百校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国Ⅱ卷　理科数学

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分，测试时间 120 分钟.
5. 考试范围：高考全部内容.

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

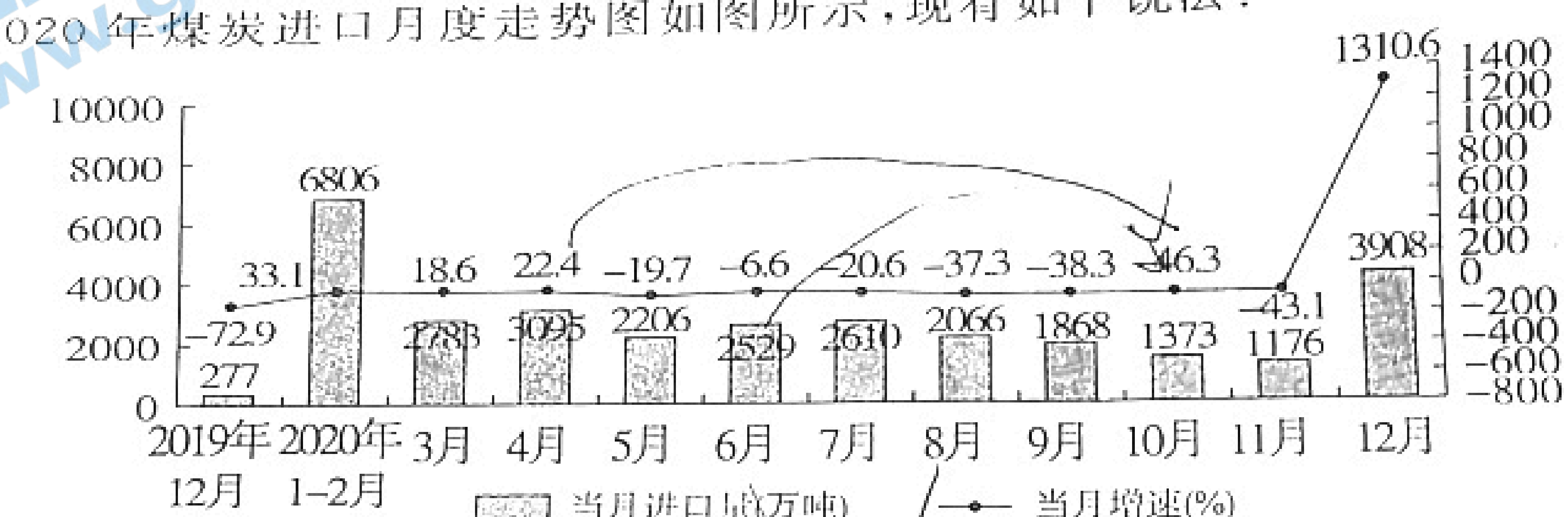
1. 若集合 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{x|x>-1\}$，则 $A\cap(\complement_R B)=$ B

A. $\{x|-1<x<2\}$　　B. $\{x|x\leqslant-1\}$　　C. $\{x|-1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|x\geqslant2\}$

2. $(2+5i)(1-2i)=$ $2+i-10i^2-12+i$　D

A. $-12+i$　　B. $-12-i$　　C. $12-i$　　D. $12+i$

3. 国家统计局发布的 2020 年煤炭进口月度走势图如图所示，现有如下说法：



①2020 年 7 月至 11 月期间，我国月煤炭的进口量逐渐减少；

②2020 年 12 月煤炭进口量比 11 月份增加 2732 万吨；　D

③2020 年 3 月至 10 月煤炭进口量的月平均值超过 2000 万吨.

