2021 北京理工附中高二（上）10 月月考

数　　学

一．选择题（共 10 小题，满分 40 分，每小题 4 分）

1．用斜二测画法画平面图形时，下列说法正确的是（　　）

A．正方形的直观图为平行四边形　　B．菱形的直观图是菱形

C．梯形的直观图可能不是梯形　　D．正三角形的直观图一定为等腰三角形

2．已知平面 α 和 α 外的一条直线 l，下列说法不正确的是（　　）

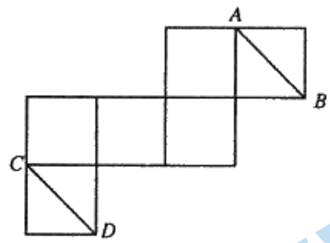
A．若 l 垂直于 α 内的两条平行线，则 $l\perp\alpha$

B．若 l 平行于 α 内的一条直线，则 $l\parallel\alpha$

C．若 l 垂直于 α 内的两条相交直线，则 $l\perp\alpha$

D．若 l 平行于 α 内的无数条直线，则 $l\parallel\alpha$

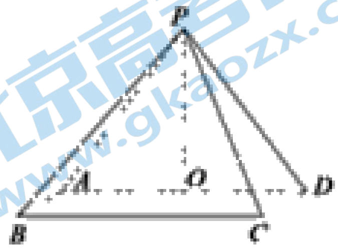
3．如图是一个正方体的平面展开图，则在原正方体中，AB 与 CD 所成的角为（　　）



A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$

C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

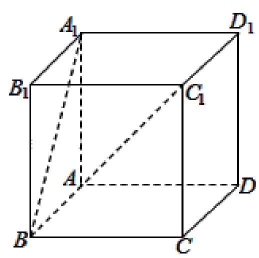
4．已知四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形，点 P 在平面 $ABCD$ 上的射影为 AD 的中点 O．若 $AB=2$，$AD=6$，$PO=4$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积等于（　　）



A．$34+6\sqrt{5}$　　B．$34+4\sqrt{3}$

C．$6+6\sqrt{5}+4\sqrt{3}$　　D．$6+6\sqrt{3}+4\sqrt{13}$

5．如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过 A_1B 且与 AC_1 平行的平面交 B_1C_1 于点 P，则 $PC_1=$（　　）



A．2　　B．$\sqrt{3}$

C．$\sqrt{2}$　　D．1

6．用 a，b，c 表示三条不同的直线，γ 表示平面，给出下列命题，其中真命题的个数是（　　）

①若 $a\parallel\gamma$，$b\parallel a$，则 $b\parallel\gamma$；　　②若 $a\perp b$，$b\perp c$，则 $a\perp c$；

③若 $a // \gamma$，$b // \gamma$，则 $a // b$；　　④若 $a \perp \gamma$，$a \perp b$，则 $b // \gamma$.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

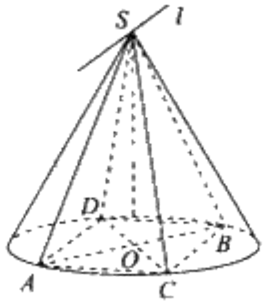
7．如图，已知圆锥的顶点为 S，底面圆 O 的两条直径分别为 AB 和 CD，且 $AB \perp CD$，若平面 $SAD \cap$ 平面 $SBC = l$．以下四个结论中不正确的是（　　）

A．$AD //$ 平面 SBC

B．$l // AD$

C．若 E 是底面圆周上的动点，则 $\triangle SAE$ 的最大面积等于 $\triangle SAB$ 的面积

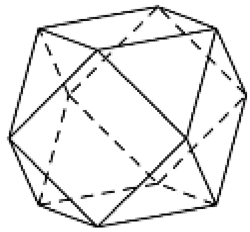
D．l 与平面 SCD 所成的角为 $45°$



8．已知三棱锥 $O-ABC$ 中，A，B，C 三点在以 O 为球心的球面上，$AB = BC = 2$，$\angle ABC = 120°$，且三棱锥 $O-ABC$ 的体积为 $\sqrt{3}$，则球 O 的半径为（　　）

A．2　　B．5　　C．13　　D．$\sqrt{13}$

9．某公园设置了一些石凳供大家休息，每张石凳是由正方体石料截去八个一样的四面体得到的，如图所示.如果一张石凳的体积是 0.18m^3，那么原正方体石料的体积是（　　）



