^2(2x+\frac{a}{3})=0$，解得 $x=\frac{a}{3}$或 $x=-\frac{a}{6}$.

$\because f(x)$在$(\frac{a}{2},\frac{a+6}{3})$上有最大值，$\therefore \frac{a}{3}<\frac{a+6}{3}\leqslant-\frac{a}{6}$，$\therefore a\leqslant-4$.

14. 16 【解析】本题考查分段函数求值，考查运算求解能力.

$f(-f(10))=f(-2)=4^2=16$.

15. 3 【解析】本题考查三角函数的图象及函数与方程，考查数形结合的数学方法.

$\because \cos(-\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}<-\frac{1}{2}$，$\therefore$直线 $2y+1=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 在$(-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$上有 3 个交点.

16. 10；18.5 【解析】本题考查数学在生活中的实际应用，考查数学建模的数学核心素养.

顾客一次购买松子和腰果各 1 千克，需要支付 $120+70-x=180$ 元，则 $x=10$.

设顾客一次购买干果的总价为 M 元，当 $0<M<150$ 时，张军每笔订单得到的金额显然不低于促销前总价的七折. 当 $M\geqslant150$ 时，$0.8(M-x)\geqslant0.7M$，即 $M\geqslant8x$ 对 $M\geqslant150$ 恒成立，则 $8x\leqslant150$，$x\leqslant18.75$，又 $2x\in\mathbf{Z}$，所以 x 的最大值为 18.5.

17. $\frac{13}{22}$升；$\frac{201}{22}$升 【解析】本题考查数学文化与等差数列，考查运算求解能力与应用意识.

将自上而下各节竹子的容积分别记为 $a_1,a_2,\cdots,a_9$，

依题意可得 $a_1+a_2+a_3+a_4=3,a_7+a_8+a_9=4$，

即 $4a_1+6d=3$①，$3a_1+21d=4$②，②×4－①×3，得 $66d=7$，解得 $d=\frac{7}{66}$，

把 $d=\frac{7}{66}$代入①，得 $a_1=\frac{13}{22}$，$S_9=9a_5=9\times\frac{67}{66}=\frac{201}{22}$升.

18. 解：(1)由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，…… 3 分

则 $B=60°$或 $120°$，…… 5 分

故 $\tan B=\pm\sqrt{3}$. …… 6 分

(2)由(1)知，当 $A=30°,B=60°,C=90°$时，此时$\triangle ABC$是直角三角形；…… 8 分

当 $A=30°,B=120°,C=30°$时，此时$\triangle ABC$不是直角三角形. …… 10 分

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times8\times8\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=16\sqrt{3}$. …… 12 分

19. 解：(1)$f'(x)=1-a^2e^{ax}$，…… 1 分

所以 $f'(0)=1-a^2$. …… 2 分

又 $f(0)=-a$，所以曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为 $y+a=(1-a^2)x$，

即 $y=(1-a^2)x-a$. …… 5 分

(2)因为 $a>0$，所以 $a^2>0$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{2\ln a}{a}$； …… 6 分

令 $f'(x)>0$，得 $x<-\frac{2\ln a}{a}$；…… 7 分

令 $f'(x)<0$，得 $x>-\frac{2\ln a}{a}$. …… 8 分

所以 $f(x)_{\max}=f(-\frac{2\ln a}{a})=-\frac{2\ln a+1}{a}$. …… 10 分

因为 $f(x)<0$ 恒成立，所以 $-\frac{2\ln a+1}{a}<0$，因为 $a>0$，所以 $a>e^{-\frac{1}{2}}$，

故 a 的取值范围为 $(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为 $2S_n=3a_n-1$，所以 $2S_1=2a_1=3a_1-1$，即 $a_1=1$. ……………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=3a_{n-1}-1$，则 $2S_n-2S_{n-1}=2a_n=3a_n-3a_{n-1}$，……………………… 3 分

整理得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=3(n\geqslant 2)$，……………………………………………… 4 分

则数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，……………………………… 5 分

故 $a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$. ……………………………………………… 6 分

(2)因为 $b_n=\frac{3^n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，所以 $b_n=\frac{3^n}{(3^{n-1}+1)(3^n+1)}=\frac{3}{2}\times(\frac{1}{3^{n-1}+1}-\frac{1}{3^n+1})$，……………… 9 分

所以 $T_n=\frac{3}{2}\times[(\frac{1}{3^0+1}-\frac{1}{3^1+1})+(\frac{1}{3^1+1}-\frac{1}{3^2+1})+(\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{3^3+1})+\cdots+(\frac{1}{3^{n-1}+1}-\frac{1}{3^n+1})]$，……………………………………………… 11 分

即 $T_n=\frac{3}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^n+1})=\frac{3}{4}-\frac{3}{2\times 3^n+2}$. ……………………………… 12 分

因为 $T_n<\frac{3}{4}<\frac{13}{16}$，所以 $T_n<\frac{13}{16}$. ……………………………………… 14 分

21. 解：(1)∵ $g(x)=4\sin x(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x)=\sqrt{3}\sin 2x-(1-\cos 2x)$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})-1$，……………………………………………… 3 分

∴ $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6}+2\varphi)-1$. ……………………………………… 4 分

又 $f(x)$ 为偶函数，则 $\frac{\pi}{6}+2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，∵ $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，∴ $\varphi=\frac{\pi}{6}$，……………… 5 分

∴ $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{2})-1=2\cos 2x-1=\frac{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\cos^2 x+\sin^2 x}-1=\frac{2(1-\tan^2 x)}{1+\tan^2 x}-1$. ………… 6 分