则上述说法正确的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 若 $a>b>2$，则下列不等式恒成立的是　C

A. $\frac{1}{a-2}>\frac{1}{b}$　　B. $\lg\left(\frac{a-2}{b-2}\right)<0$

C. $\sqrt[3]{a-1}>\sqrt[3]{b-1}$　　D. $\frac{1}{2^a}>\frac{1}{2^b}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_1+2a_{17}<a_1<3a_{13}$，则使得 $a_n>0$ 成立的最小正整数 n 的值为　C

A. 17　　B. 18　　C. 19　　D. 20

6. 为了庆祝学校的元旦晚会，甲、乙、丙、丁计划报名参加晚会的相声、小品、歌唱、舞蹈这 4 个节目，每个同学限报 1 个节目，在乙、丙、丁三个同学报的节目与甲不同的条件下，每个同学报的节目都不相同的概率为　D

A. $\frac{3}{32}$　　B. $\frac{2}{27}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{9}$

7. 已知直线 $l:x-my+3=0$ 将圆 $C:x^2+y^2-6x-4y+2=0$ 的面积平分，过点 $M(-5,m)$ 作圆 C 的切线，切点为 N，则 $|MN|=$　B

$(x-3)^2+(y-2)^2=11$

A. $3\sqrt{3}$　　B. $3\sqrt{6}$　　C. $3\sqrt{5}$　　D. $6\sqrt{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\frac{x(1+\cos x)+2x^2+3x+1}{x}$，则下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称

B. 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

C. 函数 $y=f(x)-5$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点

D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称

9. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，记双曲线 C 过一、三象限的渐近线的倾斜角为 α．若点 M 在过原点且倾斜角为 $\frac{\alpha}{2}$ 的直线上，且 $|MF_1|-|MF_2|=2a$，$\angle OMF_2=90°$，则双曲线 C 的离心率为

A. $2\sqrt{5}-2$　　B. $\sqrt{5}-1$　　C. $2\sqrt{5}-1$　　D. $\sqrt{5}$

10. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为正方形，$SA=AB=6$，平面 α 过 SB,CD,SD 的中点，则平面 α 截四棱锥 $S-ABCD$ 所得的截面面积为

A. $\frac{45}{4}\sqrt{6}$　　B. $\frac{27\sqrt{6}}{2}$ $\frac{54}{4}$　　C. $9\sqrt{6}$ $\frac{36}{4}$　　D. $12\sqrt{6}$ $\frac{48}{4}$

11. 已知函数 $f(x)=2(2|\cos x|+\cos x)\cdot\sin x$，则

A. 当 $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$ 时，$f(x)\in[0,3]$

B. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

C. 函数 $f(x)$ 在 $[\pi,\frac{5\pi}{4}]$ 上单调递减

D. 函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(2k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$

12. 若关于 x 的不等式 $2e^{x+2}\geq x^2+2(1-a)x+a^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围为

A. $[-2e,2e]$

B. $[-\sqrt{2e},\sqrt{2e}]$

C. $[-e,e]$

D. $[-\sqrt{2}e,\sqrt{2}e]$

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分．第 13 题～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22 题～第 23 题为选考题，考生根据要求作答．

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分．

13. 已知平面向量 $m=(3,-2)$，$n=(2,\lambda)$，若 $m\perp n$，则 $|m+n|=$ $\underline{\sqrt{26}}$．

14. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，若抛物线 C 与圆 $O:x^2+y^2=12$ 交于 P,Q 两点，且 $|PQ|=4\sqrt{2}$，则 $\triangle PFO$ 的面积为（O 为坐标原点）$\underline{\sqrt{2}}$．

15. 已知三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心 O 在线段 SA 上，若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle SBC$ 均为面积是 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，则三棱锥 $S-ABC$ 的体积为________．

16. 已知首项为 1 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\lambda S_{n+1}+S_nS_{n+2}=\lambda S_n+S_{n+1}^2$，且数列 $a_1,a_2,\cdots,a_k(k\geq 3)$ 成各项均不相等的等差数列，则 k 的最大值为________．

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 12 分）

已知 $\triangle ABC$ 中，$\tan(\frac{5\pi}{4}-A)=\frac{1}{3}$．

(1) 求 $\sin^2A+\cos 2A$ 的值；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 4，$AB=4$，求 BC 的值．

18.（本小题满分 12 分）

已知某品牌的蛋糕店在 A 地区有两家连锁分店，每个分店配有 2 名员工，且每个分店中至少有 1 人上班时，该分店可以正常营业；若某一家分店的员工全部休息，另一家分店的员工全部上班，则必须对员工进行调岗，将 1 人调至员工全部休息的分店，使得两店都正常营业；若人手不够，则挂出“今日休息”的牌样.