A．0.196m^3　　B．0.216m^3　　C．0.225m^3　　D．0.234m^3

10．我国魏晋时期的数学家刘徽创造了一个称为“牟合方盖”的立体图形来推算球的体积.如图 1，在一个棱长为 $2a$ 的立方体内作两个互相垂直的内切圆柱，其相交的部分就是牟合方盖，如图 2，设平行于水平面且与水平面距离为 h 的平面为 α，记平面 α 截牟合方盖所得截面的面积为 S，则函数 $S = f(h)$ 的图象是（　　）

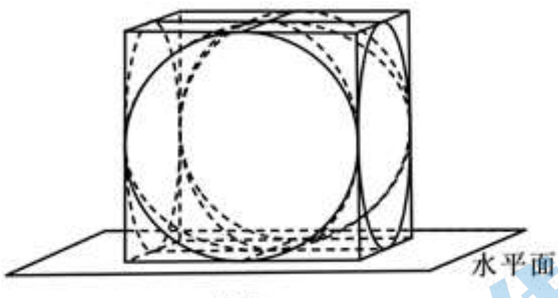


图1

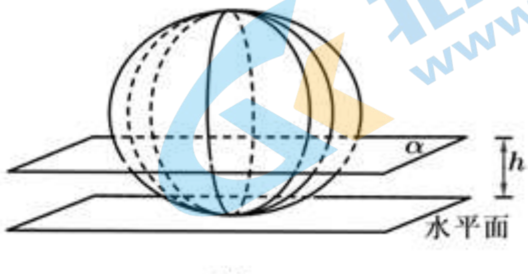
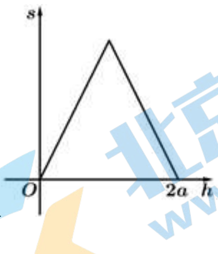
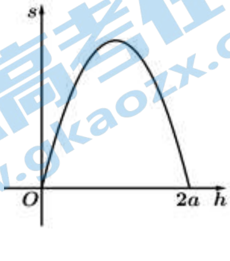
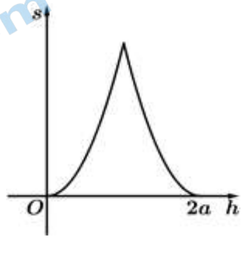
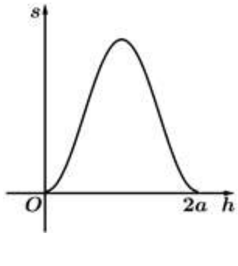


图2

A 

B. 

C. 

D. 

三.　　填空题（共 5 小题，满分 20 分，每小题 4 分）

11. 设 α ， β 是两个不同的平面，直线 $l\perp\alpha$ 且 __β _，可以推出“$\alpha // \beta$”.

12. 正方体外接球的表面积为 16π，则该正方体的表面积为_______.

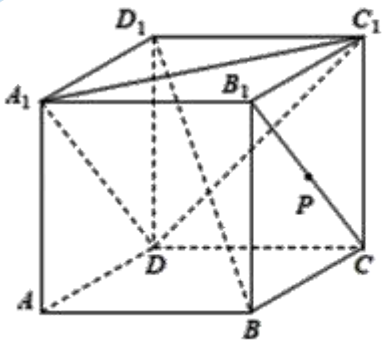
13. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在线段 B_1C 上运动，则正确结论是________.

①直线 $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D

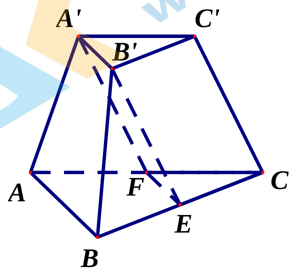
②直线 $AP//$ 平面 A_1C_1D

③三棱锥 $P-A_1C_1D$ 的体积为定值

④异面直线 AP 与 A_1D 所成角的取值范围是$[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}]$



14. 如图，在上、下底面对应边的比为 1∶2 的三棱台中，过上底面的边 $A'B'$作一个平面把三棱台分成两部分，得到的三棱柱和五面体这两部分的体积之比为_______.



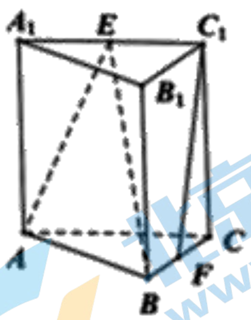
15. 在直角三角形 ABC 中，$AC=1$，D 是斜边 AB 的中点，将△BCD 沿直线 CD 翻折，若在翻折过程中存在某个位置，使得 $CB\perp AD$，则 BC 边长的最大值为______________.

