2020 北京人大学附中高三（下）3 月月考

数　　学

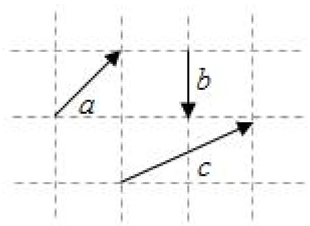
一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分．在每道小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的，请将答案涂在机读卡上的相应位置上．）

1．若集合 $A=\{x\in R|3x+2>0\}$，$B=\{x\in R|x^2-2x-3>0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x\in R|x<-1\}$　　　B．$\{x\in R|-1<x<-\frac{2}{3}\}$

C．$\{x\in R|-\frac{2}{3}<x<3\}$　　　D．$\{x\in R|x>3\}$

2．向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$在正方形网格中的位置如图所示．若向量 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{c}$共线，则实数 $\lambda=$（　　）



A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

3．设曲线 C 是双曲线，则“C 的方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$”是“C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$”的（　　）

A．充分而不必要条件　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　D．既不充分也不必要条件

4．某校象棋社团组织中国象棋比赛，采用单循环赛制，即要求每个参赛选手必须且只须和其他选手各比赛一场，胜者得 2 分，负者得 0 分，平局两人各得 1 分．若冠军获得者得分比其他人都多，且获胜场次比其他人都少，则本次比赛的参赛人数至少为（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

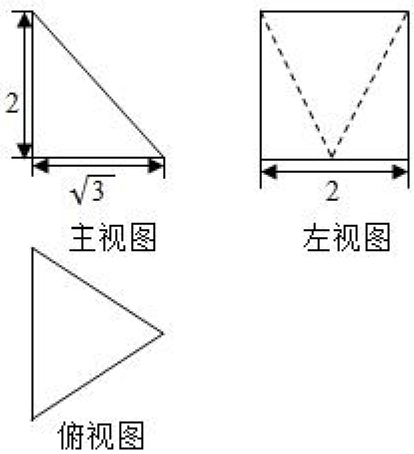
5．若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上任意一点到焦点的距离恒大于 1，则 p 的取值范围是（　　）

A．$p<1$　　B．$p>1$　　C．$p<2$　　D．$p>2$

6．已知函数 $f(x)=\cos(2x+\phi)$（ϕ 为常数）为奇函数，那么 $\cos\phi=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．0　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．1

7．已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的最长棱为（　　）



A．4　　　　B．$2\sqrt{2}$　　　　C．$\sqrt{7}$　　　　D．2

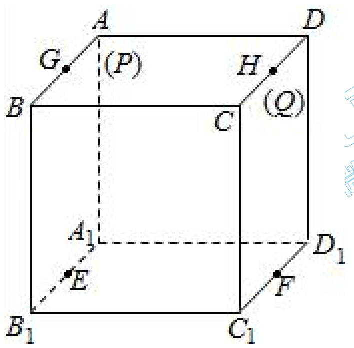
8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\le 0\\ f(x-1), & x>0\end{cases}$，若方程 $f(x)=x+a$ 有且只有两个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围是（　　）

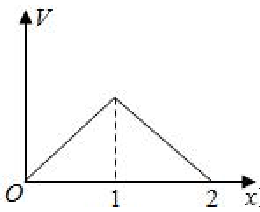
A．$(-\infty, 1)$　　　　B．$(-\infty, 1]$　　　　C．$(0, 1)$　　　　D．$[0, +\infty)$

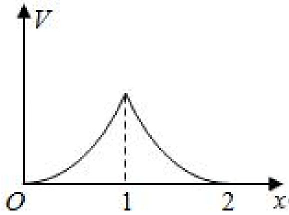
9．定义：若存在常数 k，使得对定义域 D 内的任意两个 x_1，x_2（$x_1\neq x_2$），均有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant k|x_1-x_2|$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在定义域 D 上满足利普希茨条件．若函数 $f(x)=\sqrt{x}(x\ge 1)$ 满足利普希茨条件，则常数 k 的最小值为（　　）

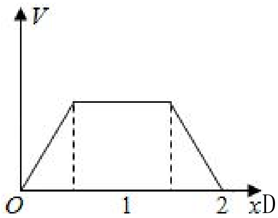
A．4　　　　B．3　　　　C．1　　　　D．$\frac{1}{2}$

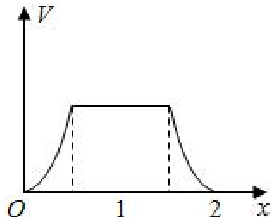
10．在边长为 1 的正方体中，E，F，G，H 分别为 A_1B_1，C_1D_1，AB，CD 的中点，点 P 从 G 出发，沿折线 $GBCH$ 匀速运动，点 Q 从 H 出发，沿折线 $HDAG$ 匀速运动，且点 P 与点 Q 运动的速度相等，记 E，F，P，Q 四点为顶点的三棱锥的体积为 V，点 P 运动的路程为 x，在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，V 与 x 的图象应为（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分）

11．代数式（1 - x）（1+x）^{5}的展开式中 x^3的系数为____.

