

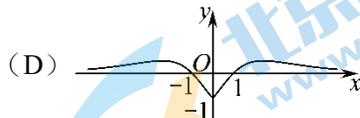
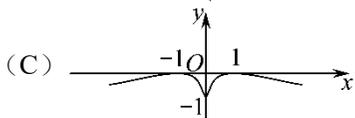
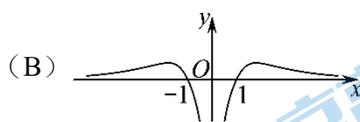
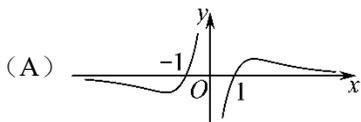
北京市陈经纶中学期中诊断

高一数学

(时间: 120 分钟 满分: 150 分)

一、选择题共 10 个小题, 每小题 5 分, 共 50 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

- (1) 设集合 $A = \{x | 2^x \leq 4\}$, $B = \{x | x < 1\}$, 则 $A \cup B =$
(A) $(-\infty, 2]$ (B) $(-\infty, 1)$ (C) $(0, 1)$ (D) $(0, 2]$
- (2) 若 $a < b < 0$, 则下列不等式一定成立的是
(A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (B) $ab < b^2$ (C) $a^3 < b^3$ (D) $e^{a-b} < e^b$
- (3) 已知 $a = 3^{0.4}$, $b = \log_3 \frac{1}{2}$, $c = (\frac{1}{3})^{0.2}$, 则
(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $c > b > a$ (D) $c > a > b$
- (4) 下列函数中, 值域为 \mathbf{R} 且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是
(A) $y = x^2 + 2x$ (B) $y = 2^{x+1}$ (C) $y = (x-1)|x|$ (D) $y = x^3 + 1$
- (5) 下列可能是函数 $y = \frac{x^2 - 1}{e^{|x|}}$ 的图象的是



- (6) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 的单调递减区间是
(A) $[-1, 3]$ (B) $(-\infty, 1]$ (C) $(-\infty, -1]$ (D) $[1, +\infty)$
- (7) “ $x < 1$ 且 $y < 1$ ” 是 “ $x + y < 2$ ” 的
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件
- (8) 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且 $f(x) = f(2-x)$, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x$, 则当 $x \in [-3, 5]$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}$ 的所有解的和为
(A) 4 (B) $\frac{9}{2}$ (C) 5 (D) $\frac{11}{2}$

(9) 已知 $a > 0$, $b > 0$, 若 $a + b = 4$, 则

(A) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最大值

(B) $a^2 + b^2$ 有最小值

(C) \sqrt{ab} 有最小值

(D) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ 有最大值

(10) 某机构对一种病毒在特定环境下进行观测, 每隔单位时间 T 进行一次记录, 用 $x(x \in \mathbf{N}^*)$ 表示经过的单位时间数, 用 y 表示病毒感染人数, 得到的观测数据如下:

$x(T)$	1	2	3	4	5	6	...
y (人数)	...	6	...	36	...	216	...

若 y 与 x 的关系有两个函数模型可供选择: ① $y = mx^2 + n$; ② $y = k \cdot a^x (k > 0, a > 1)$.

若经过 M 个单位时间, 该病毒的感染人数不少于 1 万人, 则 M 的最小值为

(参考数据: $\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$, $\lg 2 = 0.30$, $\lg 3 = 0.48$)

(A) 9

(B) 10

(C) 11

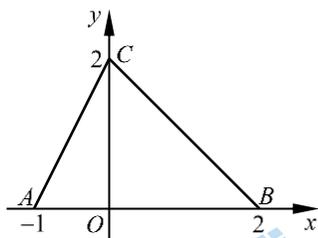
(D) 12

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

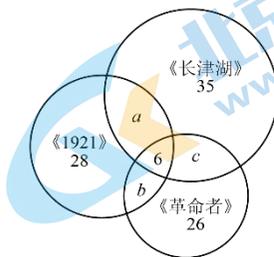
(11) $\sqrt{(-2)^4} - 5^{\log_5 2} =$ _____.

(12) 已知幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(4, 8)$, 则 $f(2) =$ _____.

(13) 如图, 函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB , 则不等式 $f(x) > 1$ 的解集是 _____.



