2023 北京石景山高二（下）期末

数　　学

本试卷共 8 页，共 100 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 设集合 $A=\{x|-2<x<4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2. 设函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$,则 $f(x)$（　）

A. 是奇函数，且在(0,+∞)单调递增　　B. 是奇函数，且在(0,+∞)单调递减

C. 是偶函数，且在(0,+∞)单调递增　　D. 是偶函数，且在(0,+∞)单调递减

3. 某一批花生种子，如果每 1 粒发芽的概率为 $\dfrac{4}{5}$，那么播下 4 粒种子恰有 2 粒发芽的概率是

A. $\dfrac{16}{625}$　　B. $\dfrac{96}{625}$　　C. $\dfrac{192}{625}$　　D. $\dfrac{256}{625}$

4. 若 $(x-2)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$（　）

A. -32　　B. -31　　C. 31　　D. 32

5. 设 $x\in R$，则“$|x-2|<1$”是“$x^2+x-2>0$”的（　）

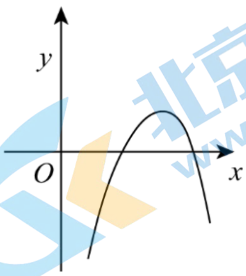
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

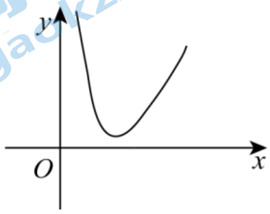
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

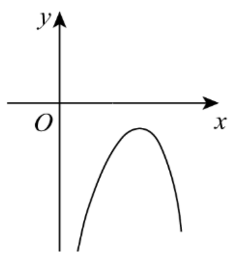
6. 某班级要从 4 名男士、2 名女生中选派 4 人参加某次社区服务，如果要求至少有 1 名女生，那么不同的选派方案种数为

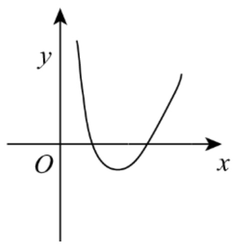
A. 14　　B. 24　　C. 28　　D. 48

7. 函数 $g(x)=-x^2+2\ln x$ 的图象大致是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

8. 设$\{a_n\}$是等差数列.下列结论中正确的是

A. 若$a_1+a_2>0$，则$a_2+a_3>0$　　B. 若$a_1+a_3<0$，则$a_1+a_2<0$

C. 若$0<a_1<a_2$，则$a_2>\sqrt{a_1a_3}$　　D. 若$a_1<0$，则$(a_2-a_1)(a_2-a_3)>0$

9. 设$a\neq 0$，若$x=a$为函数$f(x)=a(x-a)^2(x-b)$的极大值点，则（　）

A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $ab<a^2$　　D. $ab>a^2$

10. 若集合$\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$，且下列四个关系：①$a=1$；②$b\neq 1$；③$c=2$；④$d\neq 4$有且只有一个是正确的，则符合条件的有序数组(a,b,c,d)的个数是（　）

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

第二部分（非选择题 共60分）

二、填空题共5小题，每小题4分，共20分.

11. 已知$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(A)=\frac{3}{5}$，则$P(B|A)$等于______.

12. 设函数$f(x)=\begin{cases}2^{x-1}, x<1\\ x^{\frac{1}{2}}, x\geq 1\end{cases}$，则使得$f(x)\leq 2$成立的$x$的取值范围是________.

13. 若随机变量X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	a

则$a=$______，$D(X)$为随机变量X的方差，则$D(X)=$______.（用数字作答）

14. 二项式$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$$(n\in \mathbf{N}^*)$的展开式中存在常数项，则$n$可以为______.（只需写出一个符合条件的值即可）