12．在复平面内，复数 z=1 - 2i 对应的点到原点的距离是____.

13．已知函数若 $f(x)=\begin{cases}|log_4x|，0<x\le 4，\\ x^2-10x+25，x>4.\end{cases}$，$a$，$b$，$c$，$d$是互不相同的正数，且 f（a）=f（b）=f（c）=f（d），则 $abcd$的取值范围是____.

14．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线的倾斜角为 60°，且与椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 有相等焦距，则 C的方程为_

15．设 S_n为等差数列{a_n}的前 n 项和，若 a_1=1，公差 d=2，S_{n+2} - S_n=36，则 n=____.

16．如果对于函数 f（x）定义域内任意的两个自变量的值 x_1，x_2，当 x_1<x_2时，都有 f（x_1）≤f（x_2），且存在两个不相等的自变量值 y_1，y_2，使得 f（y_1）=f（y_2），就称 f（x）为定义域上的不严格的增函数.

则①$f(x)=\begin{cases}x，x\ge 1\\ 0，-1<x<1\\ x，x\le -1\end{cases}$，②$f(x)=\begin{cases}1，x=-\frac{\pi}{2}\\ sinx，-\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$，

③$f(x)=\begin{cases}1，x\ge 1\\ 0，-1<x<1\\ -1，x\le -1\end{cases}$，④$f(x)=\begin{cases}x，x\ge 1\\ x+1，x<1\end{cases}$，

四个函数中为不严格增函数的是____，若已知函数 g（x）的定义域、值域分别为 A、B，A={1，2，3}，B⊆A，且 g（x）为定义域 A 上的不严格的增函数，那么这样的 g（x）有____个.

三、解答题（本大题共 6 个小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．）

17．（13 分）已知{a_n}是各项为正数的等差数列，S_n为其前 n 项和，且 $4S_n=(a_n+1)^2$.

（Ⅰ）求 a_1，a_2的值及{a_n}的通项公式；

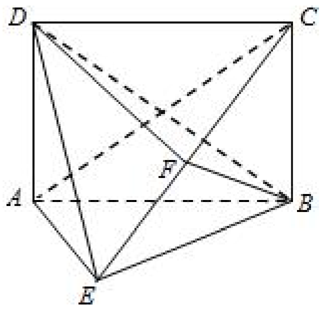
（Ⅱ）求数列$\{S_n-\frac{7}{2}a_n\}$的最小值.

18．如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，平面 $ABCD\perp$ 平面 ABE，$\angle AEB=90°$，$BE=BC$，F 为 CE 的中点，

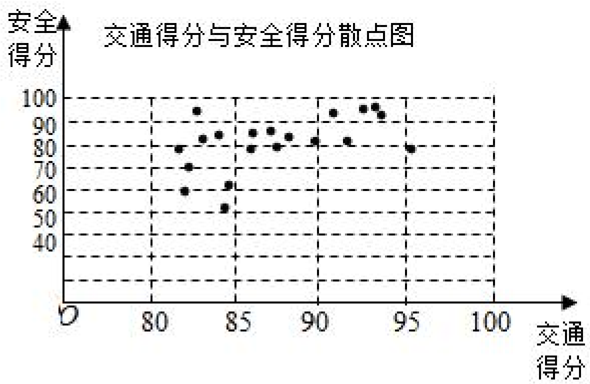
（1）求证：$AE//$ 平面 BDF；

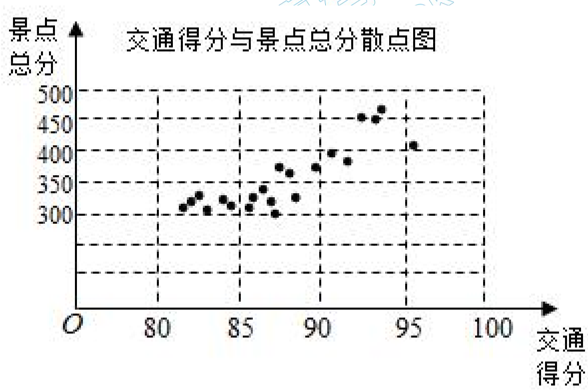
（2）求证：平面 $BDF\perp$ 平面 ACE；

（3）$2AE=EB$，在线段 AE 上找一点 P，使得二面角 $P-DB-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$，求 AP 的长．



