2023 北京六十六中高二（上）第一次月考

数　　学

试卷说明：

1.本试卷共三道大题，共 4 页.

2.卷面满分 120 分，考试时间 90 分钟.

3.试题答案一律在答题纸上作答，在试卷上作答无效.

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 空间向量 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}=$（　）

A. $\overrightarrow{AB}$　　B. $\overrightarrow{CB}$　　C. $\overrightarrow{OC}$　　D. $\overrightarrow{BC}$

2. 已知向量 $\vec{a}=(8,-2,1)$，$\vec{b}=(-4,1,k)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，那么实数 k 的值为（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. 2

3. 已知直线 l 经过点 $A(1,1,2),B(0,1,0)$，平面 α 的一个法向量为 $\vec{n}=(-2,0,-4)$，则（　）

A. $l//\alpha$　　B. $l\perp\alpha$

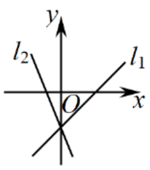
C. $l\subset\alpha$　　D. l 与 α 相交，但不垂直

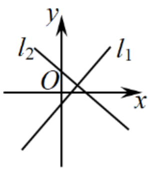
4. 经过点 $P(-1,0)$ 且倾斜角为 $60°$ 的直线的方程是（　）

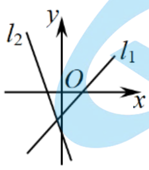
A. $\sqrt{3}x-y-1=0$　　B. $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$

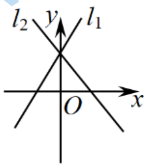
C. $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$　　D. $x-\sqrt{3}y+1=0$

5. 直线 $l_1: y=kx+b(kb\neq 0)$ 和直线 $l_2:\frac{x}{k}+\frac{y}{b}=1$ 在同一坐标系中可能是（　）

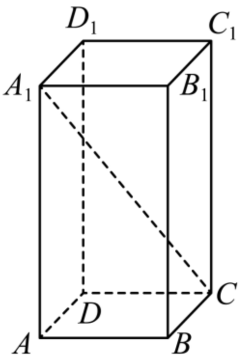
A. 

B. 

C. 

D. 

6. 已知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=1$，$AA_1=2$，那么直线 A_1C 与平面 AA_1D_1D 所成角的正弦值为（　）



A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{35}}{6}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 $AB=AD=2\sqrt{3}, CC_1=\sqrt{2}$，则二面角 C_1-BD-C 的大小为（　）

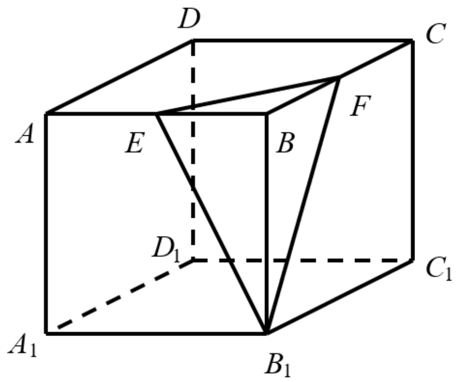
A. $30°$　　B. $45°$　　C. $60°$　　D. $90°$

8. 设 A、B 是 x 轴上的两点，P 的横坐标为 2，且 $|PA|=|PB|$，若直线 PA 的方程为 $x-y+1=0$，则直线 PB 的方程是（　）

A. $x+y-5=0$　　B. $2x-y-1=0$

C. $2y-x-4=0$　　D. $2x+y-7=0$

9. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E、F 分别是棱 AB 、 BC 的中点，则点 C_1 到平面 B_1EF 的距离等于（　）



A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{4}{3}$

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 l 是底面 $ABCD$ 所在平面内的一条动直线，记直线 A_1C 与直线 l 所成的角为 α，则 $\sin\alpha$ 的最小值是（　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

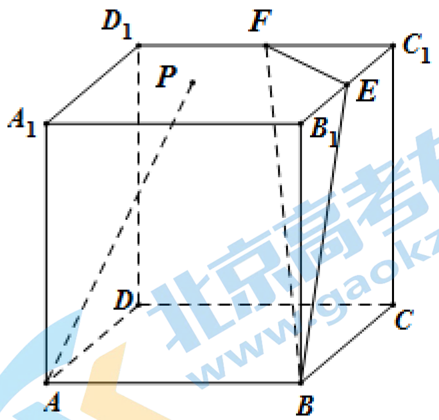
11. 直线 l 经过点 $(1,2)$，且倾斜角是直线 $y=x$ 倾斜角的 2 倍，则直线 l 的方程是________.