15. 已知数列$\{a_n\}$各项均为正数，其前n项和S_n满足$a_n\cdot S_n=9(n=1,2,\cdots)$. 给出下列四个结论：

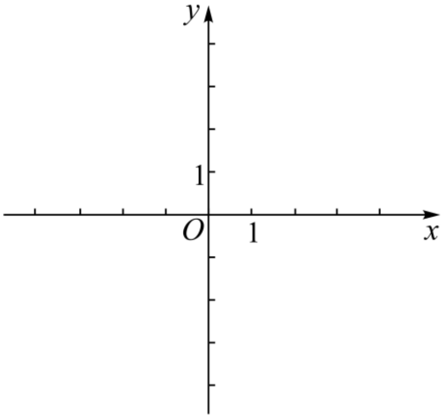
①$\{a_n\}$的第2项小于3；　②$\{a_n\}$为等比数列；

③$\{a_n\}$为递减数列；　④$\{a_n\}$中存在小于$\frac{1}{100}$的项.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共5小题，共40分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 已知函数$f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$



(用黑色签字笔作图)

（1）判断函数 $f\left(x\right)$ 的单调性，并求出 $f\left(x\right)$ 的极值；

（2）在给定的直角坐标系中画出函数 $y=f\left(x\right)$ 的大致图像；

（3）讨论关于 x 的方程 $f\left(x\right)-a=0\left(a\in\mathbf{R}\right)$ 的实根个数.

17. 已知公差不为 0 的等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n， $S_3=18$，且 a_1， a_2， a_4 成等比数列.

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. 某同学参加甲、乙、丙 3 门课程的考试，设该同学在这 3 门课程的考试中取得优秀成绩的概率分别为 $\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}$，且不同课程是否取得优秀成绩相互独立.

（1）求该同学这 3 门课程均未取得优秀成绩的概率.

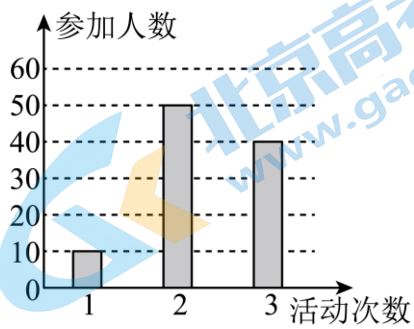
（2）求该同学取得优秀成绩的课程数 X 的分布列和期望.

19. 设 $x>0$， $f\left(x\right)=\ln x$， $g\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x}$.

（1）分别求函数 $f\left(x\right)$， $g\left(x\right)$ 在点 $\left(1,0\right)$ 处的切线方程；

（2）判断 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 的大小关系，并加以证明.

20. 某中学号召学生在今年春节期间至少参加一次社会公益活动（以下简称活动）．该校合唱团共有 100 名学生，他们参加活动的次数统计如图所示.



（I）求合唱团学生参加活动的人均次数；

（II）从合唱团中任意选两名学生，求他们参加活动次数恰好相等的概率．

（III）从合唱团中任选两名学生，用ξ表示这两人参加活动次数之差的绝对值，求随机变量ξ的分布列及数学期望$E\xi$．

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】B

【分析】利用交集的定义可求 $A\cap B$.

【详解】由题设有 $A\cap B=\{2,3\}$，

故选：B.

2.【答案】A

【分析】根据函数的解析式可知函数的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，利用定义可得出函数 $f(x)$ 为奇函数，再根据函数的单调性法则，即可解出．

【详解】因为函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$ 定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，其关于原点对称，而 $f(-x)=-f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 为奇函数．

又因为函数 $y=x^3$ 在 $0,+\infty$ 上单调递增，在 $-\infty,0$ 上单调递增，

而 $y=\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}$ 在 $0,+\infty$ 上单调递减，在 $-\infty,0$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$ 在 $0,+\infty$ 上单调递增，在 $-\infty,0$ 上单调递增．

故选：A．

【点睛】本题主要考查利用函数的解析式研究函数的性质，属于基础题．

3.【答案】B

【详解】解：根据题意，播下 4 粒种子恰有 2 粒发芽即 4 次独立重复事件恰好发生 2 次，

由 n 次独立重复事件恰好发生 k 次的概率的公式可得，

$$P_4(2)=C_4^2(\frac{4}{5})^2(\frac{1}{5})^2=\frac{96}{625}$$

故选 B.

4.【答案】C

【分析】利用赋值法可求出结果.

【详解】在 $(x-2)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 中，

令 $x=1$，得 $-1=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$，

令 $x=0$，得 $-32=a_0$，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1+32=31$.

故选：C

5.【答案】A

【分析】求绝对值不等式、一元二次不等式的解集，根据解集的包含关系即可判断充分、必要关系.