19．（13 分）某市旅游管理部门为提升该市 26 个旅游景点的服务质量，对该市 26 个旅游景点的交通、安全、环保、卫生、管理五项指标进行评分．每项评分最低分 0 分，最高分 100 分．每个景点总分为这五项得分之和，根据考核评分结果，绘制交通得分与安全得分散点图、交通得分与景点总分散点图如图：





请根据图中所提供的信息，完成下列问题：

（1）若从交通得分排名前 5 名的景点中任取 1 个，求其安全得分大于 90 分的概率；

（2）若从景点总分排名前 6 名的景点中任取 3 个，记安全得分不大于 90 分的景点个数为 ξ，求随机变量 ξ 的分布列和数学期望；

（3）记该市 26 个景点的交通平均得分为 $\overline{x_1}$，安全平均得分为 $\overline{x_2}$，写出 $\overline{x_1}$ 和 $\overline{x_2}$ 的大小关系？（只写出结果）

20．已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在（1，$f(1)$）处的切线方程（用含 a 的式子表示）

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$.

21．（13 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{1}{2}$，以原点为圆心，椭圆 C 的短半轴长为半径的圆与直线 $x-y+\sqrt{6}=0$ 相切.

（Ⅰ）求椭圆方程；

（Ⅱ）设 S 为椭圆右顶点，过椭圆 C 的右焦点的直线 l 与椭圆 C 交于 P，Q 两点（异于 S），直线 PS，QS 分别交直线 $x=4$ 于 A，B 两点．求证：A，B 两点的纵坐标之积为定值.

22．（13 分）给定一个 n 项的实数列a_1，a_2，…，$a_n(n\in N^*)$，任意选取一个实数 c，变换 $T(c)$ 将数列 a_1，a_2，…，a_n变换为数列$|a_1-c|$，$|a_2-c|$，…，$|a_n-c|$，再将得到的数列继续实施这样的变换，这样的变换可以连续进行多次，并且每次所选择的实数 c 可以不相同，第 k（$k\in N^*$）次变换记为 $T_k(c_k)$，其中 c_k为第 k 次变换时选择的实数．如果通过 k 次变换后，数列中的各项均为 0，则称 $T_1(c_1)$，$T_2(c_2)$，…，$T_k(c_k)$为“k 次归零变换”.

（Ⅰ）对数列：1，3，5，7，给出一个“k 次归零变换”，其中 $k\leqslant 4$；

（Ⅱ）证明：对任意 n 项数列，都存在“n 次归零变换”；

（Ⅲ）对于数列 1，2^2，3^3，…，n^n，是否存在“$n-1$ 次归零变换”？请说明理由.

2020 北京人大学附中高三（下）3 月月考数学

参考答案

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分．在每道小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的，请将答案涂在机读卡上的相应位置上．）

1．$A=\{x\in R|x>-\frac{2}{3}\}$，$B=\{x\in R|x<-1$，或 $x>3\}$；

∴$A\cap B=\{x\in R|x>3\}$．

故选：D.

2．根据图形可看出 $2\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$；

满足 $2\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{c}$共线；

∴ $\lambda=2$.

故选：D.

3．C的方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$，则双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 2x$，即充分性成立，

双曲线$\frac{y^2}{4}-x^2=1$ 的渐近线方程也是 $y=\pm 2x$，即必要性不成立，

故“C的方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$”是“C的渐近线方程为 $y=\pm 2x$”的充分不必要条件，

故选：A.

4．由题意可得，冠军得分比其他参赛人员高，且获胜场次比其他人都少，所以冠军与其他匹配场次中，平均至少为 3 场，

A选项：若最少 4 人，当冠军 3 次平局时，得 3 分，其他人至少 1 胜 1 平局，最低得 3 分，故 A不成立，

B选项：若最少 5 人，当冠军 1 负 3 平局时，得 3 分，其他人至少 1 胜 1 平，最低得 3 分，不成立，

当冠军 1 胜 3 平局时，得 5 分，其他人至少 2 胜 1 平，最低得 5 分，不成立，故 B不成立，

C选项：若最少 6 人，当冠军 2 负 3 平局时，得 3 分，其他人至少 1 胜 1 平，最低得 3 分，不成立，

当冠军 1 胜 4 平局时，得 6 分，其他人至少 2 胜 1 平，最低得 5 分，成立，故 C成立，

D选项：$7>6$，故不为最少人数，故不成立，

故选：C.