(第 13 题图)



(第 14 题图)

(14) 国庆期间, 高一年级要求学生从三部影片《1921》《长津湖》《革命者》中至少观看一部. 其中观看了《1921》的有 51 人, 观看了《长津湖》的有 60 人, 观看了《革命者》的有 50 人, 数据如图, 则 $a + b + c =$ _____, $a =$ _____.

(15) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值, 则实数 a 的一个可能取值为 _____; 实数 a 的取值范围是 _____.

(16) 激活函数是神经网络模型的重要组成部分, 是一种添加到人工神经网络中的函数. \tanh 函数是常用的激活函数之一, 其解析式为 $f(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}} - 1$. 给出以下结论:

- ① \tanh 函数是增函数;
 - ② \tanh 函数是奇函数;
 - ③ \tanh 函数的值域为 $(-1, 1)$;
 - ④ 对于任意实数 a , 函数 $y = |f(x)| - ax - 1$ 至少有一个零点.
- 其中所有正确结论的序号是 _____.

三、解答题共 5 小题, 每小题 14 分, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(17) (本小题 14 分)

设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 + 4x + a = 0\}$, $B = \{x | x^2 + bx - 2 = 0\}$.

(I) 若 $a = -5$, 求集合 A 并写出 A 的所有子集;

(II) 若 $\complement_U A \cap B = \{2\}$, $\complement_U B \cap A = \{-3\}$, 求 $A \cup B$.

(18) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 + (b-2)x + 3$, 其中 $a \neq 0$.

(I) 若不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 1\}$, 求 a, b 的值;

(II) 已知 $f(1) = 6$, 若 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) < 2$, 求实数 a 的取值范围.

(19) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = 3^x + a \cdot 3^{-x}$.

(I) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的值域;

(II) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(III) 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

(i) 直接写出实数 a 的取值范围;

(ii) 解关于 x 的不等式: $f(\log_{\frac{1}{2}} x) > a + 1$.

(20) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = a^{2x} - 2a^x - 1$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

(I) 若 $f(x)$ 的图象经过一个定点, 写出此定点的坐标;

(II) 若 $a = 2$, 求 $f(x)$ 的最小值;

(III) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 2, 求 a 的值.

(21) (本小题 14 分)

已知 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $A \subseteq S$, $T = \{t_1, t_2\} \subseteq S$, 记 $A_i = \{x | x = a + t_i, a \in A\}$ ($i = 1, 2$), 用 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

(I) 若 $n = 5$, $A = \{1, 2, 5\}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 直接写出所有符合要求的集合 T ;

(II) 若 $n = 7$, $|A| = 4$, 则对于任意的 A , 是否都存在 T , 使得 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$? 说明理由;

(III) 若 $|A| = 5$, 对于任意的 A , 都存在 T , 使得 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 求 n 的最小值.

北京市陈经纶中学期中诊断

高一数学

(时间: 120 分钟 满分: 150 分)

一、选择题共 10 个小题, 每小题 5 分, 共 50 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 设集合 $A = \{x | 2^x \leq 4\}$, $B = \{x | x < 1\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(0, 1)$ D. $(0, 2]$

【答案】A

(2) 若 $a < b < 0$, 则下列不等式一定成立的是

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $ab < b^2$ C. $a^3 < b^3$ D. $e^{a-b} < e^b$

【答案】C

(3) 已知 $a = 3^{0.4}$, $b = \log_3 \frac{1}{2}$, $c = (\frac{1}{3})^{0.2}$, 则

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

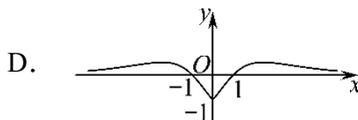
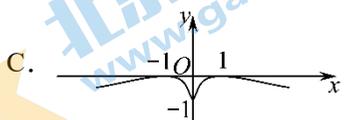
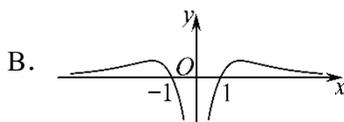
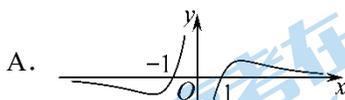
【答案】B

(4) 下列函数中, 值域为 \mathbf{R} 且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是