四．解答题（共 4 小题，满分 40 分）

16. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90°$，E，F 分别为 A_1C_1，BC 的中点.

（I）求证：$C_1F//$ 平面 ABE;

（II）求证：平面 $ABE\perp$平面 BB_1C_1C.

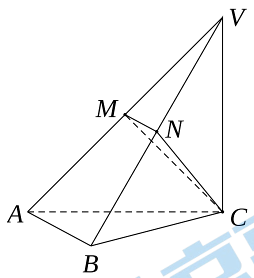


17 如图，在三棱锥$V-ABC$中，平面$VAC\perp$平面ABC，$\triangle ABC$和$\triangle VAC$均是等腰直角三角形，$AB=BC$，$AC=CV=2$，M，N分别为VA，VB的中点.

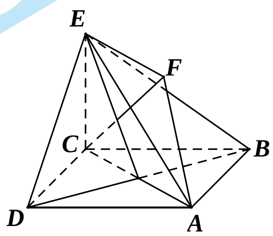
（I）求证：$AB//$平面CMN；

（II）求证：$AB\perp VC$；

（III）求直线VB与平面ABC所成角的正弦值.



18. 如图，正方形$ABCD$和四边形$ACEF$所在的平面互相垂直，$CE\perp AC$，$EF\ /\!/\ AC$，$AB=\sqrt{2}$，$CE=EF=1$



（I）求证：$AF\ /\!/$平面BDE；

（II）求证：$CF\perp$平面BDE.

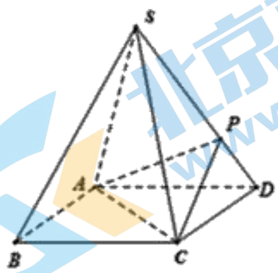
19. 如图所示正四棱锥$S-ABCD$，$SA=SB=SC=SD=2$，$AB=\sqrt{2}$，P为侧棱SD上的点.

（1）求证：$AC\perp SD$；

（2）若$S_{\Delta SAP}=3S_{\Delta APD}$，

（i）求三棱锥$S-APC$的体积.

（ii）侧棱SC上是否存在一点E，使得$BE//$平面PAC．若存在，求$\frac{SE}{EC}$的值；若不存在，试说明理由.



2021 北京理工附中高二（上）10 月月考数学

参考答案

一．选择题（共 10 小题，满分 40 分，每小题 4 分）

1． A．

2．A．

3．C．

4．A．

5．D．

6．A．

7．C．

8．D．

9．B．

10. B．

四． 填空题（共 5 小题，满分 20 分，每小题 4 分）

11.__$l\perp\beta$

12．_32

13．①②③

14. 3:4

15．$\sqrt{3}$

解：设 $BC=x$，由题意得，$AD=CD=BD=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$，

取 BC 中点 E，翻折前，在图 1 中，连接 DE，CD，则 $DE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}$，

翻折后，在图 2 中，此时 $CB\perp AD$.

∵$BC\perp DE$，$BC\perp AD$，∴$BC\perp$平面 ADE，

∴$BC\perp AE$，$DE\perp BC$，

又 $BC\perp AE$，E 为 BC 中点，∴$AB=AC=1$，

$\therefore AE=\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$，$AD=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$，

在△ADE 中：①$\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}+\frac{1}{2}>\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$，②$\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}<\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$，③$x>0$，

由①②③，得 $0<x<\sqrt{3}$.

如图 3，翻折后，当△B_1CD 与△ACD 在一个平面上，

AD 与 B_1C 交于 M，且 $AD\perp B_1C$，$AD=B_1D=CD=BD$，$\angle CBD=\angle BCD=\angle B_1CD$，

又$\angle CBD+\angle BCD+\angle B_1CD=90°$，

$\therefore\angle CBD=\angle BCD=\angle B_1CD=30°$，

$\therefore\angle A=60°$，$BC=AC\tan60°$，此时 $x=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

综上，x 的取值范围为（0，$\sqrt{3}$]，

所以 BC 边长的最大值为$\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

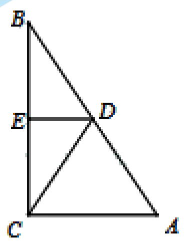


图 1

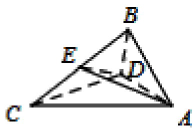


图 2

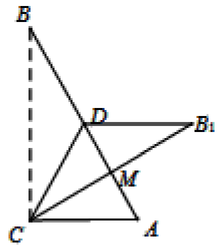


图 3

四．解答题（共 4 小题，满分 40 分）

16．证明：（I）取 AB 的中点 G，连接 EG、GF，如图所示.