5．∵设 P 为抛物线的任意一点，

则 P 到焦点的距离等于到准线：$x=-\frac{p}{2}$的距离，

显然当 P 为抛物线的顶点时，P 到准线的距离取得最小值$\frac{p}{2}$.

∴$\frac{p}{2}>1$，即 $p>2$.

故选：D.

6．由于函数 $f(x)=\cos(2x+\phi)$（ϕ 为常数）为奇函数，

则 $\phi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in z$，∴$\cos\phi=0$，

故选：B.

7．由三视图可知几何体为四棱锥 $S-ABCD$，

由侧视图可知棱锥底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，

顶点 S 在底面 $ABCD$ 上的射影 M 为 CD 的中点，

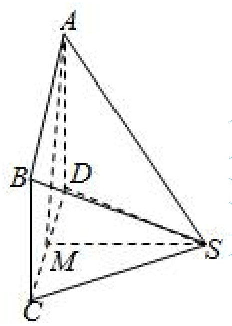
由主视图可知 $SM=\sqrt{3}$，

∴$AM=\sqrt{5}$，$SA=\sqrt{AM^2+SM^2}=2\sqrt{2}$.

由对称性可知 $SB=SA=2\sqrt{2}$.

∴几何体最长的棱为 $2\sqrt{2}$.

故选：B.

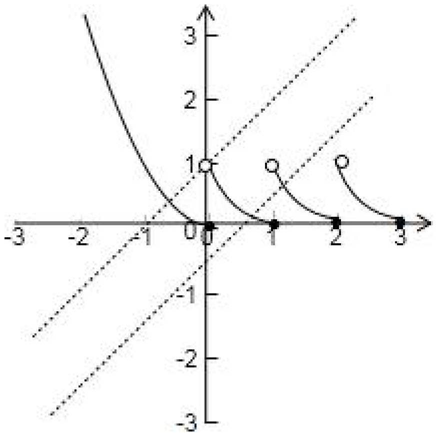


8．函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1，x\le 0\\ f(x-1)，x>0\end{cases}$的图象如图所示，

当 $a<1$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=x+a$ 的图象有两个交点，

即方程 $f(x)=x+a$ 有且只有两个不相等的实数根.

故选：A.



9．由已知中中利普希茨条件的定义

若函数 $f(x)=\sqrt{x}$（$x\geq1$）满足利普希茨条件，

所以存在常数 k，使得对定义域$[1，+\infty)$内的任意两个 x_1，x_2（$x_1\neq x_2$），均有$|f(x_1)-f(x_2)|\leq k|x_1-x_2|$成立，

不妨设 $x_1>x_2$，则 $k\geq\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$.

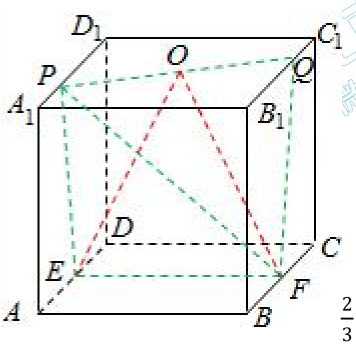
而 $0<\frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<\frac{1}{2}$，所以 k 的最小值为$\frac{1}{2}$.

故选：D.

10．（1）当 $0\leq x\leq\frac{1}{2}$时，点 P 与点 Q 运动的速度相等根据下图得出：面 OEF 把几何体 $PEFQ$ 分割为相等的几何体，

$\because S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，$P$ 到面 OEF 的距离为 x，

$V_{PEFQ}=2V_{P-OEF}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}x=2\bullet\frac{x}{6}=\frac{x}{3}$，



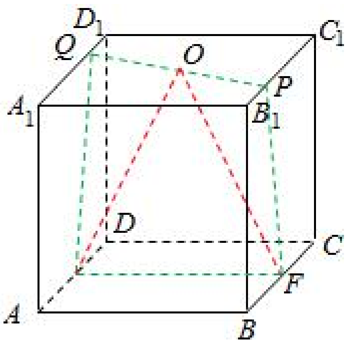
$\frac{2}{3}$

（2）当$\frac{1}{2}<x\leq\frac{3}{2}$时，$P$ 在 AB 上，Q 在 C_1D_1 上，P 到$\frac{1}{2}$，$S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，

$V_{PEFQ}=2V_{P-OEF}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}=$定值.

（3）当$\frac{3}{2}<x\leqslant 2$时，$S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$，$P$到面$OEF$的距离为$2-x$，

$V_{PEFQ}=2V_{P-OEF}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2-x)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x$，



$$V=\begin{cases}\frac{x}{3}，0\leq x<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}，\frac{1}{2}\leq x<\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3}x，\frac{3}{2}\leq x\leq 2\end{cases}$$

故选：C.