12. 直线$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$与坐标轴围成的图形面积为________.

13. 过点 M(2,1)的直线与 x 轴，y 轴分别交于 P，Q 两点，且 MP＝MQ，则 l 的方程是__________.

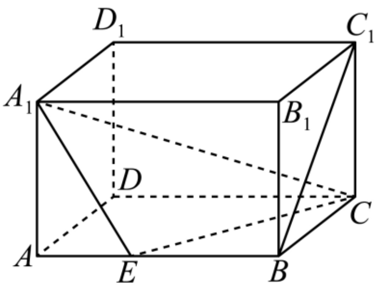
14. 四边形$ABCD$是正方形，以BD为棱把它折成直二面角$A-BD-C$，E为CD的中点，则$\angle AED$的大小为________ .

15. 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，E,F分别为B_1C_1,C_1D_1的中点，P是底面$A_1B_1C_1D_1$上一点．若AP//平面BEF，则AP长度的最小值是___；最大值是___.



三、解答题（共 4 小题；共 45 分）

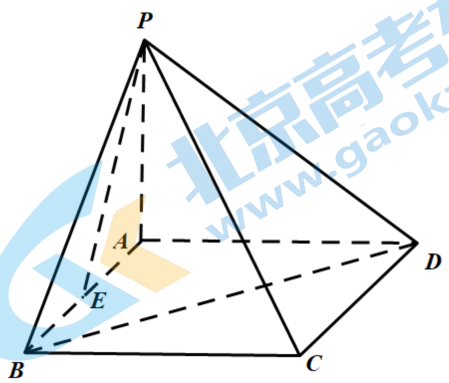
16. 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=3$，$AD=AA_1=2$，点E在AB上，且$AE=1$.



（1）求直线BC_1与A_1C所成角的大小；

（2）求BC_1与平面A_1EC所成角的正弦值.

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$为正方形，E为线段AB的中点，$PA=AB=2$.



（1）求证：$BC \perp PE$；

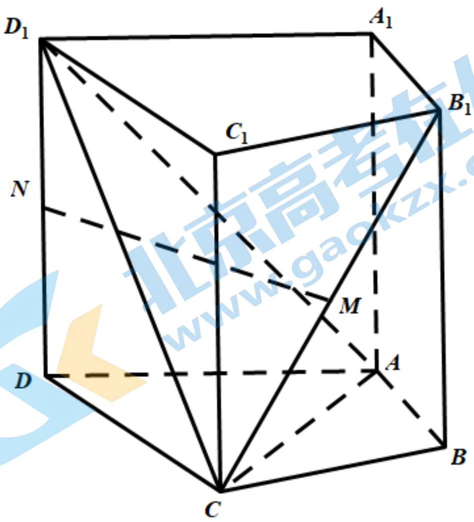
（2）求二面角 $A-PB-D$ 的余弦值.

18. 已知点 A（2，3），B（4，1），$\triangle ABC$ 是以 AB 为底边的等腰三角形，点 C 在直线 l：x-2y+2=0 上.

（1）求 AB 边上的高 CE 所在直线的方程；

（2）求$\triangle ABC$ 的面积.

19. 如图所示，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$，$AB \perp AC$，$AB=1$，$AC=AA_1=2$，$AD=CD=\sqrt{5}$，且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点.



（1）求证：MN // 平面 $ABCD$；

（2）求点 B_1 到平面 D_1AC 的距离；

（3）在棱 A_1B_1 上是否存在点 E，使得直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$？若存在试求出点 E 的位置，若没有说明理由.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1.【答案】D

【分析】利用向量的加减法则即可求解.

【详解】$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

故选：D

2.【答案】B

【分析】根据平行关系可知$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，由向量坐标运算可构造方程求得结果.