$\because G$、F 分别是 AB、BC 的中点，$\therefore FG\parallel AC$，且$FG=\frac{1}{2}AC$.

又$\because E$ 为 A_1C_1 的中点，$\therefore EC_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}AC$，且 $AC\parallel A_1C_1$.

$\therefore GF\parallel EC_1$，且 $GF=EC_1$，

$\therefore$四边形 $EGFC_1$ 是平行四边形，$\therefore C_1F\parallel EG$.

又$\because C_1F\not\subset$平面 ABE，$EG\subset$平面 ABE，$\therefore C_1F\parallel$平面 ABE.

（II）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$\because BB_1\perp$平面 ABC，$AB\subset$平面 ABC，$\therefore BB_1\perp AB$.

又∵ $\angle ABC=90°$，∴$AB\perp BC$.

又 $BB_1\cap BC=B$，∴$AB\perp$平面 BB_1C_1C，

又 $AB\subset$平面 ABE，∴平面 $ABE\perp$平面 BB_1C_1C；

17.证明：（I）在$\triangle VAB$中，M，N 分别为 VA，VB 的中点，

所以 MN 为中位线.

所以 $MN\parallel AB$.

又因为 $AB\not\subset$平面CMN，$MN\subset$平面CMN，

所以 $AB\parallel$ 平面 CMN

（II）在等腰直角三角形$\triangle VAC$中，$AC=CV$，

所以$VC\perp AC$.

因为平面$VAC\perp$平面 ABC，平面$VAC\cap$平面 $ABC=AC$，$VC\subset$平面VAC，

所以$VC\perp$平面 ABC.又因为 $AB\subset$平面 ABC，

所以 $AB\perp VC$.

（III）在平面 ABC 内过点 C 做CH 垂直于 AC，由（II）知，$VC\perp$平面 ABC，

直线VB 与平面 ABC 所成角为$\angle VBC$，

$\sin\angle VBC=\frac{VC}{VB}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

18. 证明：（I）设 AC 与 BD 交与点 G

因为 $EF\parallel AG$，且 $EF=1$，$AG=\dfrac{1}{2}AC=1$.

所以四边形 $AGEF$ 为平行四边形.

所以 $AF\parallel EG$，

因为$EG\subset$平面 BDE，$AF\not\subset$平面 BDE，所以 $AF\parallel$平面 BDE.

（II）因为正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面相互垂直，且 $CE\perp AC$，

平面 $ABCD\cap$平面 $ACEF=AC$，$CE\subset$平面 $ACEF$

所以 $CE\perp$ 平面 $ABCD$.即四边形 $CGFE$ 为正方形，$CF\perp GE$.

同理，$BD\perp$平面$ACEF$，$CF\subset$平面$ACEF$，$CF\perp BD$，$BD\cap GE.=G$

所以，$CF\perp$平面BDE.

19．证明：（1）连BD，设AC交BD于O，由题意$SO\perp AC$.

在正方形$ABCD$中，有$AC\perp BD$，又$SO\cap BD=O$，

$\therefore AC\perp$平面SBD，得$AC\perp SD$；

（2）$\because S_{\Delta SAP}=3S_{\Delta APD}$，$\therefore \frac{PD}{SP}=\frac{1}{3}$，则$PN=PD$，

（i）$V_{S-APC}=\frac{3}{4}V_{S-ADC}=\frac{3}{4}\frac{1}{3}SO\cdot S_{\Delta ADC}=\frac{3}{4}\frac{1}{3}\sqrt{3}\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

（ii）存在，且$\frac{SE}{EC}=2$

过N作PC的平行线交SC于E，连BN，BE.

在$\triangle BDN$中，有$BN/\!/PO$，

$\because PO\subset$平面PAC，$BN\not\subset$平面PAC，$\therefore BN/\!/$平面PAC，

又由于$NE/\!/PC$，

$PC\subset$平面PAC，$NE\not\subset$平面PAC，$\therefore NE/\!/$平面PAC，

$\because BN\cap NE=N$，$\therefore$平面$BEN/\!/$平面PAC，得$BE/\!/$平面PAC.