二、填空题（本大题共6个小题，每小题5分，共30分）

11．∵$(1-x)(1+x)^5=(1-x)(C_5^0+C_5^1\cdot x+C_5^2\cdot x^2+C_5^3\cdot x^3+C_5^4\cdot x^4+C_5^5\cdot x^5)$，

∴$(1-x)(1+x)^5$展开式中x^3的系数为

$1\times C_5^3-1\times C_5^2=0$.

故答案为：0.

12．复数$z=1-2i$对应的点（1，－2）到原点的距离$d=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$.

故答案：$\sqrt{5}$.

13．先画出函数$f(x)=\begin{cases}|log_4x|，0<x\leq 4，\\ x^2-10x+25，x>4.\end{cases}$的图象，如图：

∵a，b，c，d互不相同，不妨设$a<b<c<d$.

且$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$，

而$-\log_4a=\log_4b$，即有$\log_4a+\log_4b=0$，

可得 $ab=1$，

则 $abcd=cd$，

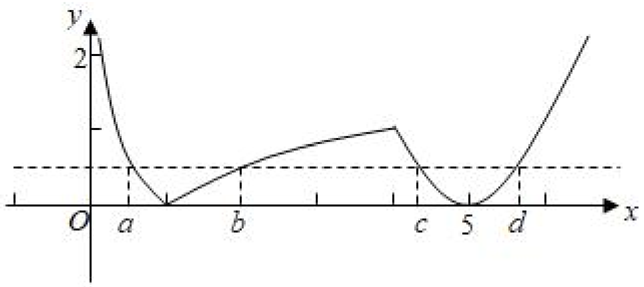
由 $c+d=10$，可得 $cd<\left(\frac{c+d}{2}\right)^2=25$，

且 $cd=c(10-c)=-(c-5)^2+25$，

当 $c=4$ 时，$d=6$，$cd=24$，但此时 b，c 相等，

故 $abcd$ 的范围为（24，25）.

故答案为：（24，25）.



14．由椭圆的方程可得焦距为 4，再由双曲线的渐近线方程可得：$\frac{b}{a}=\tan60°=\sqrt{3}$，由题意可得 $a^2+b^2=4$，解得：$a^2=1$，$b^2=3$，

所以双曲线的方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

故答案为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

15．∵等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，公差 $d=2$，

则 $S_n=n+\frac{2n(n-1)}{2}=n^2$，

$S_{n+2}=(n+2)^2$，

由 $S_{n+2}-S_n=36$，得

$(n+2)^2-n^2=2(2n+2)=36$，解得：$n=8$.

故答案为：8.

16．由已知中：函数 $f(x)$ 定义域内任意的两个自变量的值 x_1，x_2，

当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)\leq f(x_2)$，

且存在两个不相等的自变量值 y_1，y_2，使得 $f(y_1)=f(y_2)$，

就称 $f(x)$ 为定义域上的不严格的增函数．

①$f(x)=\begin{cases}x，x\geq 1\\0，-1<x<1\\x，x\leq -1\end{cases}$，满足条件，为定义在 R 上的不严格的增函数；

②$f(x)=\begin{cases}1，x=-\frac{\pi}{2}\\sinx，-\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$，当 $x_1=-\frac{\pi}{2}$，$x_2\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$f(x_1)>f(x_2)$，故不是不严格的增函数；

③$f(x)=\begin{cases}1，x\geq 1\\0，-1<x<1\\-1，x\leq -1\end{cases}$，满足条件，为定义在 R 上的不严格的增函数；

④$f(x)=\begin{cases}x，x\geq 1\\x+1，x<1\end{cases}$，当 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2\in(1,\frac{3}{2})$，$f(x_1)>f(x_2)$，故不是不严格的增函数；

故已知的四个函数中为不严格增函数的是①③；

∵函数 $g(x)$ 的定义域、值域分别为 A、B，$A=\{1,2,3\}$，$B\subseteq A$，且 $g(x)$ 为定义域 A 上的不严格的增函数，