【详解】$\because \vec{a}//\vec{b}$，$\therefore \vec{b}=\lambda\vec{a}\left(\lambda\in\mathbf{R}\right)$，$\therefore \begin{cases}-4=8\lambda\\1=-2\lambda\\k=\lambda\end{cases}$，解得：$k=-\dfrac{1}{2}$.

故选：B

3.【答案】B

【分析】根据平面α的法向量与直线l的方向向量的关系即可求解.

【详解】因为直线l经过点$A(1,1,2),B(0,1,0)$，

所以$\overrightarrow{AB}=(-1,0,-2)$，又因为平面$\alpha$的一个法向量为$\vec{n}=(-2,0,-4)$，

且$\vec{n}=2\overrightarrow{AB}$，所以平面$\alpha$的一个法向量与直线$l$的方向向量平行，

则$l\perp\alpha$，

故选：B.

4.【答案】B

【分析】首先求出直线的斜率，再利用点斜式求出直线方程；

【详解】由倾斜角为60°知，直线的斜率$k=\sqrt{3}$，

因此，其直线方程为$y-0=\sqrt{3}(x+1)$，即$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$

故选：B

5.【答案】D

【分析】由四个选项中的l_1可知$k>0$，分别由四个选项中l_1的b的符号推导l_2的斜率和纵截距的符号可得解.

【详解】根据题意可知，$kb\neq0$，

对于A、B、C，由l_1可知，$b<0$，所以l_2：$y=-\dfrac{b}{k}x+b$的斜率为正数，故A、B、C不正确；

对于D，由l_1可知，$b>0$，此时l_2：$y=-\dfrac{b}{k}x+b$符合，故D正确.

故选：D.

【点睛】本题考查了根据直线方程识别图象，属于基础题.

6.【答案】A

【分析】由长方体性质易知$\angle CA_1D$为A_1C与面AA_1D_1D所成的角，进而求其正弦值即可.

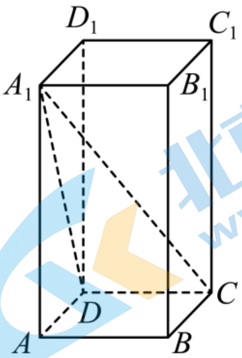
【详解】根据长方体性质知：$CD\perp$面AA_1D_1D，

故$\angle CA_1D$为A_1C与面AA_1D_1D所成的角，

$AA_1=2,AB=AD=1\Rightarrow CA_1=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$，

所以$\sin\angle CA_1D=\dfrac{CD}{CA_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

故选：A

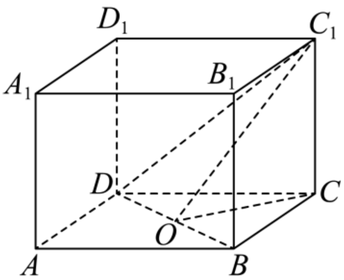


7.【答案】A

【分析】取BD的中点为O，连接CO,C_1O，证明$CO\perp BD$，$BD\perp C_1O$，进而可得$\angle C_1OC$为二面角C_1-BD-C的平面角，从而在$\mathrm{Rt}\triangle C_1CO$中求解三角形即可得答案.

【详解】解：因为$AB=AD=2\sqrt{3}$，

所以四边形$ABCD$是正方形，取BD的中点为O，连接CO,C_1O，



则$CO\perp BD$，又$C_1C\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，

所以$C_1C\perp BD$，又$CO\cap C_1C=C$，

所以$BD\perp$平面C_1CO，

所以$BD\perp C_1O$，

所以$\angle C_1OC$为二面角C_1-BD-C的平面角，

因为$\tan\angle C_1OC=\dfrac{CC_1}{CO}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\angle C_1OC=30^\circ$，

所以二面角C_1-BD-C的大小为30°.

故选：A.

8.【答案】A

【分析】求得P、A两点的坐标，根据$|PA|=|PB|$，可得点P在直线$x=2$上，从而可得B点的坐标，从而可求得直线PB的方程.