【详解】由 $|x-2|<1$，可得 $1<x<3$，即 $x\in(1,3)$；

由 $x^2+x-2=(x-1)(x+2)>0$，可得 $x<-2$ 或 $x>1$，即 $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$；

$\therefore (1,3)$ 是 $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ 的真子集，

故"$|x-2|<1$"是"$x^2+x-2>0$"的充分而不必要条件.

故选：A

6.【答案】A

【详解】法一：4 人中至少有 1 名女生包括 1 女 3 男及 2 女 2 男两种情况，

故不同的选派方案种数为 $C_2^1\cdot C_4^3+C_2^2\cdot C_4^2=14$. 故选 A.

法二：从 4 男 2 女中选 4 人共有 C_6^4 种选法，4 名都是男生的选法有 C_4^4 种，

故至少有 1 名女生的选派方案种数为 C_6^4-C_4^4=15-1=14. 故选 A

7.【答案】C

【详解】试题分析：由题：$g(x)=-x^2+2\ln x$，求导得：$g'(x)=-2x+\frac{2}{x}(x>0)$，即：

$$g'(x)=\frac{-2x^2+2}{x}(x>0)$$

令：$-2x^2+2>0, x^2-1<0, (0,1)$ 为增区间，$(1,+\infty)$ 为减区间. $g(1)_{\max}=-1$，得图为 C

考点：运用导数研究函数的性质.

8.【答案】C

【详解】先分析四个答案，A 举一反例 $a_1=2, a_2=-1, a_3=-4$，$a_1+a_2>0$ 而 $a_2+a_3<0$，A 错误，B 举同样反例 $a_1=2, a_2=-1, a_3=-4$，$a_1+a_3<0$，而 $a_1+a_2>0$，B 错误，

D 选项，$a_2-a_1=d, a_3-a_2=-d, \therefore (a_2-a_1)(a_3-a_2)=-d^2\le 0$, 故 D 错，

下面针对 C 进行研究，$\{a_n\}$ 是等差数列，若 $0<a_1<a_2$，则 $a_1>0$, 设公差为 d，则 $d>0$，数列各项均为正，由于 $a_2{}^2-a_1a_3=(a_1+d)^2-a_1(a_1+2d)=a_1{}^2+2a_1d+d^2-a_1{}^2-2a_1d=d^2>0$，则 $a_1{}^2>a_1a_3$

$\Rightarrow a_1>\sqrt{a_1a_3}$，

故选 C.

考点：本题考点为等差数列及作差比较法，以等差数列为载体，考查不等关系问题，重 点是对知识本质的考查.

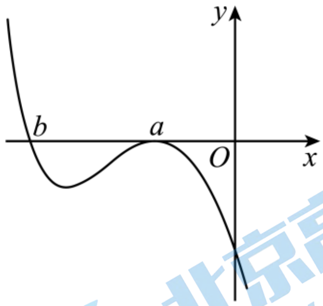
9.【答案】D

【分析】先考虑函数的零点情况，注意零点左右附近函数值是否变号，结合极大值点的性质，对a进行分类讨论，画出$f(x)$图象，即可得到a,b所满足的关系，由此确定正确选项.

【详解】若$a=b$，则$f(x)=a(x-a)^3$为单调函数，无极值点，不符合题意，故$a\neq b$.

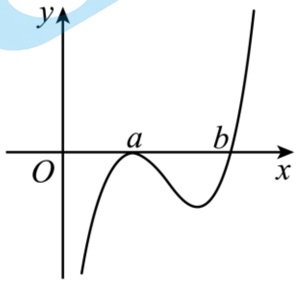
$\therefore f(x)$有$x=a$和$x=b$两个不同零点，且在$x=a$左右附近是不变号，在$x=b$左右附近是变号的. 依题意，$x=a$为函数$f(x)=a(x-a)^2(x-b)$的极大值点，$\therefore$在$x=a$左右附近都是小于零的.

当$a<0$时，由$x>b$，$f(x)\leq 0$，画出$f(x)$的图象如下图所示：



由图可知$b<a$，$a<0$，故$ab>a^2$

当$a>0$时，由$x>b$时，$f(x)>0$，画出$f(x)$的图象如下图所示：



由图可知$b>a$，$a>0$，故$ab>a^2$.

