一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是正确选项）

抛物线方程

1. 抛物线以 x 轴为对称轴，顶点在坐标原点，焦点到准线的距离为 4，则抛物线的方程为（　　）

A. $y^2=8x$　　B. $y^2=-8x$

C. $y^2=8x$ 或 $y^2=-8x$　　D. $x^2=8y$ 或 $x^2=-8y$

【答案】C

【详解】当抛物线的焦点在 x 轴的正半轴上时，设抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$，

由 $p=4$，所以抛物线方程为 $y^2=8x$；

当抛物线的焦点在 x 轴的负半轴上时，设抛物线的方程为 $y^2=-2px(p>0)$，

由 $p=4$，所以抛物线方程为 $y^2=-8x$，

所以所求抛物线的方程为 $y^2=\pm 8x$.

故选：C.

2. 设 P 是双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上的点，若 F_1，F_2 是双曲线的两个焦点，则 $||PF_1|-|PF_2||$ 等于(　　)

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 10

【答案】　C

3. 已知 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，那么函数在 $x=\pi$ 处的瞬时变化率为（　　）

A. $-\frac{1}{\pi}$　　B. 0　　C. $-\frac{1}{\pi^2}$　　D. $\frac{1}{\pi}$

【答案】　A

【解析】因为 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,

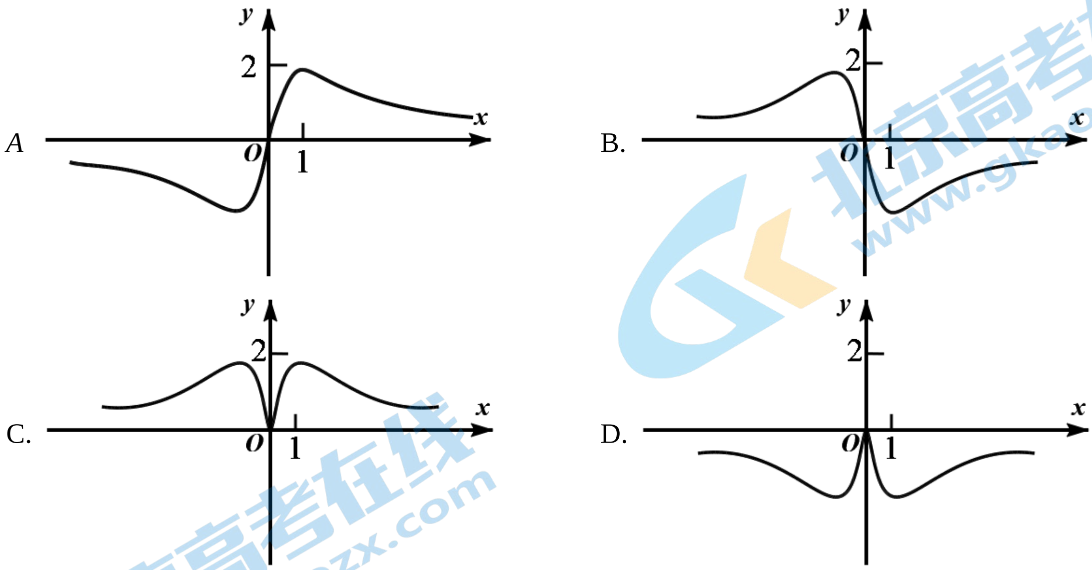
所以 $f'(\pi)=\frac{-\pi}{\pi^2}=-\frac{1}{\pi}$.

4. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，定点 $A(3,1)$，M 为抛物线上一点，则 $|MA|+|MF|$ 的最小值为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】B

5.（2020•天津卷）函数 $y=\frac{4x}{x^2+1}$ 的图象大致为（　　）



【答案】A

【解析】由题意首先确定函数的奇偶性，然后考查函数在特殊点的函数值排除错误选项即可确定函数的图象.

【详解】由函数的解析式可得：$f\left(-x\right)=\dfrac{-4x}{x^2+1}=-f\left(x\right)$，则函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，其图象关于坐标原点对称，选项 CD 错误；当 $x=1$时，$y=\dfrac{4}{1+1}=2>0$，选项 B 错误.故选：A.