【详解】由直线PA的方程为$x-y+1=0$，可知$A(-1,0),P(2,3)$，

$\because |PA|=|PB|$，

$\therefore$点P在线段AB的垂直平分线，

即直线$x=2$上，

$\therefore B(5,0),P(2,3)$，

$\therefore$直线PB的斜率$k_{PB}=\dfrac{3}{2-5}=-1$，

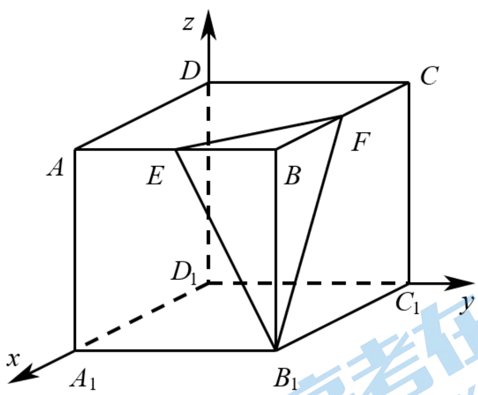
$\therefore$直线PB的方程为$y-0=-(x-5)$，即$x+y-5=0$.

故选：A.

9.【答案】D

【分析】建立空间直角坐标系，找到平面B_1EF的法向量，利用向量法求点到平面的距离求解即可.

【详解】以D_1为坐标原点，分别以D_1A_1，D_1C_1，D_1D的方向为x轴、y轴、z轴的正方向建立空间直角坐标系，则$B_1(2,2,0)$，$C_1(0,2,0)$，$E(2,1,2)$，$F(1,2,2)$.



设平面B_1EF的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

$\overline{B_1E}=(0,-1,2)$ $\overline{B_1F}=(-1,0,2)$

则$\begin{cases}\bar{n}\cdot\overline{B_1E}=0\\ \bar{n}\cdot\overline{B_1F}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-y+2z=0\\ -x+2z=0\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\vec{n}=(2,2,1)$.

又∵ $\overrightarrow{B_1C_1}=(-2,0,0)$，

∴点 C_1 到平面 B_1EF 的距离 $h=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|-2\times2+0+0|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\dfrac{4}{3}$，

故选：D.

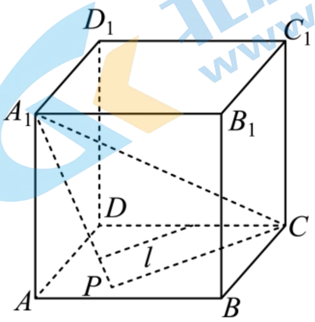
【点睛】本题用向量法求点到平面的距离，我们也可以用等体积法求点到平面的距离，当然也可以找到这个垂线段，然后放在直角三角形中去求.

10. 【答案】A

【分析】过 C 作 l 的平行线，过 A_1 作该平行线的垂线，垂足为 P，则 $\angle A_1CP=\alpha$，$\sin\alpha=\dfrac{|A_1P|}{|A_1C|}$，

根据 $|A_1P|\geq|A_1A|$ 可求出结果.

【详解】如图：过 C 作 l 的平行线，过 A_1 作该平行线的垂线，垂足为 P，



则 $\angle A_1CP=\alpha$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{|A_1P|}{|A_1C|}$，

设正方体的棱长为1，则 $|A_1C|=\sqrt{3}$，$|A_1P|\geq|A_1A|=1$，

所以 $\sin\alpha=\dfrac{|A_1P|}{|A_1C|}\geq\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 P 与 A 重合时，取得等号，

所以 $\sin\alpha$ 的最小值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：A.

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 【答案】$x-1=0$

【分析】根据已知得出直线 $y=x$ 的斜率以及倾斜角，进而得出直线 l 的倾斜角，结合已知，即可得出答案.

【详解】由已知可得，直线 $y=x$ 的斜率为1，所以直线的倾斜角为 $45°$，

所以，直线 l 的倾斜角为 $90°$.

又直线 l 经过点 $(1,2)$，所以直线 l 的方程是 $x-1=0$.

故答案为：$x-1=0$.

12.【答案】3

【分析】结合截距式的含义直接求解即可.

【详解】直线$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$,故 x 轴上的截距为 2，y 轴上的截距为-3，

所以面积为$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|-3|=3$.

故答案为：3

13.【答案】x＋2y－4＝0

【分析】设 P（a，0），Q（0，b）由题意知 M 为 PQ 中点，得出点 P 和 Q 坐标，根据截距式求出方程即可.

