

(在此卷上答题无效)

2023~2024 学年福州市高三年级 2 月份质量检测

## 数学试题

(完卷时间 120 分钟;满分 150 分)

友情提示:请将所有答案填写到答题卡上!请不要错位、越界答题!

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x < 1\}$ ,  $B = \{-1, 1\}$ , 则  $A \cup B =$

- A.  $(-\infty, 1]$       B.  $(-\infty, 1)$       C.  $\{-1\}$       D.  $\{-1, 1\}$

2. 已知点  $A(2, 2)$  在抛物线  $C: x^2 = 2py$  上, 则  $C$  的焦点到其准线的距离为

- A.  $\frac{1}{2}$       B. 1      C. 2      D. 4

3. 已知  $e_1, e_2$  是两个不共线的向量, 若  $2e_1 + \lambda e_2$  与  $\mu e_1 + e_2$  是共线向量, 则

- A.  $\frac{\lambda}{\mu} = -2$       B.  $\lambda\mu = -2$       C.  $\frac{\lambda}{\mu} = 2$       D.  $\lambda\mu = 2$

4. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 2\sqrt{7}$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为

- A. 2      B.  $2\sqrt{3}$       C. 4      D.  $4\sqrt{3}$

5. 设函数  $f(x) = 3^{|a-2x|}$  在区间  $(1, 2)$  上单调递减, 则  $a$  的取值范围是

- A.  $(-\infty, 2]$       B.  $(-\infty, 4]$       C.  $[2, +\infty)$       D.  $[4, +\infty)$

6. 已知正方形  $ABCD$  的四个顶点都在椭圆上, 椭圆的两个焦点分别在边  $AD$  和  $BC$  上, 则该椭圆的离心率为

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 甲、乙、丙三个地区分别有  $x\%$ ,  $y\%$ ,  $z\%$  的人患了流感, 且  $x, y, z$  构成以 1 为公差的等差数列. 已知这三个地区的人口数的比为  $5:3:2$ , 现从这三个地区中任意选取一人, 在此人患了流感的条件下, 此人来自甲地区的概率最大, 则  $x$  的可能取值为

- A. 1.21      B. 1.34      C. 1.49      D. 1.51

8. 已知函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的定义域均为  $\mathbf{R}$ , 记  $g(x) = f'(x)$ . 若  $g(x-2)$  的图象关于点  $(2, 0)$  对称, 且  $g(2x) - g(-2x-1) = g(1-2x)$ , 则下列结论一定成立的是

- A.  $f(x) = f(2-x)$       B.  $g(x) = g(x+2)$       C.  $\sum_{n=2024} g(n) = 0$       D.  $\sum_{n=2024} f(n) = 0$



二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_2 = 4$ ,  $S_5 = 35$ , 则
- A.  $na_n$  的最小值为 1  
B.  $nS_n$  的最小值为 1  
C.  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  为递增数列  
D.  $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$  为递减数列
10. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=2$ ,  $AA_1=AD=1$ ,  $E$  为  $AB$  的中点, 则
- A.  $A_1B \perp B_1C$   
B.  $A_1D \parallel$  平面  $EB_1C$   
C. 点  $D$  到直线  $A_1B$  的距离为  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$   
D. 点  $D$  到平面  $EB_1C$  的距离为  $\sqrt{3}$
11. 通信工程中常用  $n$  元数组  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  表示信息, 其中  $a_i = 0$  或  $1$  ( $i, n \in \mathbf{N}^*$ ,  $1 \leq i \leq n$ ). 设  $u = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ ,  $v = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ ,  $d(u, v)$  表示  $u$  和  $v$  中相对应的元素 ( $a_i$  对应  $b_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ) 不同的个数, 则下列结论正确的是
- A. 若  $u = (0, 0, 0, 0, 0)$ , 则存在 5 个 5 元数组  $v$ , 使得  $d(u, v) = 1$   
B. 若  $u = (1, 1, 1, 1, 1)$ , 则存在 12 个 5 元数组  $v$ , 使得  $d(u, v) = 3$   
C. 若  $n$  元数组  $w = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \uparrow 0})$ , 则  $d(u, w) + d(v, w) \geq d(u, v)$   
D. 若  $n$  元数组  $w = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \uparrow 1})$ , 则  $d(u, w) + d(v, w) \geq d(u, v)$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 在复平面内, 复数  $z$  对应的点的坐标是  $(2, 1)$ , 则  $i \cdot z =$  \_\_\_\_\_.
13. 底面半径为 2 且轴截面为正三角形的圆锥被平行于其底面的平面所截, 截去一个高为  $\sqrt{3}$  的圆锥, 所得圆台的侧面积为\_\_\_\_\_.
14. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 整点  $P$  (横坐标与纵坐标均为整数) 在第一象限, 直线  $PA, PB$  与  $\odot C: (x+2)^2 + y^2 = 4$  分别切于  $A, B$  两点, 与  $y$  轴分别交于  $M, N$  两点, 则使得  $\triangle PMN$  周长为  $2\sqrt{21}$  的所有点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_.