综上所述，$ab>a^2$成立.

故选：D

【点睛】本小题主要考查三次函数的图象与性质，利用数形结合的数学思想方法可以快速解答.

10.【答案】B

【分析】因为①$a=1$；②$b\neq 1$；③$c=2$；④$d\neq 4$中有且只有一个是正确的,故分四种情况进行讨论,分别分析可能存在的情况即可.

【详解】若仅有①成立,则$a=1$必有$b\neq 1$成立,故①不可能成立；

若仅有②成立,则$a\neq 1,b\neq 1,c\neq 2,d=4$成立,此时有$(2,3,1,4)$,$(3,2,1,4)$两种情况；

若仅有③成立,则$a\neq 1,b=1,c=2,d=4$成立,此时仅有$(3,1,2,4)$成立；

若仅有④成立，则$a\neq 1,b=1,c\neq 2,d\neq 4$成立,此时有$(2,1,4,3),(3,1,4,2),(4,1,3,2)$三种情况，

综上符合条件的所有有序数组(a,b,c,d)的个数是6个，

故选：B

第二部分（非选择题 共 60 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11.【答案】$\frac{5}{6}$

【分析】直接根据条件概率公式求解可得结果.

【详解】因为 $P(AB)=\frac{1}{2}$， $P(A)=\frac{3}{5}$，

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{6}$.

故答案为：$\frac{5}{6}$.

12.【答案】$(-\infty,4]$

【分析】分 $x<1$ 和 $x\ge 1$ 两种情况讨论从而解不等式 $f(x)\le 2$ 即可.

【详解】当 $x<1$ 时，由 $f(x)\le 2$，得 $2^{x-1}\le 2$，所以 $x-1\le 1$，又因为 $x<1$，所以 $x<1$；

当 $x\ge 1$ 时，由 $f(x)\le 2$，得 $x^{\frac{1}{2}}\le 2$，所以 $x\le 4$，又因为 $x\ge 1$，所以 $1\le x\le 4$.

所以满足 $f(x)\le 2$ 成立的 x 的取值范围为 $(-\infty,4]$.

故答案为：$(-\infty,4]$.

13.【答案】 ①. $\frac{1}{3}$ ②. $\frac{2}{3}$

【分析】根据分布列的性质求出 a，根据方差公式求出 $D(X)$.

【详解】由题意得 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+a=1$，得 $a=\frac{1}{3}$.

$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$，

$D(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{3}+(1-1)^2\times\frac{1}{3}+(2-1)^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$；$\frac{2}{3}$.

14.【答案】3（答案不唯一，n 为3的倍数的正整数均可）

【分析】在通项公式中，令 x 的指数为0，可求出结果

【详解】$T_{k+1}=\mathrm{C}_n^k x^{n-k}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=(-1)^k\mathrm{C}_n^k\cdot x^{n-\frac{3}{2}k}$， $k=0,1,2,\cdots,n$，

令$n-\frac{3}{2}k=0$，得$2n=3k$，因为k为整数，n为正整数，所以k为偶数，n为3的倍数的正整数.

故答案为：3（答案不唯一，n为3的倍数的正整数均可）.

15.【答案】①③④

【分析】推导出$a_n=\frac{9}{a_n}-\frac{9}{a_{n-1}}$，求出$a_1$、$a_2$的值，可判断①；利用反证法可判断②④；利用数列单调性的定义可判断③.

【详解】由题意可知，$\forall n\in\mathrm{N}^*$，$a_n>0$，

当$n=1$时，$a_1^2=9$，可得$a_1=3$；

当$n\geq 2$时，由$S_n=\frac{9}{a_n}$可得$S_{n-1}=\frac{9}{a_{n-1}}$，两式作差可得$a_n=\frac{9}{a_n}-\frac{9}{a_{n-1}}$，

所以，$\frac{9}{a_{n-1}}=\frac{9}{a_n}-a_n$，则$\frac{9}{a_2}-a_2=3$，整理可得$a_2^2+3a_2-9=0$，