【详解】设 P（a，0），Q（0，b）

∵$|MP|=|MQ|$，$M=$（2，1）

∴M 点为 PQ 的中点，

则 P（4，0），Q（0，2）

直线方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$即 $x+2y-4=0$

故答案为 $x+2y-4=0$

【点睛】本题考查直线方程的求法，考查截距式直线方程的结构，属于基础题.

14.【答案】90°

【分析】由题意画出几何体的图形，设出正方形的边长，求出折叠后 AD，AE，DE 的长度，即可求出∠AED 的大小.

【详解】由题意画出图形，如图：

设正方形的边长为 2，

折叠前后 AD=2，DE=1，连接 AC 交 BD 于 O，连接 OE，则 OE=1，AO=$\sqrt{2}$，因为正方形 ABCD 沿对角线 BD 折起，使平面 ABD⊥平面 CBD，

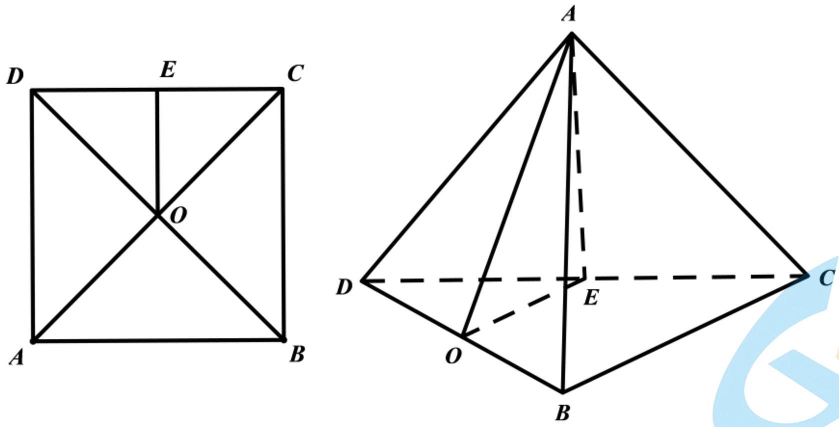
AO⊥BD，所以 AO⊥平面 BCD，所以 AO⊥OE，

在△AOE 中，$AE^2=AO^2+OE^2=3$，

又 AD=2，ED=1，所以 $DE^2+AE^2=AD^2$，

所以∠AED=90°.

故答案为：90°.



【点睛】方法点睛：本题考查折叠问题，注意折叠前后，同一个半平面中的线线关系不变.

15.【答案】 ①. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ②. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【分析】

取 A_1D_1 中点 N， A_1B_1 中点 M，连接 AM， AN， MN，利用面面平行的判定定理证得平面 AMN // 平面 BEF，结合已知条件可知 $P\in MN$，在等腰 $\triangle AMN$ 中，可求得 AP 长度的最值.

【详解】取 A_1D_1 中点 N， A_1B_1 中点 M，连接 AM， AN， MN

由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$， E,N 分别为 B_1C_1,A_1D_1 的中点，$\therefore AN//BE$

又 $AN\not\subset$ 平面 BEF， $BE\subset$ 平面 BEF， $\therefore AN//$ 平面 BEF

$\because E,F$ 分别为 B_1C_1,C_1D_1 的中点，由中位线性质知 $EF//B_1D_1$

同理可知 $MN//B_1D_1$， $\therefore MN//EF$

又 $MN\not\subset$ 平面 BEF， $EF\subset$ 平面 BEF， $\therefore MN//$ 平面 BEF

又 $AN\cap MN=N$， $AN,MN\subset$ 平面 AMN

$\therefore$ 平面 AMN // 平面 BEF

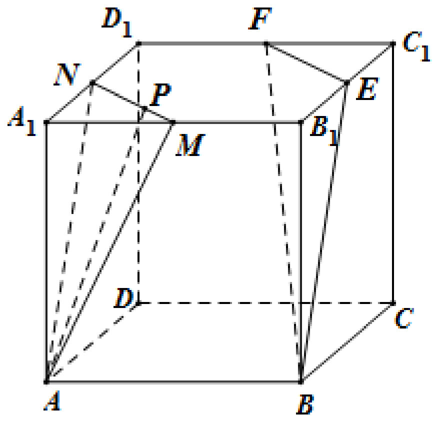
$\because P$ 是底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上一点．且 $AP//$ 平面 BEF， $\therefore P\in MN$