则满足条件的函数 $g(x)$ 有：

$g(1)=g(2)=g(3)=1$，

$g(1)=g(2)=g(3)=2$，

$g(1)=g(2)=g(3)=3$，

$g(1)=g(2)=1$，$g(3)=2$，

$g(1)=g(2)=1$，$g(3)=3$，

$g(1)=g(2)=2$，$g(3)=3$，

$g(1)=1$，$g(2)=g(3)=2$，

$g(1)=1$，$g(2)=g(3)=3$，

$g(1)=2$，$g(2)=g(3)=3$，

故这样的函数共有 9 个，

故答案为：①③；9．

三、解答题（本大题共 6 个小题，共 80 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．）

17．（Ⅰ）∵$4S_n=(a_n+1)^2$，

∴当 $n=1$ 时，$4a_1=(a_1+1)^2$，解得 $a_1=1$，

当 $n=2$ 时，$4(1+a_2)=(a_2+1)^2$，解得 $a_2=-1$ 或 $a_2=3$，

∵$\{a_n\}$是各项为正数的等差数列，

∴$a_2=3$，得$\{a_n\}$的公差 $d=a_2-a_1=2$，

∴数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$；

（Ⅱ）∵$4S_n=(a_n+1)^2$，

∴$S_n=\frac{(2n-1+1)^2}{4}=n^2$，

∴$S_n-\frac{7}{2}a_n=n^2-\frac{7}{2}(2n-1)=n^2-7n+\frac{7}{2}=(n-\frac{7}{2})^2-\frac{35}{4}$，

当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，$S_n-\frac{7}{2}a_n$取得最小值为$-\frac{17}{2}$.

18．证明：（1）设 $AC\cap BD=G$，连接 FG，易知 G 是 AC 的中点，

∵F 是 EC 中点．

∴在△ACE 中，$FG\parallel AE$，…（2 分）

∵$AE\not\subset$平面 BFD，$FG\subset$平面 BFD，

∴$AE\parallel$平面 BFD．…

（2）∵平面 $ABCD\perp$平面 ABE，$BC\perp AB$，

平面 $ABCD\cap$平面 $ABE=AB$，

∴$BC\perp$平面 ABE，又∵$AE\subset$平面 ABE，

∴$BC\perp AE$，

又∵$AE\perp BE$，$BC\cap BE=B$，

∴$AE\perp$平面 BCE，即 $AE\perp BF$，…（6 分）

在△BCE 中，$BE=CB$，F 为 CE 的中点，

∴$BF\perp CE$，$AE\cap CE=E$，

∴$BF\perp$平面 ACE，

又 $BF\subset$平面 BDF，

∴平面 BDF⊥平面 ACE. …

（3）如图建立坐标系，设 AE＝1，

则 B（2，0，0），D（0，1，2），C（2，0，2），F（1，0，1），

设 P（0，a，0），$\overrightarrow{BD}=(-2，1，2)$，$\overrightarrow{BF}=(-1，0，1)$，$\overrightarrow{PB}=(2，-a，0)$

设$\overrightarrow{n_1}$⊥面 BDF，且$\overrightarrow{n_1}=(x_1，y_1，z_1)$，

则由$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{BD}$得 $-2x_1+y_1+2z_1=0$，

由$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{BF}$得 $-x_1+z_1=0$，

令 $z_1=1$ 得 $x_1=1$，$y_1=0$，从而$\overrightarrow{n_1}=(1，0，1)$…

设$\overrightarrow{n_2}$⊥面 BDP，且$\overrightarrow{n_2}=(x_2，y_2，z_2)$，则

由$\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{BD}$得 $-2x_2+y_2+2z_2=0$，

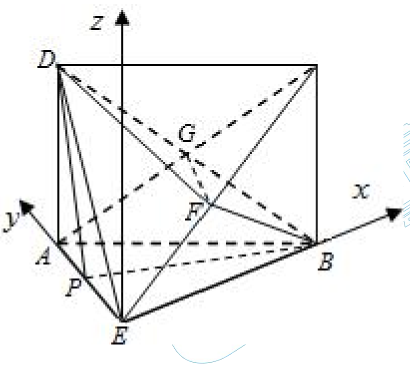
由$\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{PB}$得 $2x_2-ay_2=0$，

令 $y_2=2$ 得 $x_2=a$，$z_2=a-1$，从而$\overrightarrow{n_2}=(a，2，a-1)$，

$cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|a+a-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+4+(a-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

解得 a＝0 或 a＝1（舍）

即 P在 E处. …



19. （1）由图象可知交通得分排名前 5 名的景点中，安全得分大于 90 分的景点有 3 个，

∴从交通得分排名前 5 名的景点中任取 1 个，其安全得分大于 90 分的概率为$\frac{3}{5}$.

（2）结合两图象可知景点总分排名前 6 名的景点中，安全得分不大于 90 分的景点有 2 个，

ξ的可能取值为0，1，2.

P（ξ=0）$=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P$（ξ=1）$=\frac{C_4^2\cdot C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P$（ξ=2）$=\frac{C_4^1\cdot C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

∴ξ的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

∴E（ξ）$=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$.