因为$a_2>0$，解得$a_2=\frac{3\sqrt{5}-3}{2}<3$，①对；

假设数列$\{a_n\}$为等比数列，设其公比为q，则$a_2^2=a_1a_3$，即$\left(\frac{9}{S_2}\right)^2=\frac{81}{S_1S_3}$，

所以，$S_2^2=S_1S_3$，可得$a_1^2(1+q)^2=a_1^2(1+q+q^2)$，解得$q=0$，不合乎题意，

故数列$\{a_n\}$不是等比数列，②错；

当$n\geq 2$时，$a_n=\frac{9}{a_n}-\frac{9}{a_{n-1}}=\frac{9(a_{n-1}-a_n)}{a_na_{n-1}}>0$，可得$a_n<a_{n-1}$，所以，数列$\{a_n\}$为递减数列，③对；

假设对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，$a_n\geq\frac{1}{100}$，则$S_{100000}\geq 100000\times\frac{1}{100}=1000$，

所以，$a_{100000}=\frac{9}{S_{100000}}\leq\frac{9}{1000}<\frac{1}{100}$，与假设矛盾，假设不成立，④对.

故答案为：①③④.

【点睛】关键点点睛：本题在推断②④的正误时，利用正面推理较为复杂时，可采用反证法来进行推导.

三、解答题共5小题，共40分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.【答案】(1) 函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,0)$；极小值为-1，无极大值

(2) 图象见解析　(3) 答案见解析

【分析】(1) 由导数得出其单调性以及极值；

(2) 由单调性画出函数$y=f(x)$的大致图像；

（3）画出函数 $f\left(x\right)$ 与函数 $y=a$ 的简图，由图像得出方程根的个数.

【小问 1 详解】

$f^{'}(x)=\mathrm{e}^{x}+(x-1)\mathrm{e}^{x}=x\mathrm{e}^{x}$

$x>0\Rightarrow f'(x)>0$，$x<0\Rightarrow f'(x)<0$

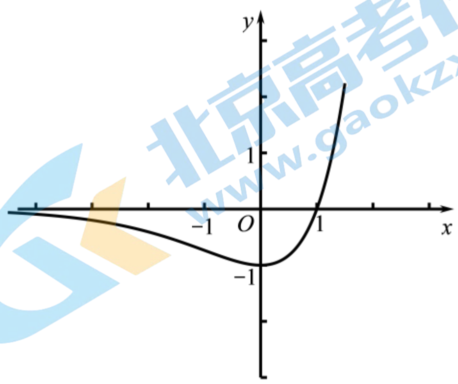
即函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$

极小值为 $f(0)=-1$，无极大值.

【小问 2 详解】

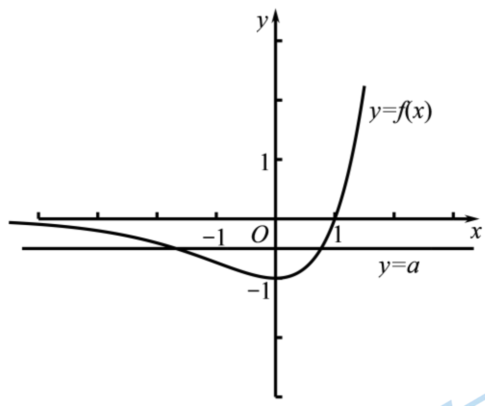
当 $x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，且 $f(1)=0$

结合单调性，可画出函数 $y=f\left(x\right)$ 的大致图像，如下图所示



【小问 3 详解】

画出函数 $f\left(x\right)$ 与函数 $y=a$ 的简图，如下图所示



由图可知，当 $a<-1$ 时，方程 $f\left(x\right)-a=0\left(a\in\mathbf{R}\right)$ 没有实数根；

当 $a=-1$ 或 $a\geq0$ 时，方程 $f\left(x\right)-a=0\left(a\in\mathbf{R}\right)$ 只有一个实数根；

当 $-1<a<0$ 时，方程 $f\left(x\right)-a=0\left(a\in\mathbf{R}\right)$ 有两个不相等的实数根；

17.【答案】（1）$a_n=3n$

（2）$T_n=\dfrac{2n}{3\left(n+1\right)}$

【分析】（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，结合等差数列的性质与等比中项的性质求解即可；

（2）根据等差数列的前n项和公式可得$\frac{1}{S_n}$，再裂项求和求解即可

【小问 1 详解】

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_3=18$，得$3a_1+3d=18$，即$a_1+d=6$，由a_1，a_2，a_4成等比数列，得$(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)$，即$a_1^2+2a_1d+d^2=a_1^2+3a_1d$，又$d\neq 0$得$a_1=d$，所以$a_1=3$，$d=3$，故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n$.