在等腰 $\triangle AMN$ 中， AP 的长度最大时为 $AP_{max}=AM=AN=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

AP 的长度最小时， P 为 MN 中点， $MN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$$AP=\sqrt{AM^2-\left(\frac{MN}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\text{，即 } AP_{min}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

故答案为: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$， $\frac{\sqrt{5}}{2}$



【点睛】方法点睛：证明面面平行常用的方法：

（1）面面平行的判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

（2）利用垂直于同一条直线的两个平面平行；

（3）两个平面同时平行于第三个平面，那么这两个平面平行；

（4）利用"线线平行"、"线面平行"、"面面平行"的相互转化．

三、解答题（共 4 小题；共 45 分）

16.【答案】（1）90°

（2）$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

【分析】（1）以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，求出 $\overrightarrow{A_1C}$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$，利用空间向量的数量积求解直线 A_1C 与 BC_1 所成角的余弦值即可．

（2）求出平面 A_1EC 的法向量，利用平面法向量与直线方向向量的夹角即可求解线面角

【小问 1 详解】

以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系．

则 $A_1(2,0,2),C(0,3,0),B(2,3,0),C_1(0,3,2),E(2,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}=(-2,3,-2)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,2)$．所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{A_1C}||\overrightarrow{BC_1}|}=\dfrac{4-4}{\sqrt{8}\times\sqrt{17}}=0$，

所以 $\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{BC_1}$，故直线 A_1C 与 BC_1 所成角为 90°．

【小问 2 详解】

因为 $\overrightarrow{EC}=(-2,2,0),\overrightarrow{A_1E}=(0,1,-2)$，

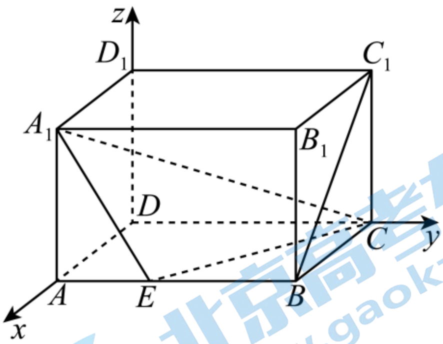
设平面 A_1EC 的法向量为 $\vec{m}=(x，y，z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-2z=0,\\ -2x+2y=0.\end{cases}$

令 $y=2$，则 $x=2$， $z=1$,于是 $\vec{m}=(2,2,1)$，

设 BC_1 与平面 A_1EC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\vec{m}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BC_1}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{|-4+0+2|}{2\sqrt{2}\times 3}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，

所以 BC_1 与平面 A_1EC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$



17. 【答案】（1）证明见解析

（2） $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】（1）根据已知，结合线面垂直的性质定理可推得 $BC\perp AB$， $PA\perp BC$. 进而即可根据面面垂直的判定定理得出 $BC\perp$ 平面 PAB，进而得出证明；

（2）建立空间直角坐标系，写出各点的坐标以及向量的坐标，进而得出平面 PAB 以及平面 PBD 的法向量，进而即可得出答案.

【小问 1 详解】

由已知可得， $BC\perp AB$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $BC\subset$ 平面 $ABCD$，