（3）由图象可知26个景点的交通得分全部在80分以上，主要集中在85分附近，

安全得分主要集中在80分附近，且80分以下的景点接近一半，故而$\overline{x_1}>\overline{x_2}$.

20. （Ⅰ）∵$f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$（$x>0$）

∴$f'(x)=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$（$x>0$）

∴当$x=1$时，$f(1)=0$，$f'(1)=-2+a$，

设切线方程为$y=(-2+a)x+b$，代入（1，0），得$b=2-a$，

∴$f(x)$在（1，$f(1)$）处的切线方程为$y=x+2-a$.

（Ⅱ）函数的定义域为（0，+∞），

函数的导数$f'(x)=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$–，

设$g(x)=-x^2+ax-1$，注意到$g(0)=-1$，

①当$a\leqslant0$时，$g(x)<0$恒成立，即$f'(x)<0$恒成立，此时函数$f(x)$在（0，+∞）上是减函数；

②当$a>0$时，判别式$\triangle=a^2-4$，

1°当$0<a\leqslant2$时，$\triangle\leqslant0$，即$g(x)\leqslant0$，即$f'(x)\leqslant0$恒成立，此时函数$f(x)$在（0，+∞）上是减函数；

2°当$a>2$时，令$f'(x)>0$，得：$\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}<x<\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$；

令$f'(x)<0$，得：$0<x<\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$或$x>\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$；

∴当$a>2$时，$f(x)$在区间（$\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，$\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$）单调递增，在（0，$\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$），（$\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，+∞）单调递减；

综上所述，综上当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在（0，+∞）上是减函数，

当 $a>2$ 时，在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2})$，$(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 上是减函数，

在区间 $(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 上是增函数.

（III）（2）由（1）知 $a>2$，$0<x_1<1<x_2$，$x_1x_2=1$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1-[\frac{1}{x_2}-x_2+a\ln x_2]$

$=(x_2-x_1)(1+\frac{1}{x_1x_2})+a(\ln x_1-\ln x_2)$

$=2(x_2-x_1)+a(\ln x_1-\ln x_2)$，

则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-2+\frac{a(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}$，

则问题转为证明 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<1$ 即可，

即证明 $\ln x_1-\ln x_2>x_1-x_2$，

则 $\ln x_1-\ln\frac{1}{x}>x_1-\frac{1}{x_1}$，

即 $\ln x_1+\ln x_1>x_1-\frac{1}{x_1}$，

即证 $2\ln x_1>x_1-\frac{1}{x_1}$ 在（0，1）上恒成立，

设 $h(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x_1}$，$(0<x<1)$，其中 $h(1)=0$，

求导得 $h'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{x^2-2x+1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0$，

则 $h(x)$ 在（0，1）上单调递减，

$\therefore h(x)>h(1)$，即 $2\ln x-x+\frac{1}{x}>0$，

故 $2\ln x>x-\frac{1}{x}$，

则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 成立.

21．解（Ⅰ）由题意得：$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$b=\frac{|0-0+\sqrt{6}|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$，$a^2=b^2+c^2$，解得：$a^2=4$，$b^2=3$，

所以椭圆的方程：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）得，S（2，0），右焦点 F（1，0）由题意得，直线 l 的斜率不为零，设直线 l 为：$x=my+1$，设 P（x'，y'），Q（x''，y''），

联立直线 l 与椭圆的方程整理得：$(4+3m^2)y^2+6my-9=0$，∴$y'+y''=\frac{-6m}{4+3m^2}$，$y'y''=\frac{-9}{4+3m^2}$；

∵$k_{PF}=\frac{y'}{x'-2}$，设直线 FP：$y=\frac{y'}{x'-2}(x-2)$，与 $x=4$ 联立，得 $y=\frac{2y'}{x'-2}$，即 $y_A=\frac{2y'}{x'-2}$，

同理可得：$y_B=\frac{2y''}{x''-2}$，

∴$y_Ay_B=\frac{4y'y''}{(x'-2)(x''-2)}=\frac{4y'y''}{(my'-1)(my''-1)}=\frac{4y'y''}{m^2y'y''-m(y'+y'')+1}=\frac{\frac{-36}{4+3m^2}}{\frac{-9m^2}{4+3m^2}-m\frac{-6m}{4+3m^2}+1}=\frac{-36}{4}=-9$，为定值，

所以 A，B 两点的纵坐标之积为定值 - 9.

22.（Ⅰ）方法 1：T_1（4）：3，1，1，3；T_2（2）：1，1，1，1；T_3（1）：0，0，0，0.