【点睛】函数图象的识辨可从以下方面入手：(1)从函数的定义域，判断图象的左右位置；从函数的值域，判断图象的上下位置．(2)从函数的单调性，判断图象的变化趋势．(3)从函数的奇偶性，判断图象的对称性．(4)从函数的特征点，排除不合要求的图象．利用上述方法排除、筛选选项．

6．已知函数 $f(x)=lnx+ax^2$，那么“$a>0$”是“$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数”的(　　)

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解答】解：$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax=\dfrac{2ax^2+1}{x}$，

$a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，

故 $a>0\Rightarrow f(x)$ 递增，是充分条件，

由 $f(x)$ 递增，得 $a>0$ 或 $a=0$，不是必要条件，

故选：A.

双曲线几何性质

7. 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在双曲线上，下列结论不正确的是（ ）

A. 该双曲线的离心率为 $\frac{5}{3}$

B. 该双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$

C. 点 P 到两渐近线的距离的乘积为 $\frac{144}{25}$

D. 若 $PF_1\perp PF_2$，则 ΔPF_1F_2 的面积为 32

【答案】 D

【解析】由题意可知，$a=3$，$b=4$，$c=5$，故离心率 $e=\frac{5}{3}$，故 A 正确；

由双曲线的性质可知，双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的渐近线方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=0$，即 $y=\pm\frac{4}{3}x$，B 正确；

设 $P(x,y)$，则 P 到两渐近线的距离之积为 $\frac{|4x-3y|}{5}\cdot\frac{|4x+3y|}{5}=\frac{|16x^2-9y^2|}{25}=\frac{16\times9}{25}=\frac{144}{25}$，C 正确；

若 $PF_1\perp PF_2$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S=\frac{b^2}{\tan45^\circ}=16$，D 错误．

8. 应用题

某工厂要建造一个长方体状的无盖箱子，其容积为 48 m^3，高为 3 m，如果箱底每 1 m^2 的造价为 15 元，箱壁每 1 m^2 的造价为 12 元，则箱子的总造价最低为（ ）

A. 900 元　　B. 840 元　　C. 818 元　　D. 816 元

【答案】 D

【解析】设箱底一边的长度为 x m，箱子的总造价为 l 元，

根据题意，得 $l=240+72\left(x+\frac{16}{x}\right)$，$l'\equiv72\left(1-\frac{16}{x^2}\right)$.

令 $l'=0$，则 $x=4$ 或 $x=-4$（舍去），即当 $x=4$ 时，l 有最小值 816．因此，当箱底是边长为 4 m 的正方形时，箱子的总造价最低，最低总造价是 816 元．

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1，5]$，其部分自变量与函数值的对应情况如表：

x	-1	0	2	4	5

$f(x)$	3	1	2.5	1	3

$f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示．给出下列四个结论：

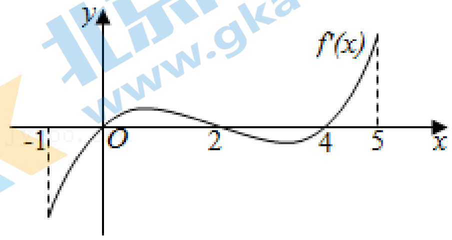
① $f(x)$ 在区间 $[-1，0]$ 上单调递增；

② $f(x)$ 有 2 个极大值点；

③ $f(x)$ 的值域为 $[1，3]$；

④如果 $x\in[t，5]$ 时，$f(x)$ 的最小值是 1，那么 t 的最大值为 4．

其中，所有正确结论的序号是(　　)



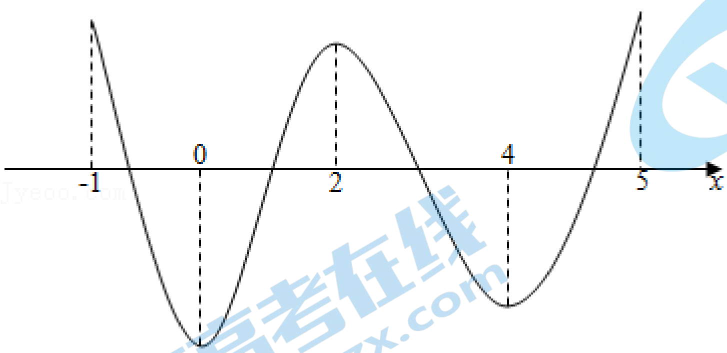
A．③　　　　B．①④　　　　C．②③　　　　D．③④

【答案】D

【解答】解：根据函数的导数 $f'(x)$ 的图象，

整理出函数 $f(x)$ 的图象，

如图所示：



对于①，$f(x)$ 在区间 $[-1，0]$ 上单调递减，故①错误；

对于②，$f(x)$ 有 1 个极大值点，2 个极小值，故②错误；

对于③，根据函数的极值和端点值 $f(x)$ 的值域为 $[1，3]$，故③正确；

对于④，如果$x\in[t，5]$时，$f(x)$的最小值是1，那么t的最大值为4，故④正确.

