

# 房山中学 2022-2023 学年度第一学期期中检测试卷

## 高三数学

本试卷共 4 页，总分 150 分。考试时间 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回，试卷自行保存。

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合  $A = \{x | -3 < x \leq 2\}$ ， $B = \{x | -2 < x \leq 3\}$ ，则  $A \cup B =$

- (A)  $(-3, 3]$     (B)  $(-3, 3)$     (C)  $(-3, 2]$     (D)  $(-2, 2]$

(2) 已知向量  $a = (2, -1)$ ， $b = (3, x)$ 。若  $a \cdot b = 3$ ，则  $x =$

- (A) 3    (B) 4    (C) 5    (D) 6

(3) 已知命题  $p: \forall x \geq 0, 2^x = 3$ ，则

- (A)  $\neg p: \forall x < 0, 2^x \neq 3$     (B)  $\neg p: \forall x \geq 0, 2^x \neq 3$   
(C)  $\neg p: \exists x < 0, 2^x \neq 3$     (D)  $\neg p: \exists x \geq 0, 2^x \neq 3$

(4) 要得到函数  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$  的图象，只需将函数  $y = \sin 2x$  的图象

- (A) 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位    (B) 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位  
(C) 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位    (D) 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位

(5) 设  $a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$ ， $b = \log_2 \frac{1}{3}$ ， $c = \log_2 3$ ，则

- (A)  $a > b > c$     (B)  $c > a > b$     (C)  $a > c > b$     (D)  $c > b > a$

(6) 在  $\triangle ABC$  中， $a = 2$ ， $A = \frac{\pi}{6}$ ， $b = 2\sqrt{3}$ ，则  $\angle C =$

- (A)  $\frac{\pi}{6}$     (B)  $\frac{\pi}{3}$     (C)  $\frac{\pi}{6}$  或  $\frac{\pi}{2}$     (D)  $\frac{\pi}{3}$  或  $\frac{\pi}{2}$

(7) 以边长为 2 的正三角形的一边所在直线为旋转轴，将该正三角形旋转一周所得几何体的表面积为

- (A)  $\sqrt{3}\pi$     (B)  $2\pi$     (C)  $2\sqrt{3}\pi$     (D)  $4\sqrt{3}\pi$

(8) 设非零向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{b}|=2, |\vec{a}|=1$  且  $\vec{b}$  与  $\vec{a}$  的夹角为  $\theta$ , 则 “ $|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{3}$ ” 是 “ $\theta=\frac{\pi}{3}$ ” 的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

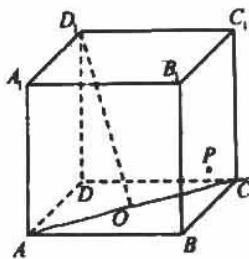
(9) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$  若关于  $x$  的方程  $f(x) - ax - a = 0$  有三个不相等的实数根,

则实数  $a$  的取值范围是

- (A)  $[\frac{1}{2}, +\infty)$  (B)  $(0, +\infty)$  (C)  $(0, 1)$  (D)  $(0, \frac{1}{2})$

(10) 如图, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2, 点  $O$  为底面  $ABCD$  的中心, 点  $P$  在侧面  $BB_1C_1C$  的边界及其内部运动. 给出下列四个结论:

- ①  $D_1O \perp AC$ ;  
② 存在一点  $P$ ,  $D_1O \parallel B_1P$ ;  
③ 若  $D_1O \perp OP$ , 则  $\triangle D_1C_1P$  面积的最大值为  $\sqrt{5}$ ;  
④ 若  $P$  到直线  $D_1C_1$  的距离与到点  $B$  的距离相等, 则  $P$  的轨迹为抛物线的一部分.



其中正确结论的个数为

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题: 共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

(11) 已知函数  $f(x) = \log_2(x+a)$ , 若  $f(2) = 2$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

(12) 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\tan A = -2$ , 则  $\cos A =$  \_\_\_\_\_.

(13) 函数  $y = x + \frac{4}{x-1}$  ( $x > 1$ ) 的最小值为 \_\_\_\_\_; 此时  $x$  的值为 \_\_\_\_\_.