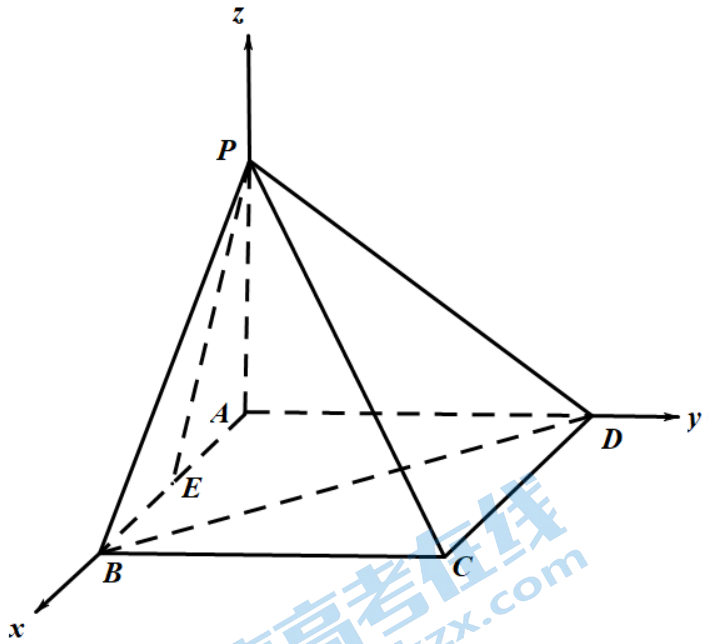
所以， $PA\perp BC$.

因为 $AB\subset$ 平面 PAB， $PA\subset$ 平面 PAB， $AB\cap PA=A$，

所以， $BC\perp$ 平面 PAB.

因为 $PE\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PE$.

【小问 2 详解】



如图，建立空间直角坐标系，

由已知可得 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$P(0,0,2)$，$D(0,2,0)$，

所以，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$.

由（1）知，$BC\perp$平面 PAB，

又 $AD//BC$，所以 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$ 即为平面 PAB 的一个法向量.

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 PBD 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2x+2z=0\\ -2x+2y=0\end{cases}$，

取 $x=1$，则 $\vec{n}=(1,1,1)$ 是平面 PBD 的一个法向量.

因为 $\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AD}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\vec{n}||\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

二面角 $A-PB-D$ 为锐角，

所以，二面角 $A-PB-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

18.【答案】（1）$x-y-1=0$

（2）2

【分析】（1）由题意可知，E 为 AB 的中点，$E(3,2)$，利用斜率计算公式、点斜式即可得出.

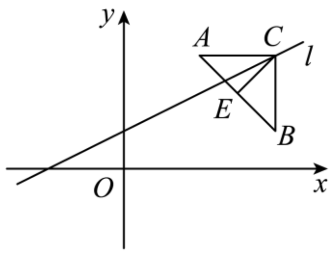
（2）由 $\begin{cases}x-2y+2=0\\ x-y-1=0\end{cases}$ 得 $C(4,3)$，利用两点之间的距离公式、三角形面积计算公式即可得出.

【小问 1 详解】

解：由题意可知，E 为 AB 的中点，因为 $A(2,3)$，$B(4,1)$，所以 $E(3,2)$，$k_{AB}=\frac{3-1}{2-4}=-1$，所以

$k_{CE}=-\frac{1}{k_{AB}}=1$，

$\therefore CE$ 所在直线方程为 $y-2=x-3$，即 $x-y-1=0$．



【小问 2 详解】

解：由 $\begin{cases}x-2y+2=0\\x-y-1=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$，所以 $C(4,3)$，所以 AC 平行于 x 轴，CB 平行于 y 轴，即

$AC\perp BC$，

$\therefore |AC|=|BC|=\sqrt{(2-4)^2+(3-3)^2}=2$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BC|=2$．

19. 【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

（3）存在，$E\left(0,\sqrt{7}-2,2\right)$

【分析】（1）取 CC_1 中点为 F，连接 MF,NF，根据已知可推得 $NF//$ 平面 $ABCD$，$MF//$ 平面 $ABCD$.进而判定得出平面 $MNF//$ 平面 $ABCD$.然后根据面面平行的定义，即可得出证明；

（2）建立空间直角坐标系，求出点的坐标以及平面 D_1AC 的法向量，根据向量法求解即可得出答案；

（3）假设存在，设出 $E\left(0,m,2\right)$，根据已知求出平面 $ABCD$ 的法向量和 $\overline{NE}$，进而根据已知列出关系式，求解即可得出答案.