四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知函数  $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$  ( $0 < \omega < 3$ )， $x = \frac{\pi}{8}$  是  $f(x)$  的零点。

(1) 求  $\omega$  的值；

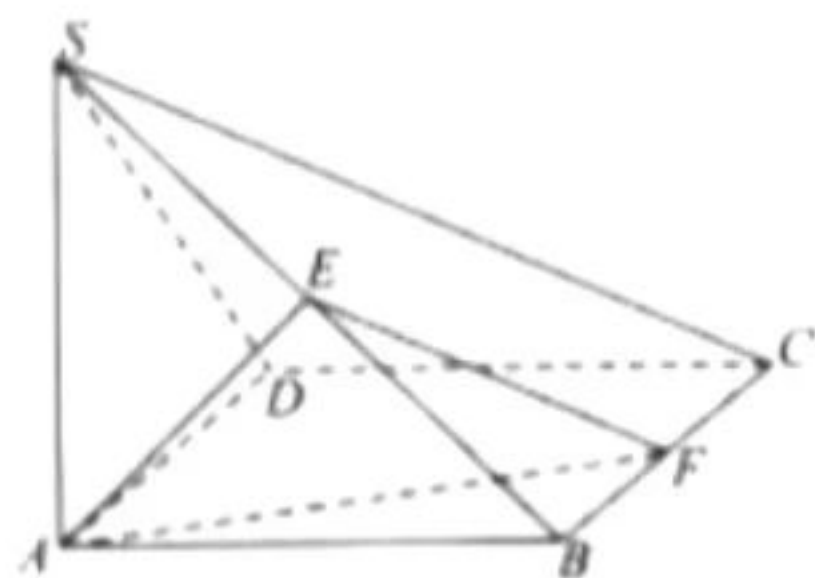
(2) 求函数  $y = f\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)$  的值域。

16. (15 分)

如图，四棱锥  $S-ABCD$  的底面为正方形，平面  $SAD \perp$  平面  $ABCD$ ，点  $E$  在  $SB$  上，且  $AE \perp BC$ 。

(1) 证明： $SA \perp$  平面  $ABCD$ ；

(2) 若  $SA = AB = 2$ ， $F$  为  $BC$  的中点，且  $EF = \sqrt{3}$ ，求平面  $AEF$  与平面  $SAD$  夹角的余弦值。



17. (15 分)

人的性格可以大体分为“外向型”和“内向型”两种，树人中学为了了解这两种性格特征与人的性别是否存在关联，采用简单随机抽样的方法抽取 90 名学生，得到如下数据：

	外向型	内向型
男性	45	15
女性	20	10

(1) 以上述统计结果的频率估计概率，从该校男生中随机抽取 2 人、女生中随机抽取 1 人担任志愿者，设这三人中性格外向型的人数为  $X$ ，求  $X$  的数学期望。

(2) 对表格中的数据，依据  $\alpha = 0.1$  的独立性检验，可以得出独立性检验的结论是这两种性格特征与人的性别没有关联。如果将表格中的所有数据都扩大为原来的 10 倍，在相同的检验标准下，再用独立性检验推断这两种性格特征与人的性别之间的关联性，得到的结论是否一致？请说明理由。

附：参考公式： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$\alpha$	0.1	0.05	0.01
$\chi_{\alpha}$	2.706	3.841	6.635



18. (17分)

已知双曲线  $W: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ ,  $A(-3, 0)$ , 动直线  $l: x - my - 3 = 0$  与  $x$  轴交于点  $B$ ,

且与  $W$  交于  $C, D$  两点,  $t|CD|$  是  $|BC|, |BD|$  的等比中项,  $t \in \mathbf{R}$ .

(1) 若  $C, D$  两点位于  $y$  轴的同侧, 求  $t$  取最小值时  $\triangle ACD$  的周长;

(2) 若  $t=1$ , 且  $C, D$  两点位于  $y$  轴的异侧, 证明:  $\triangle ACD$  为等腰三角形.

19. (17分)

已知函数  $f(x) = x \ln x - x^2 - 1$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 求证:  $f(x) < e^{-x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - 1$ ;

(3) 若  $p > 0, q > 0$  且  $pq > 1$ , 求证:  $f(p) + f(q) < -4$ .