【小问 2 详解】

由$a_n=3n$，得$S_n=\frac{n(3n+3)}{2}=\frac{3n(n+1)}{2}$，所以$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{3n(n+1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

$$T_n=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{3(n+1)}.$$

18.【答案】（1）$\frac{1}{24}$

（2）分布列见解析；期望为$\frac{23}{12}$

【分析】（1）由独立事件的乘法公式代入即可得出答案.

（2）X的可能取值为$0,1,2,3$，分别求出其对应的概率，即可求出分布列和期望.

【小问 1 详解】

该同学这 3 门课程均未取得优秀成绩的概率$\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24}$.

【小问 2 详解】

X的可能取值为$0,1,2,3$，所以

$$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24},$$

$$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{11}{24},$$

$$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

该同学取得优秀成绩的课程数X的分布列：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$

期望 $E(X)=0\times\frac{1}{24}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{24}+3\times\frac{1}{4}=\frac{23}{12}$.

19.【答案】(1) $f(x)$ 点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $x-y-1=0$，$g(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $x-y-1=0$；

(2) $f(x)\geq g(x)$，证明见解析.

【分析】(1) 根据导数的几何意义可求出结果；

(2) 作差构造函数，利用导数可证结论成立.

【小问 1 详解】

因为 $x>0$，$f(x)=\ln x$，$f'(x)=\frac{1}{x}$，$f'(1)=1$，$f(1)=0$，

所以 $f(x)$ 点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y-0=x-1$，即 $x-y-1=0$.

因为 $x>0$，$g(x)=1-\frac{1}{x}$，$g'(x)=\frac{1}{x^2}$，$g'(1)=1$，$g(1)=0$，

所以 $g(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y-0=x-1$，即 $x-y-1=0$.

【小问 2 详解】

$f(x)\geq g(x)$，证明如下：

设 $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}\ (x>0)$，

$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $h(x)\geq h(1)=0$，

所以 $f(x)\geq g(x)$.

20.【答案】(I) 合唱团学生参加活动的人均次数为 2.3；(II) $P_0=\frac{41}{99}$；(III) $E\xi=\frac{2}{3}$.

【详解】解：由图可知，参加活动 1 次、2 次和 3 次的学生人数分别为 10、50 和 40.

(I) 该合唱团学生参加活动的人均次数为 $\frac{1\times10+2\times50+3\times40}{100}=\frac{230}{100}=2.3$.

(II) 从合唱团中任选两名学生，他们参加活动次数恰好相等的概率为 $P_0=\frac{C_{10}^2+C_{50}^2+C_{40}^2}{C_{100}^2}=\frac{41}{99}$.

（III）从合唱团中任选两名学生，

记“这两人中一人参加 1 次活动，另一人参加 2 次活动”为事件 A ，

“这两人中一人参加 2 次活动，另一人参加 3 次活动”为事件 B，

“这两人中一人参加 1 次活动，另一人参加 3 次活动”为事件 C .

易知 $P(\xi=1)=P(A)+P(B)=\dfrac{C_{10}^{1}C_{50}^{1}}{C_{100}^{2}}+\dfrac{C_{50}^{1}C_{40}^{1}}{C_{100}^{4}}=\dfrac{50}{99}$；

$P(\xi=2)=P(C)=\dfrac{C_{10}^{1}C_{40}^{1}}{C_{100}^{2}}=\dfrac{8}{99}$；　$P(\xi=0)=\dfrac{41}{99}$.

ξ 的分布列：

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{41}{99}$	$\dfrac{50}{99}$	$\dfrac{8}{99}$

ξ 的数学期望：$E\xi=0\times\dfrac{41}{99}+1\times\dfrac{50}{99}+2\times\dfrac{8}{99}=\dfrac{2}{3}$.