【小问 1 详解】

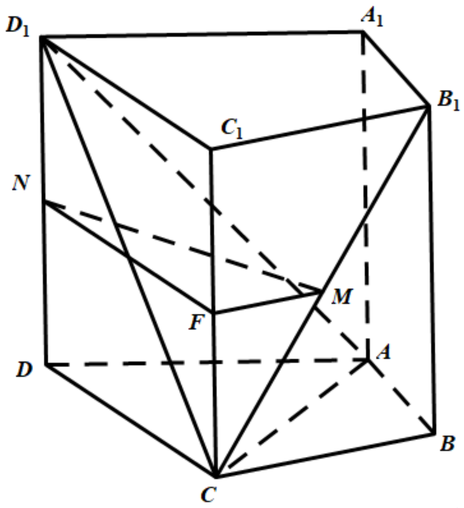


图1

取 CC_1 中点为 F，连接 MF,NF，

因为 M,N,F 分别是 B_1C,DD_1,CC_1 的中点，

所以，$NF//CD$，$MF//B_1C_1$.

又 $B_1C_1//BC$，所以 $MF//BC$.

因为 $NF\not\subset$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $NF//$ 平面 $ABCD$.

同理可得，$MF//$ 平面 $ABCD$.

因为 $NF,MF\subset$ 平面 MNF，$NF\cap MF=F$，

所以，平面 $MNF//$ 平面 $ABCD$.

因为 $MN\subset$ 平面 MNF，所以 $MN//$ 平面 $ABCD$.

【小问 2 详解】

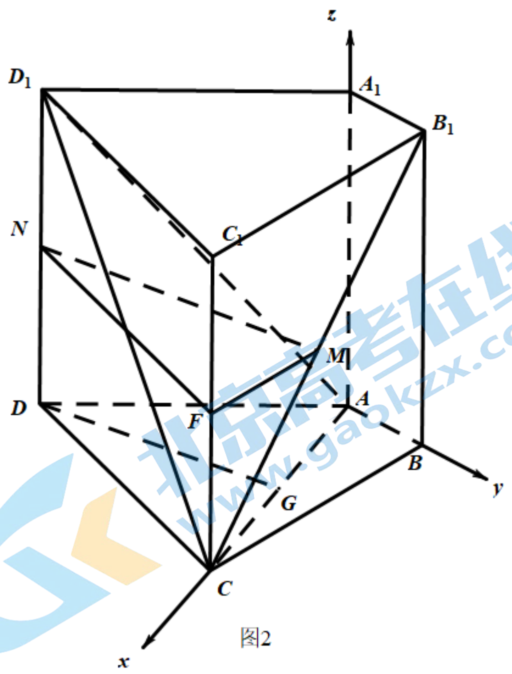


图2

如图 2，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(2,0,0)$，$A_1(0,0,2)$，$B_1(0,1,2)$，$C_1(2,0,2)$，

取 AC 中点为 G，连接 DG，

因为 $AD=CD=\sqrt{5}$，$AC=2$，所以 $DG\perp AC$，$AG=1$，$DG=2$，

所以 $D(1,-2,0)$，$D_1(1,-2,2)$，$N(1,-2,1)$

所以，$\overrightarrow{AD_1}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,1,2)$.

设平面 ACD_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AD_1}\cdot\vec{n}=x-2y+2z=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=2x=0\end{cases}$，取 $y=1$，则 $\vec{n}=(0,1,1)$ 是平面 ACD_1 的一个法向量.

所以，点 B_1 到平面 D_1AC 的距离为 $\left|\dfrac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

【小问 3 详解】

假设棱 A_1B_1 上是否存在点 E，设 $E(0,m,2)$，$0\le m\le 1$.

由（2）知，$N(1,-2,1)$，则 $\overrightarrow{NE}=(-1,m+2,1)$.

因为 $A_1A\perp$ 底面 $ABCD$，

所以，$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-2)$ 即为平面 $ABCD$ 的一个法向量.

因为直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$，

所以，$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A_1A},\overrightarrow{NE}\right\rangle\right|=\dfrac{1}{3}$，即 $\left|\dfrac{-2}{2\times\sqrt{(m+2)^2+2}}\right|=\dfrac{1}{3}$，

整理可得 $(m+2)^2=7$，解得 $m=\sqrt{7}-2$ 或 $m=-\sqrt{7}-2$（舍去），

所以，$m=\sqrt{7}-2$.

所以，在棱 A_1B_1 上存在点 E，使得直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$，点 E 坐标为 $E(0,\sqrt{7}-2,2)$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！