故选：D.

10．已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{m^2}+y^2=1\ (m>1)$与双曲线$C_2:\frac{x^2}{n^2}-y^2=1\ (n>0)$的焦点重合，$e_1,e_2$分别为$C_1,C_2$的离心率，则（　　）

A．$m>n$且$e_1e_2>1$　　　　B．$m>n$且$e_1e_2<1$

C．$m<n$且$e_1e_2>1$　　　　D．$m<n$且$e_1e_2<1$

【答案】A

【解析】由题意知 $m^2-1=n^2+1$，即 $m^2=n^2+2$，

$(e_1e_2)^2=\frac{m^2-1}{m^2}\cdot\frac{n^2+1}{n^2}=\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$，

代入 $m^2=n^2+2$，得 $m>n$，$(e_1e_2)^2>1$.

二、填空题（共8个空，每空4分，共32分.）

11．若$P_1(1,1)$，$P_2(0,1)$，$P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$四点中恰有三点在椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$上，则椭圆C的方程为________.

【答案】$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

【详解】由于P_3，P_4关于轴对称，故由题设知C经过P_3，P_4两点，所以$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$.

又由$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}>\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$知，$C$不经过点$P_1$，所以点$P_2$在上，所以$b=1$.

因此$a^2=4$，故C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

故答案为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

12．点P是椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$上一点，$F_1$，$F_2$分别是椭圆的左、右焦点，若$|PF_1||PF_2|=12$，则$\angle F_1PF_2$的大小_____.

【答案】60°.

【解答】解：椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，

可得 $2a=8$，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，

可得 $\begin{cases} m+n=2a=8 \\ mn=12 \\ 4c^2=m^2+n^2-2mn\cos\angle F_1PF_2 \end{cases}$，

化简可得：$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle F_1PF_2=60°$

13. 函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在区间 $[-4,4]$ 上的最大值是______________.

【答案】 10

抛物线定义

14. 若点 M 到点 $F(4,0$ 的距离比它到直线 $x+5=0$ 的距离小 1，则点 M 的轨迹方程为________.

【答案】$y^2=16x$

【解答】解法 1：设点 $M(x,y)$，则 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=|x+5|-1$，

当 $x\geqslant -5$ 时，方程化为 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=x+5-1$，

两边平方，得 $y^2=16x(x\geqslant 0)$，

当 $x<-5$ 时，方程化为 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=-x-5-1$，

两边平方，得 $y^2=20(x+1)$，

则 $x\geqslant -1$，与条件矛盾，

综上所述，点 M 的轨迹方程为 $y^2=16x$.

解法 2：因为点 M 到点 $F(4,0)$ 的距离比它到直线 $x+5=0$ 的距离小 1，所以点 M 到点 $F(4,0)$ 的距离与它到直线 $x+4=0$ 的距离相等，

因此，由抛物线的定义知，点 M 的轨迹是以 $F(4,0)$ 为焦点，以直线 $x+4=0$ 为准线的抛物线，

其方程为 $y^2=16x$.

15. 已知 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的函数，满足 $f(1)=3$ 且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 R 上恒有 $f'(x)<2$，则不等式 $f(x)<2x+1$ 的解集为______________

答案：$(1,+\infty)$

16. 若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1\ (a\in R)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则 $a=$________.

答案： 3

【解析】因为函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，

所以 $f'(x)=2x(3x-a)$，$x\in(0,+\infty)$.

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)=2x(3x-a)>0$，

函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(0)=1$，

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点，舍去；

②当 $a>0$ 时，$f'(x)=2x(3x-a)>0$ 的解为 $x>\frac{a}{3}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上递减，在 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 递增，

又 $f(x)$ 只有一个零点，所以 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1=0$，解得 $a=3$，

17. 关于曲线 $C:\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$，有如下结论：

①曲线 C 关于原点对称；

②曲线 C 关于直线 $x\pm y=0$ 对称；

③曲线 C 是封闭图形，且封闭图形的面积大于 2π；

④曲线 C 不是封闭图形，且它与圆 $x^2+y^2=2$ 无公共点；

⑤曲线 C 与曲线 $D:|x|+|y|=2\sqrt{2}$ 有 4 个公共点，这 4 点构成正方形.