(14) 已知  $\triangle ABC$  是边长为 2 的正三角形,  $O, D$  分别为边  $AB, BC$  的中点, 则

- ①  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} =$  \_\_\_\_\_; ② 若  $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ , 则  $x+y =$  \_\_\_\_\_.

(15) 已知函数  $f(x) = \cos^4 x + \sin^2 x$ , 给出下列四个结论:

- ①  $f(x)$  是偶函数 (2)  $\frac{\pi}{2}$  是函数  $f(x)$  的一个周期  
③ 函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内是减函数 (4) 函数  $f(x)$  最小值为  $\frac{3}{4}$

其中所有正确结论的序号是 \_\_\_\_\_

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题共 13 分)

在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 60^\circ$ ， $c = \frac{3}{7}a$ .

(I) 求  $\sin C$  的值；

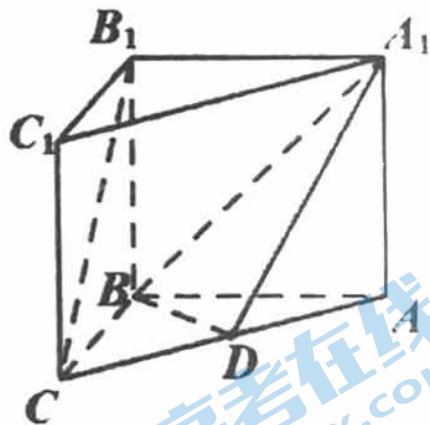
(II) 若  $a=7$ ，求  $\triangle ABC$  的面积.

(17) (本小题共 13 分)

如图，在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $AB \perp BC$ ， $AB=BC=2$ ， $D$  为  $AC$  中点，四边形  $BCC_1B_1$  为正方形.

(I) 求证： $B_1C \parallel$  平面  $A_1BD$ ；

(II) 若  $AB \perp B_1C$ ，求直线  $AB$  与平面  $A_1BD$  所成角的正弦值.



(18) (本小题共 14 分)

已知函数  $f(x) = e^x(2x^2 - 3x)$ .

(I) 求不等式  $f(x) > 0$  的解集；

(II) 求函数  $f(x)$  在区间  $[0, 2]$  上的最大值和最小值.

(19) (本小题共 15 分)

已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0$ ， $\omega > 0$ ， $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ) 由下列四个条件中选出三个：

① 最大值为 2； ② 最小正周期为  $2\pi$ ； ③  $f(0) = -2$ ； ④  $f(-\frac{\pi}{6}) = 0$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的解析式及单调递减区间；

(II) 设  $g(x) = f(x)f(x - \frac{\pi}{6})$ . 当  $x \in [0, m]$  时， $g(x)$  的值域为  $[0, 2 + \sqrt{3}]$ ，求  $m$  的取值范围.

(20) (本小题共 15 分)

已知函数  $f(x) = \ln x - a + \frac{a}{x} (a > 0)$ .

(I) 若曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处与  $x$  轴相切, 求  $a$  的值;

(II) 求函数  $f(x)$  在区间  $(1, e)$  上的零点个数;

(III) 若  $\forall x_1, x_2 \in (1, e), (x_1 - x_2)(|f(x_1)| - |f(x_2)|) > 0$ , 试写出  $a$  的取值范围. (只需写出结论)

(21) (本小题共 15 分)

设集合  $A_{2n} = \{1, 2, 3, \dots, 2n\} (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2)$ . 如果对于  $A_{2n}$  的每一个含有  $m (m \geq 4)$  个元素的子集  $P$ ,  $P$  中必有 4 个元素的和等于  $4n+1$ , 称正整数  $m$  为集合  $A_{2n}$  的一个“相关数”.

(I) 当  $n=3$  时, 判断 5 和 6 是否为集合  $A_6$  的“相关数”, 说明理由;

(II) 若  $m$  为集合  $A_{2n}$  的“相关数”, 证明:  $m - n - 3 \geq 0$ ;

(III) 给定正整数  $n$ . 求集合  $A_{2n}$  的“相关数”  $m$  的最小值.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