

## 数学

(清华附中高 21 级)

2022.11.

命题人: 高二数学备课组 审题人: 周俊

## 第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合  $A = \{x | -4 < x < 2\}$ ,  $B = \{x | x^2 \leq 9\}$ , 则  $A \cup B = ( \quad )$

(A)  $(-4, 3]$  (B)  $[-3, 2)$

(C)  $(-4, 2)$  (D)  $[-3, 3]$

2. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列, 首项  $a_1 = 2$ , 公差  $d = 3$ , 若  $a_n + a_{n-2} = 28$ , 则  $n = ( \quad )$

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) 4

3. 若两条直线  $ax + 2y - 1 = 0$  与  $x - 2y - 1 = 0$  垂直, 则  $a$  的值为  $( \quad )$

(A) 1 (B) -1

(C) -4 (D) 4

4. 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ , 则  $\sin 2\alpha = ( \quad )$

(A)  $-\frac{24}{25}$  (B)  $-\frac{7}{25}$

(C)  $\frac{7}{25}$  (D)  $\frac{24}{25}$

5. 过点  $(1, 2)$  作圆  $x^2 + y^2 = 5$  的切线, 则切线方程为  $( \quad )$

(A)  $x = 1$  (B)  $3x - 4y + 5 = 0$

(C)  $x + 2y - 5 = 0$  (D)  $x = 1$  或  $x + 2y - 5 = 0$

6. 若  $f(x) = \begin{cases} x+a, & x < 0 \\ bx-1, & x > 0 \end{cases}$  是奇函数, 则  $( \quad )$

(A)  $a = 1, b = -1$  (B)  $a = -1, b = 1$  (C)  $a = 1, b = 1$  (D)  $a = -1, b = -1$

7. 设  $x, y \in R$ , 则 " $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ " 是 " $\exists \theta \in R, \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ " 的  $( \quad )$

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1, F_2$ ,  $O$ 为坐标原点, 若以 $F_1F_2$ 为直径的圆与椭圆 $E$ 在第一象限交于点 $P$ , 且 $\triangle OPF_1$ 是等边三角形, 则椭圆 $E$ 的离心率为 ( )

- (A)  $\frac{1}{2}$                       (B)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$                       (C)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$                       (D)  $\sqrt{3}-1$

9. 已知 $M$ 为 $\triangle ABC$ 所在平面内的一点,  $|\overline{MB}| = |\overline{MC}| = 1$ , 且 $\overline{AB} = \overline{MB} + \overline{MC}$ ,  $\overline{MB} \cdot \overline{MC} = -\frac{1}{2}$ , 则 $\overline{CA} \cdot \overline{CB} =$  ( )

- (A) 0                      (B) 1                      (C)  $\sqrt{3}$                       (D) 3

10. 某工厂产生的废气经过滤后排放, 过滤过程中废气的污染物含量 $P$  (单位:  $\text{mg/L}$ ) 与时间 $t$  (单位:  $\text{h}$ ) 之间的关系为 $P = P_0 e^{-kt}$ . 其中 $P_0, k$ 是正的常数. 如果在前 $10\text{h}$ 污染物减少 $19\%$ , 那么再过 $5\text{h}$ 后污染物还剩余 ( )

- (A)  $40.5\%$                       (B)  $54\%$                       (C)  $65.6\%$                       (D)  $72.9\%$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

11. 已知 $a, b$ 均为实数, 若 $b+i = i(a+i)$ , 则 $a+b =$ \_\_\_\_\_.

12. 已知椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{m} = 1$ 的一个焦点是 $(0, 2)$ , 则 $m =$ \_\_\_\_\_.

13. 若直线 $y = kx$ 被圆 $C: x^2 + y^2 + 2x = 0$ 截得的弦长为 $1$ , 则 $k =$ \_\_\_\_\_.

14. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 定点 $A(2, 0)$ , 点 $B$ 为曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 上的动点, 则线段 $AB$ 长度的最小值是\_\_\_\_\_; 若第一象限存在点 $C$ , 使得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 且 $\angle A = 90^\circ$ , 则线段 $OC$ 的最大值为\_\_\_\_\_.

15. 无穷数列 $\{a_n\}$ 满足:  $a_1 \in (0, 1)$ ,  $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} - a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 其前 $n$ 项和记为 $S_n$ . 给出下列四个结论:

①  $|a_2 - a_1| \leq \frac{1}{2}$ ;

② 数列 $\{a_n\}$ 单调递增;

③ 设数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ , 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , 使得 $T_{n_0} - S_{n_0} > \frac{1}{2}$ ;

④ 若 $a_1 \leq \frac{1}{4}$ , 则当 $n > \frac{1}{8a_1}$ 时, 一定有 $a_{n+1} > \frac{1}{4}$ .

其中, 所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本小题 14 分) 已知函数  $f(x) = \cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + m (\omega > 0, m \in R)$  的最小正周期为  $\pi$ ，且  $f(x)$  的图像经过点  $(0, \frac{1}{2})$ 。

(I) 求  $\omega$  和  $m$  的值；

(II) 若函数  $f(x)$  在区间  $(0, a)$  内有且仅有 1 个零点，求  $a$  的取值范围。

17. (本小题 14 分) 在锐角  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且  $2a \sin B = \sqrt{3}b$ 。

(I) 求角  $A$  的大小；

(II) 若  $a = 13, c = 15$ ，求  $\triangle ABC$  的面积。

18. (本小题 14 分) 已知椭圆  $M: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ，圆  $N: (x+1)^2 + y^2 = 5$ ，直线  $l$  过椭圆  $M$  右焦点  $F$  且倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$ 。

(I) 求直线  $l$  方程及椭圆  $M$  的焦距。

(II) 直线  $l$  交椭圆  $M$  于  $A, B$  两点，直线  $l$  交圆  $N$  于  $C, D$  两点，求  $\frac{|AB|}{|CD|}$ 。

19. (本小题 14 分) 已知函数  $f(x) = xe^x$ 。

(I) 求曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程；

(II) 求函数  $f(x)$  的单调区间和极值；

(III) 若  $f(x) > a(\frac{1}{2}x^2 + x) + 1$  在  $x \in (1, +\infty)$  上恒成立，求实数  $a$  的取值范围。

20. (本小题 14 分) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $(1, \frac{3}{2})$ ， $E$  的离心率  $e = \frac{1}{2}$ 。

(I) 求椭圆的标准方程；

(II) 设点  $A, B$  为椭圆左右顶点，过点  $H(4, 0)$  且不与  $x$  轴重合的直线  $l$  分别交  $E$  于  $C, D$ 。

直线  $x = 4$  分别交直线  $AC$  和  $BD$  于  $P, Q$  点，求证：  $|PH| = |QH|$ 。

21. (本小题 15 分) 数列  $\{a_n\}: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 4)$  满足:  $a_1 = 1, a_n = m, a_{k+1} - a_k = 0$  或  $1$

( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ). 对任意  $i, j$ , 都存在  $s, t$ , 使得  $a_i + a_j = a_s + a_t$ , 其中  $i, j, s, t \in \{1, 2, \dots, n\}$

且两两不相等.

(I) 若  $m = 2$ , 直接写出下列三个数列中所有符合题目条件的数列的序号:

① 1,1,1,2,2,2:    ② 1,1,1,1,2,2,2,2:    ③ 1,1,1,1,1,2,2,2,2

(II) 记  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . 若  $m = 3$ , 证明:  $S \geq 20$ ;

(III) 若  $m = 2022$ , 求  $n$  的最小值.

请将全部答案都写在答题纸上!

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