其中正确结论的个数是____________.

【答案】4

【解答】解：对于①，将方程中的 x 换成 $-x$， y 换成 $-y$ 方程不变，故①正确；

对于②，将方程中的 x 换成 $-y$， y 换成 $-x$ 方程不变，故②正确；

对于③，由方程得 $x^2>1$， $y^2>1$，故曲线 C 不是封闭图形，故③错；

对于④，联立曲线 $C:\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1$ 圆 $x^2+y^2=2$，方程组无解，无公共点，故④正确；

对于⑤，当 $x>0$， $y>0$ 时，联立曲线 C 与 $x+y=2\sqrt{2}$ 只有一解 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$，根据对称性，

共有 4 个交点，这 4 点构成正方形，正确.

故答案为：①②④⑤

18. 若存在实常数 k 和 b 使得函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 对其公共定义域上的任意实数 x 都满足 $F(x)\geq kx+b$ 和 $G(x)\leq kx+b$ 恒成立，则称直线 $y=kx+b$ 为 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的"隔离直线"．已知函数 $f(x)=x^2(x\in R)$， $g(x)=\dfrac{1}{x}(x<0)$， $h(x)=2e\ln x$，则有下列命题：

① $F(x)=f(x)-g(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},0)$ 内单调递增；

② $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间存在"隔离直线"，且 b 的最小值为 -4；

③ $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间存在"隔离直线"，且 k 的取值范围是 $(-4,0]$；

④ $f(x)$ 和 $h(x)$ 之间存在唯一的"隔离直线" $y=2\sqrt{e}x-e$．

其中真命题的序号为__________．（请填上所有正确命题的序号）

【答案】 ①②④

【解析】① 因为 $F(x)=f(x)-g(x)=x^2-\frac{1}{x}$，当 $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$ 时，$F'(x)=2x+\frac{1}{x^2}>0$，所以 $F(x)=f(x)-g(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0\right)$ 内单调递增，故①正确；

对于②③，设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的隔离直线为 $y=kx+b$，则 $x^2\geq kx+b$ 对于一切 $x<0$ 成立，则有 $\Delta_1=k^2+4b\leq 0$．又因为 $\frac{1}{x}\leq kx+b$ 对于一切 $x<0$ 成立，则 $kx^2+bx-1\leq 0$，既 $\Delta_2=b^2+4k\leq 0$，$k\leq 0$，$b\leq 0$，即有 $k^2\leq -4b$ 且有 $b^2\leq -4k$，所以 $k^4\leq 16b^2\leq -64k\Rightarrow -4\leq k\leq 0$，同理得 $-4\leq b\leq 0$，故②正确，③错误；④函数 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的图象在 $x=\sqrt{\mathrm{e}}$ 处有公共点，若存在 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的隔离直线，则该直线过这个公共点．设隔离直线的斜率为 k，则隔离直线的方程为 $y-\mathrm{e}=k\left(x-\sqrt{\mathrm{e}}\right)$，即 $y=kx-k\sqrt{\mathrm{e}}+\mathrm{e}(x\in\mathbf{R})$，可得 $x^2-kx+k\sqrt{\mathrm{e}}-\mathrm{e}\geq 0$ 当 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立．则 $\Delta\leq 0$，解得 $k=2\sqrt{\mathrm{e}}$，此时直线方程为 $y=2\sqrt{\mathrm{e}}x-\mathrm{e}$．

下面证明 $h(x)\leq 2\sqrt{\mathrm{e}}x-\mathrm{e}$．令 $G(x)=2\sqrt{\mathrm{e}}x-\mathrm{e}-h(x)=2\sqrt{\mathrm{e}}x-\mathrm{e}-2\mathrm{e}\ln x$，则 $G'(x)=\frac{2\sqrt{\mathrm{e}}(x-\sqrt{\mathrm{e}})}{x}$，当 $x=\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，$G'(x)=0$，当 $0<x<\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，$G'(x)<0$，当 $x>\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，$G'(x)>0$，当 $x=\sqrt{\mathrm{e}}$ 时，$G(x)$ 取到极小值 0，也是最小值．所以，$G(x)=2\sqrt{\mathrm{e}}x-\mathrm{e}-h(x)\geq 0$，则 $h(x)\leq 2\sqrt{\mathrm{e}}x-\mathrm{e}$ 在 $x>0$ 时恒成立．所以 $f(x)$ 和 $h(x)$ 之间存在唯一的"隔离直线"$y=2\sqrt{\mathrm{e}}x-\mathrm{e}$，故④正确．