方法 2：T_1（2）：1，1，3，5；T_2（2）：1，1，1，3；T_3（2）：1，1，1，1；T_4（1）：0，0，0，0. . …

（Ⅱ）经过 k 次变换后，数列记为$a_1^{(k)}$，$a_2^{(k)}$，…，$a_n^{(k)}$，$k=1$，2，….

取$c_1=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$，则$a_1^{(1)}=a_2^{(1)}=\frac{1}{2}|a_1-a_2|$，即经 T_1（c_1）后，前两项相等；

取$c_2=\frac{1}{2}(a_2^{(1)}+a_3^{(1)})$，则$a_1^{(2)}=a_2^{(2)}=a_3^{(2)}=\frac{1}{2}|a_3^{(1)}-a_2^{(1)}|$，即经 T_2（c_2）后，前 3 项相等；

…

设进行变换 T_k（c_k）时，其中$c_k=\frac{1}{2}(a_k^{(k-1)}+a_{k+1}^{(k-1)})$，变换后数列变为$a_1^{(k)}$，$a_2^{(k)}$，$a_3^{(k)}$，…，$a_{k+1}^{(k)}$，$a_{k+2}^{(k)}$，…，$a_n^{(k)}$，则$a_1^{(k)}=a_2^{(k)}=a_3^{(k)}=\cdots=a_{k+1}^{(k)}$；

那么，进行第 k+1 次变换时，取$c_{k+1}=\frac{1}{2}(a_{k+1}^{(k)}+a_{k+2}^{(k)})$，

则变换后数列变为$a_1^{(k+1)}$，$a_2^{(k+1)}$，$a_3^{(k+1)}$，…，$a_{k+1}^{(k+1)}$，$a_{k+2}^{(k+1)}$，$a_{k+3}^{(k+1)}$，…，$a_n^{(k+1)}$，

显然有$a_1^{(k+1)}=a_2^{(k+1)}=a_3^{(k+1)}=\cdots=a_{k+1}^{(k+1)}=a_{k+2}^{(k+1)}$；

…

经过 n - 1 次变换后，显然有$a_1^{(n-1)}=a_2^{(n-1)}=a_3^{(n-1)}=\cdots=a_{n-1}^{(n-1)}=a_n^{(n-1)}$；

最后，取$c_n=a_n^{(n-1)}$，经过变换 T_n（c_n）后，数列各项均为 0.

所以对任意数列，都存在“n 次归零变换”． …（9 分）

（Ⅲ）不存在“n - 1 次归零变换”． …

证明：首先，“归零变换”过程中，若在其中进行某一次变换 T_j（c_j）时，$c_j<min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，那么此变换次数便不是最少．这是因为，这次变换并不是最后的一次变换（因它并未使数列化为全零），设先进行 T_j（c_j）后，再进行 T_{j+1}（c_{j+1}），由 $||a_i-c_j|-c_{j+1}|=|a_i-(c_j+c_{j+1})|$，即等价于一次变换 T_j（c_j+c_{j+1}），同理，进行某一步 T_j（c_j）时，$c_j>max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$；此变换步数也不是最小．

由以上分析可知，如果某一数列经最少的次数的“归零变换”，每一步所取的 c_i 满足 $min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}\leqslant c_i\leqslant max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$．

以下用数学归纳法来证明，对已给数列，不存在“$n-1$ 次归零变换”．

（1）当 $n=2$ 时，对于 1，4，显然不存在“一次归零变换”，结论成立．

（由（Ⅱ）可知，存在“两次归零变换”变换：$T_1(\frac{5}{2})$，$T_2(\frac{3}{2})$）

（2）假设 $n=k$ 时成立，即 1，2^2，3^3，…，k^k 不存在“$k-1$ 次归零变换”．

当 $n=k+1$ 时，假设 1，2^2，3^3，…，k^k，$(k+1)^{k+1}$ 存在“k 次归零变换”．

此时，对 1，2^2，3^3，…，k^k 也显然是“k 次归零变换”，由归纳假设以及前面的讨论不难知 1，2^2，3^3，…，k^k 不存在“$k-1$ 次归零变换”，则 k 是最少的变换次数，每一次变换 c_i 一定满足 $1\le c_i\le k^k$，$i=1, 2, \cdots, k$.

因为 $|\cdots||(k+1)^{k+1}-c_1|-c_2|-\cdots-c_k|=(k+1)^{k+1}-(c_1+c_2+\cdots+c_k)\ge(k+1)^{k+1}-k\cdot k^k>0$

所以，$(k+1)^{k+1}$ 绝不可能变换为 0，与归纳假设矛盾．

所以，当 $n=k+1$ 时不存在“k 次归零变换”．

由（1）（2）命题得证．　　　　　…（13 分）