- A. $y = x^2 + 2x$ B. $y = 2^{x+1}$ C. $y = (x-1)|x|$ D. $y = x^3 + 1$

【答案】D

(5) 下列可能是函数 $y = \frac{x^2 - 1}{e^{|x|}}$ 的图象的是 ()



【答案】D

(6) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 的单调递减区间是

- (A) $[-1, 3]$ (B) $(-\infty, 1]$ (C) $(-\infty, -1]$ (D) $[1, +\infty)$

【答案】C

(7) “ $x < 1$ 且 $y < 1$ ” 是 “ $x + y < 2$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分又不必要条件

【答案】A

(8) 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，且 $f(x) = f(2-x)$ ，当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = x$ ，

则当 $x \in [-3, 5]$ 时， $f(x) = \frac{1}{2}$ 的所有解的和为

- A. 4 B. $\frac{9}{2}$ C. 5 D. $\frac{11}{2}$

【答案】A

(9) 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ，若 $a + b = 4$ ，则

- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最大值 B. $a^2 + b^2$ 有最小值
C. \sqrt{ab} 有最小值 D. $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ 有最大值

【答案】B

(10) 某机构对一种病毒在特定环境下进行观测，每隔单位时间 T 进行一次记录，用 $x(x \in \mathbf{N}^*)$ 表示经过的单位时间数，用 y 表示病毒感染人数，得到的观测数据如下：

$x(T)$	1	2	3	4	5	6	...
y (人数)	...	6	...	36	...	216	...

若 y 与 x 的关系有两个函数模型可供选择：① $y = mx^2 + n$ ；② $y = k \cdot a^x (k > 0, a > 1)$ 。

若经过 M 个单位时间，该病毒的感染人数不少于 1 万人，则 M 的最小值为

(参考数据： $\sqrt{2} = 1.41$ ， $\sqrt{3} = 1.73$ ， $\lg 2 = 0.30$ ， $\lg 3 = 0.48$)

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

【答案】C

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(11) $\sqrt{(-2)^4} - 5^{\log_5 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

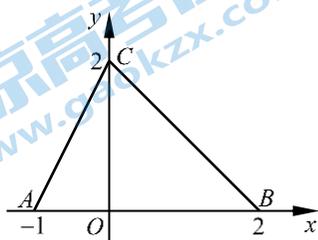
【答案】 2

(12) 已知幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $(4,8)$ ，则 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

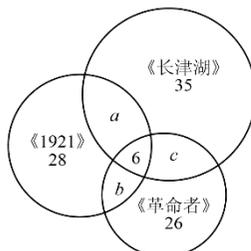
【答案】 $2\sqrt{2}$

(13) 如图，函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB ，则不等式 $f(x) > 1$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(-\frac{1}{2}, 1)$



(第 13 题图)



(第 14 题图)

(14) 国庆期间，高一年级要求学生从三部影片《1921》《长津湖》《革命者》中至少观看一部. 其中观看了《1921》的有 51 人，观看了《长津湖》的有 60 人，观看了《革命者》的有 50 人，数据如图，则 $a+b+c = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 27 9

(15) 设函数 $f(x) = \begin{cases} -ax+1, & x < a, \\ (x-2)^2, & x \geq a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则实数 a 的一个可能取值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0 [0,1]

(16) 激活函数是神经网络模型的重要组成部分，是一种添加到人工神经网络中的函数. \tanh

函数是常用的激活函数之一，其解析式为 $f(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}} - 1$. 给出以下结论：

- ① \tanh 函数是增函数；
- ② \tanh 函数是奇函数；
- ③ \tanh 函数的值域为 $(-1, 1)$ ；
- ④ 对于任意实数 a ，函数 $y = |f(x)| - ax - 1$ 至少有一个零点.