三、解答题（19 题 12 分，20 题 12 分，21 题 14 分，共 38 分）

19. 已知抛物线 $E:y^2=8x$，

（1）求抛物线的焦点及准线方程；（4 分）

（2）过点 $P(-1,1)$ 的直线 l_1 与抛物线 E 只有一个公共点，求直线 l_1 的方程；（4 分）

（3）过点 $M(2,3)$ 的直线 l_2 与抛物线 E 交于点 A，B．若弦 AB 的中点为 M，求直线 l_2 的方程。（4 分）

解：（1）焦点：$(2,0)$，　　　　　　　　　　　　　　........................2 分

准线方程：$x=2$　　　　　　　　　　　　　　　　　........................2 分

（2）当斜率为 0 时，$y=1$；　　　　　　　　　　　　........................1 分

当斜率不为 0 时，设直线 l_1 的方程为 $x+1=m(y-1)$，

与抛物线联立：$y^2-8my+8m+8=0$，

$\Delta=64m^2-32m-32=0$，

解得：$m=1$或$-\dfrac{1}{2}$，

所以 $x-y+2=0$ 或 $2x+y+1=0$。　　　　　　　　　　........................2 分

综上，与抛物线 E 只有一个公共点的直线为 $y=1$ 或 $x-y+2=0$ 或 $2x+y+1=0$。　　　　　　　　　　........................1 分

（3）由题意知直线的斜率存在，设直线 l_2 的斜率为 k，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则有 $y_1^2=8x_1$，$y_2^2=8x_2$，　　　　　　　　　　........................1 分

两式作差可得：$y_1^2-y_2^2=8(x_1-x_2)$，即 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{8}{y_1+y_2}$，　........................1 分

$\because y_1+y_2=2\times3=6$，$\therefore k_{AB}=\dfrac{4}{3}$．　　　　　　　　........................1 分

则直线 l 的方程为 $y-3=\dfrac{4}{3}(x-2)$，即 $4x-3y+1=0$；　........................1 分

20. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，右焦点为$F$，点$A(a,0)$，且$|AF|=1$。

（1）求椭圆C的方程；（4 分）

（2）过点F的直线l（不与x轴重合）交椭圆C于点M,N，直线MA,NA分别与直线$x=4$交于点P,Q，求$\angle PFQ$的大小．（8 分）

解：（1）由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a-c=1,\end{cases}$ ……………………1 分

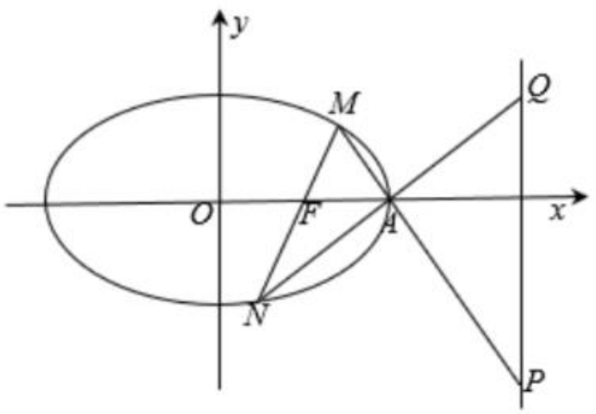
解得 $a=2$，$c=1$，……………………1 分

从而 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，……………………1 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．……………………1 分

（2）当直线 l 的斜率不存在时，有

$M\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$N\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，$P(4,-3)$，$Q(4,3)$，$F(1,0)$，



则 $\overrightarrow{FP}=(3,-3)$，$\overrightarrow{FQ}=(3,3)$，

故 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$，即 $\angle PFQ=90°$． ……………………1 分

当直线 l 的斜率存在时，设 l：$y=k(x-1)$，其中 $k\neq 0$．

联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$

得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$． ……………………1 分

由题意，知 $\Delta>0$ 恒成立，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$． ……………………1 分