∵ $\tan\alpha>2$，∴ $f(\alpha)=\frac{4}{1+\tan^2\alpha}-3<\frac{4}{1+2^2}-3=-\frac{11}{5}$，……………………………… 7 分

又 $f(\alpha)=\frac{4}{1+\tan^2\alpha}-3>-3$，∴ $f(\alpha)$ 的取值范围为 $(-3,-\frac{11}{5})$. ……………………… 8 分

(2)∵ $x\in(\pi,\frac{7\pi}{6})$，∴ $2x+\frac{\pi}{6}+2\varphi\in(2\pi+\frac{\pi}{6}+2\varphi,2\pi+\frac{\pi}{2}+2\varphi)$. ……………………… 9 分

∵ $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，∴ $\frac{\pi}{6}+2\varphi\in(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$，$\frac{\pi}{2}+2\varphi\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$. ……………………………… 10 分

∵ $f(x)$ 在 $(\pi,\frac{7\pi}{6})$ 上是单调函数，∴ $\begin{cases}\frac{\pi}{6}+2\varphi\geqslant\frac{\pi}{2},\\ 0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ ……………………………… 12 分

∴ $\varphi\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$. ……………………………………………… 14 分

22. (1)解：令 $f(\pi x)=\pi x(1-\sin\pi x)=0$，得 $x=0$ 或 $\sin\pi x=1$，……………………………… 2 分

即 $x=0$ 或 $\pi x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=0$ 或 $x=\frac{1}{2}+2k(k\in\mathbf{Z})$，……………………… 4 分

所以 $f(\pi x)$ 在 $(-20,20)$ 上的零点之和为 $-\frac{39}{2}-\frac{35}{2}-\frac{31}{2}-\cdots-\frac{3}{2}+0+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{37}{2}$

$=\frac{(-\frac{39}{2}+\frac{37}{2})\times 20}{2}=-10$. ……………………………………………… 7 分

(2)证明：设 $g(x)=f'(x)$，$g'(x)=x\sin x-2\cos x$，

$h(x)=g'(x)$，$h'(x)=x\cos x+3\sin x$，……………………………………………… 8 分

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$h'(x)>0$，则 $h(x)=g'(x)$为增函数. ………………………………………… 9 分

因为 $g'(0)=-2<0$，$g'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}>0$，所以$\exists m\in(0,\frac{\pi}{2})$，$g'(m)=0$， ………………… 10 分

所以当 $x\in(0,m)$时，$g'(x)<0$；当 $x\in(m,\frac{\pi}{2})$时，$g'(x)>0$， ………………………………… 11 分

从而 $g(x)$在$(0,m)$上单调递减，在$(m,\frac{\pi}{2})$上单调递增.

又 $g(0)=1>0$，$g(\frac{\pi}{2})=0$，所以必存在唯一的 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g(x_0)=0$， ………………… 13 分

当 $x\in(0,x_0)$时，$g(x)>0$；当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$时，$g(x)<0$. …………………………………… 14 分

故 $f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上只有 1 个极值点 x_0. ………………………………………………………… 15 分

23.(1)解：$f'(x)=ax-1+\frac{2a^2}{x}=\frac{ax^2-x+2a^2}{x}$，$x\in(0,+\infty)$. ………………………………… 1 分

设 $p(x)=ax^2-x+2a^2(x>0)$，$\Delta=1-8a^3$，

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$时，$\Delta\leqslant0$，$p(x)\geqslant0$，则 $f'(x)\geqslant0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ………………… 3 分

当 $0<a<\frac{1}{2}$时，$\Delta>0$，$p(x)$的零点为 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1-8a^3}}{2a}$，且 $0<x_1<x_2$，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$，所以 $f(x)$在$(0,\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a})$，$(\frac{1+\sqrt{1-8a^3}}{2a},+\infty)$上单调递增；…
…… 5 分

令 $f'(x)<0$，得 $x_1<x<x_2$，所以 $f(x)$在$(\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a},\frac{1+\sqrt{1-8a^3}}{2a})$上单调递减. ……………… 6 分

当 $a<0$ 时，$\Delta>0$，$p(x)$的零点为$\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a}$，$f(x)$在$(0,\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a})$上单调递增，

在$(\frac{1-\sqrt{1-8a^3}}{2a},+\infty)$上单调递减. ………………………………………………………… 7 分

(2)证明：由(1)知，当 $0<a<\frac{1}{2}$时，$f(x)$存在两个极值点. ……………………………………… 8 分

不妨假设 $0<x_1<x_2$，则 $x_1+x_2=\frac{1}{a}$. ……………………………………………………………… 9 分

要证$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，只需证 $f(x_1)-f(x_2)>\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}$， ……………… 10 分

只需证$\frac{1}{2}(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)-2]+2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}=-\frac{1}{2}(x_1-x_2)+2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}$， ……………… 11 分

即证 $2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>\frac{1}{2}(x_1-x_2)$. ………………………………………………………… 12 分

设 $t=\frac{x_1}{x_2}(0<t<1)$，设函数 $g(t)=2a^2\ln t-t+\frac{1}{t}$，$g'(t)=-\frac{t^2-2a^2t+1}{t^2}$，

因为 $\Delta'=4a^4-4<0$，所以 $t^2-2a^2t+1>0$，$g'(t)<0$， ……………………………………………… 13 分

所以 $g(t)$在$(0,1)$上单调递减，则 $g(t)>g(1)=0$. ………………………………………………… 14 分

又$\frac{1}{2}(x_1-x_2)<0$，则 $g(t)>0>\frac{1}{2}(x_1-x_2)$，则 $2a^2\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}>\frac{1}{2}(x_1-x_2)$，

从而$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$. ……………………………………………………………… 15 分