其中所有正确结论的序号是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 ①②③

三、解答题共 5 小题，每小题 14 分，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(17) (本小题 14 分)

设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x^2 + 4x + a = 0\}$ ， $B = \{x | x^2 + bx - 2 = 0\}$ 。

(I) 若 $a = -5$ ，求集合 A 并写出 A 的所有子集；

(II) 若 $\complement_U A \cap B = \{2\}$ ， $\complement_U B \cap A = \{-3\}$ ，求 $A \cup B$ 。

解：(I) 若 $a = -5$ ， $A = \{x | x^2 + 4x - 5 = 0\}$ ，所以 $A = \{-5, 1\}$ 。…… 3 分

A 的所有子集为： \emptyset 、 $\{1\}$ 、 $\{-5\}$ 、 $\{-5, 1\}$ 。…… 7 分

(II) $\complement_U A \cap B = \{2\}$ ， $\therefore 2 \in B$ ， $\complement_U B \cap A = \{-3\}$ ， $\therefore -3 \in A$ ，…… 8 分

$\therefore 4 + 2b - 2 = 0$ ，解得 $b = -1$ ，…… 9 分

$\therefore 9 - 12 + a = 0$ ，解得 $a = 3$ ，…… 10 分

则 $A = \{x | x^2 + 4x + 3 = 0\} = \{-1, -3\}$ ，…… 11 分

$B = \{x | x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$ ，…… 12 分

$\complement_U A \cap B = \{2\}$ ， $\complement_U B \cap A = \{-3\}$ ，满足题意，…… 13 分

$\therefore A \cup B = \{-3, -1, 2\}$ 。…… 14 分



(18) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = ax^2 + (b-2)x + 3$, 其中 $a \neq 0$.

(I) 若不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 1\}$, 求 a, b 的值;

(II) 已知 $f(1) = 6$, 若 $f(x) - 2 < 0$ 在 \mathbf{R} 上有解, 求实数 a 的取值范围.

解: (I) 由题意, 不等式 $ax^2 + (b-2)x + 3 > 0$ 的解集为 $\{x | -1 < x < 1\}$,

所以 $a < 0$, 1 分

方程 $ax^2 + (b-2)x + 3 = 0$ 的两个根分别为 -1 和 1 , 2 分

又由根与系数的关系知 $\begin{cases} -1+1 = -\frac{b-2}{a} \\ -1 \times 1 = \frac{3}{a} \end{cases}$, 4 分

解得 $a = -3, b = 2$ 6 分

(II) 根据题意, 由 $f(1) = 6$, 可得 $a + b + 1 = 6$, 即 $b = 5 - a$, .. 7 分

可得 $f(x) = ax^2 + (3-a)x + 3, a \neq 0$, 8 分

由 $f(x) < 2$ 在 \mathbf{R} 上有解,

即 $ax^2 + (3-a)x + 1 < 0, a \neq 0$ 在 \mathbf{R} 上有解, 9 分

当 $a < 0$ 时, 不等式 $ax^2 + (3-a)x + 1 < 0$ 在 \mathbf{R} 上一定有解, 显然成立; 10 分

当 $a > 0$ 时, 要使得不等式 $ax^2 + (3-a)x + 1 < 0$ 在 \mathbf{R} 上有解,

则满足 $(3-a)^2 - 4a > 0$, 11 分

解得 $a < 1$ 或 $a > 9$, 12 分

所以 $0 < a < 1$ 或 $a > 9$, 13 分

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (9, +\infty)$ 14 分

(19) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = 3^x + a \cdot 3^{-x}$.

(I) 若 $a = 0$, 求 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的值域;

(II) 若 $f(x)$ 为偶函数, 求 a 的值;

(III) 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

(i) 直接写出实数 a 的取值范围;

(ii) 解关于 x 的不等式: $f(\log_{\frac{1}{2}} x) > a + 1$.

解: (I) 若 $a = 0$, $f(x) = 3^x$ 1 分

所以 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增. 2 分

又 $f(-2) = \frac{1}{9}$, $f(2) = 9$,

所以 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的值域为 $[\frac{1}{9}, 9]$ 4 分

(II) $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 5 分

即 $3^{-x} + a \cdot 3^x = 3^x + a \cdot 3^{-x}$, 整理得 $(a-1)(3^x - 3^{-x}) = 0$ 恒成立,

所以 $a-1=0$, 即 $a=1$ 8 分

(III) (i) 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$ 10 分

(ii) 因为 $f(0) = a + 1$, 11 分

又 $f(x)$ 在定义域上单调递增,

则不等式 $f(\log_{\frac{1}{2}} x) > a + 1$ 等价于 $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ 12 分

又 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 为定义在 $(0, +\infty)$ 上的减函数,

所以不等式的解集为 $(0, 1)$ 14 分

(20) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = a^{2x} - 2a^x - 1$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

(I) 若 $f(x)$ 的图象经过一个定点, 写出此定点的坐标;

(II) 若 $a = 2$, 求 $f(x)$ 的最小值;

(III) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 2, 求 a 的值.