直线 MA 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

令 $x=4$，得 $y_P=\frac{2y_1}{x_1-2}$，

即 $P\left(4,\frac{2y_1}{x_1-2}\right)$. ……………………1 分

同理可得 $Q\left(4,\frac{2y_2}{x_2-2}\right)$. ……………………1 分

所以 $\overrightarrow{FP}=\left(3,\frac{2y_1}{x_1-2}\right)$，$\overrightarrow{FQ}=\left(3,\frac{2y_2}{x_2-2}\right)$. ……………………1 分

因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}&=9+\frac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}\\&=9+\frac{4k^2(x_1-1)(x_2-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}\\&=9+\frac{4k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\\&=9+\frac{4k^2\left(\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}+1\right)}{\frac{4k^2-12}{4k^2+3}-\frac{16k^2}{4k^2+3}+4}\\&=9+\frac{4k^2[(4k^2-12)-8k^2+(4k^2+3)]}{(4k^2-12)-16k^2+4(4k^2+3)}\\&=0\end{aligned}$$

……………………2 分

所以 $\angle PFQ=90^\circ$.

综上，$\angle PFQ=90^\circ$.

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{x}+a^2x+alnx$，实数 $a>0$.

（1）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；（4 分）

（2）讨论函数 $f(x)$ 在区间 $(0,10)$ 上的单调性和极值情况；（5 分）

（3）若存在 $x\in(0,+\infty)$，使得关于 x 的不等式 $f(x)<2+a^2x$ 成立，求实数 a 的取值范围.（5 分）

解：

（1）函数定义域为 $(0,+\infty)$

当 $a=2$ 时，$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+4+\dfrac{2}{x}=\dfrac{4x^2+2x-2}{x^2}$，........................1 分

所以 $f'(1)=4$ 且 $f(1)=6$，........................2 分

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-6=4(x-1)$，即 $4x-y+2=0$。........................1 分

（2）$f'(x)=-\dfrac{2}{x^2}+a^2+\dfrac{a}{x}=\dfrac{a^2x^2+ax-2}{x^2}=\dfrac{(ax+2)(ax-1)}{x^2}$，$(x>0)$，........................1 分

令 $f'(x)=0$，可得 $x=\dfrac{1}{a}$，$x=-\dfrac{2}{a}$（舍）.

①当 $\dfrac{1}{a}<10$ 即 $a>\dfrac{1}{10}$ 时，

当 x 变化时，$f'(x), f(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(0,\dfrac{1}{a})$	$\dfrac{1}{a}$	$(\dfrac{1}{a},10)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	□	极小值	□

........................1 分

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在区间 $(\dfrac{1}{a}$，$10)$ 上的单调递增，$f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{a}$ 时取到极小值 $f(\dfrac{1}{a})=3a-a\ln a$，无极大值。........................1 分

②当 $\dfrac{1}{a}\geq 10$ 即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{10}$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,10)$ 上单调递减，无极值．........................1 分

综上所述，当 $a>\dfrac{1}{10}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在区间 $(\dfrac{1}{a}$，$10)$ 上的单调递

增， $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 时取到极小值 $f(\frac{1}{a})=3a-a\ln a$ ，无极大值。

当 $0<a\leqslant\frac{1}{10}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,10)$ 上单调递减，无极值．　　　　……………………1 分

（3）存在 $x\in(0,+\infty)$ ，使得不等式 $f(x)<2+a^2x$ 成立

等价于存在 $x\in(0,+\infty)$ ，使得不等式 $\frac{2}{x}+alnx-2<0$ 成立，　　　　……………………1 分

令 $g(x)=\frac{2}{x}+alnx-2$ ， $(x>0)$ ，

$g'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{a}{x}=\frac{ax-2}{x^2}$ ，

$\because a>0$，当 x 变化时， $g'(x),g(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{2}{a})$	$\frac{2}{a}$	$(\frac{2}{a},+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	□	极小值	□

所以当 $x=\frac{2}{a}$ 时， $g(x)$ 取到最小值 $g(\frac{2}{a})=a+a(ln2-lna)-2$ ，　　……………………1 分

依题意 $a+aln2-alna-2<0$.

令 $h(x)=x+xln2-xlnx-2$ ，　　　　……………………1 分

$h'(x)=ln2-lnx$ ，令 $h'(x)=0$ 可得 $x=2$.

当 x 变化时， $h'(x),h(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	□	极大值	□

所以当 $x=2$ 时， $h(x)$ 取到最大值且 $h(2)=0$ 。……………………1 分

所以满足 $a+aln2-alna-2<0$ 的实数 a 的取值范围是 $(0，2)\cup(2，+\infty)$. …………………1 分