解: (I) 因为 $f(0) = a^0 - 2 \times a^0 - 1 = -2$, 2 分

所以定点坐标为 $(0, -2)$ 3 分

(II) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = 2^{2x} - 2 \times 2^x - 1$.

令 $t = 2^x$, $t > 0$ 4 分

则 $f(t) = t^2 - 2t - 1 = (t-1)^2 - 2$, 5 分

当 $t = 1$, 即 $x = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有最小值 -2 7 分

(此处未指出 $x = 0$ 扣 1 分)

(III) 令 $u = a^x$, 则 $f(u) = u^2 - 2u - 1$.

① 当 $0 < a < 1$ 时, 可知 $u = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 所以 $a \leq u \leq 1$.

..... 8 分

又根据二次函数的性质可知,

当 $a \leq u \leq 1$ 时, $f(u) = u^2 - 2u - 1$ 单调递减, 9 分

所以 $f(u) = u^2 - 2u - 1$ 在 $u = a$ 处取得最大值 $f(a) = a^2 - 2a - 1$.

由已知可得, $a^2 - 2a - 1 = 2$, 解得 $a = -1$ 或 $a = 3$.

因为 $0 < a < 1$, 所以两个数值均不满足; 10 分

② 当 $a > 1$ 时, 可知 $u = a^x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 所以 $1 \leq u \leq a$.

..... 11 分

又根据二次函数的性质可知,

当 $1 \leq u \leq a$ 时, $f(u) = u^2 - 2u - 1$ 单调递增, 12 分

所以 $f(u) = u^2 - 2u - 1$ 在 $u = a$ 处取得最大值 $f(a) = a^2 - 2a - 1$.

由已知可得, $a^2 - 2a - 1 = 2$, 解得 $a = 3$ 或 $a = -1$ (舍去),

所以 $a = 3$ 13 分

综上所述, $a = 3$ 14 分

(21) (本小题 14 分)

已知 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $A \subseteq S$, $T = \{t_1, t_2\} \subseteq S$, 记 $A_i = \{x | x = a + t_i, a \in A\}$ ($i = 1, 2$), 用 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

(I) 若 $n = 5$, $A = \{1, 2, 5\}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 求 T ;

(II) 若 $n = 7$, $|A| = 4$, 则对于任意的 A , 是否都存在 T , 使得 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$? 说明理由;

(III) 若 $|A| = 5$, 对于任意的 A , 都存在 T , 使得 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 求 n 的最小值.

解: (I) 若 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 则 $t_1 - t_2 \neq a - b$, 其中 $a, b \in A$,

否则 $t_1 + a = t_2 + b$, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$,

又 $n = 5$, $A = \{1, 2, 5\}$, $2 - 1 = 1, 5 - 2 = 3, 5 - 1 = 4$, 则 t_1, t_2 相差 2,

所以 $T = \{1, 3\}$ 或 $T = \{2, 4\}$ 或 $T = \{3, 5\}$; 4 分

(写出 1 个得 2 分, 写出 2 个得 3 分, 写出 3 个得 4 分, 若答案有错解, 每错 1 个扣 1 分, 扣完为止)

(II) 不一定存在,

当 $A = \{1, 2, 5, 7\}$ 时,

$2 - 1 = 1, 5 - 1 = 4, 5 - 2 = 3, 7 - 1 = 6, 7 - 2 = 5, 7 - 5 = 2$,

则 t_1, t_2 相差不可能 1, 2, 3, 4, 5, 6,

这与 $T = \{t_1, t_2\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 矛盾, 故不都存在 T 9 分

(III) 因为 $C_5^2 = 10$, 故集合 A 中的元素的差的绝对值至多有 10 种,

当 $n \geq 12$ 时, 结论都成立;

当 $n = 11$ 时, 不存在 $A \subset S$, $|A| = 5$, 使得 A 中任意两个元素差不同, 所以当 $n = 11$ 时, 结论成立;

当 $n = 10$ 时, 若 $A = \{1, 3, 6, 9, 10\}$, 则不存在 T , 所以 n 的最小值为 11. 14 分

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