(1)已知元旦这天，每名员工正常上班的概率均为 $\frac{1}{3}$，求元旦这天不发生调岗的概率；

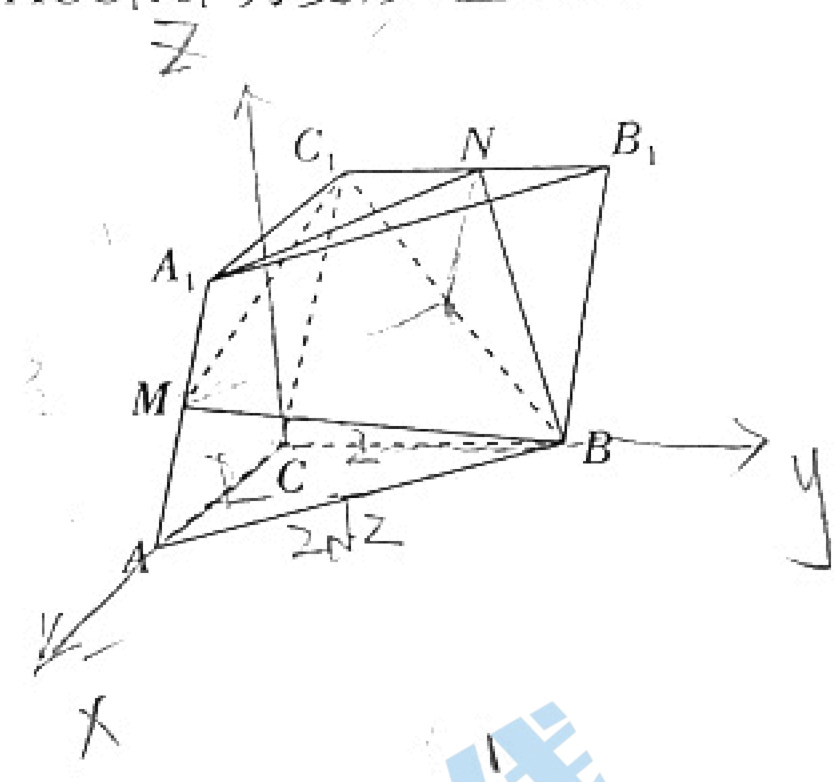
(2)已知元旦这天，每名员工正常上班的概率均为 $\frac{1}{2}$，记挂出“今日休息”的牌样的店数为 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.

19.（本小题满分 12 分）

如图所示，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$AC\perp CB$，$C_1C\perp CB$，$\angle ACC_1=120°$，四边形 ACC_1A_1 为菱形，$\angle CAB=45°$，M、N 分别是 AA_1，B_1C_1 的中点.

(1)求证：$A_1N/\!/$平面 BC_1M；

(2)求直线 BN 与平面 BC_1M 所成角的正弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(1+x)\ln x+\frac{1}{x}$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)求证：$f(x)\geqslant x$.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，M,N 为椭圆 C 上两个动点，$A(0,3)$，当 M,N 分别为椭圆 C 的左、右顶点时，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=5$。

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若线段 MN 的垂直平分线 l 的方程为 $x-y+\lambda=0$，且 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}<\frac{28}{3}$，求实数 λ 的取值范围.

请考生从第 22、23 题中任选一题作答，并用 2B 铅笔将答题卡上所选题目对应的方框涂黑，按所涂题号进行评分；多涂、多答，按所涂的首题进行评分；不涂，按本选考题的首题进行评分.

22.【选修 4—4：坐标系与参数方程】（本小题满分 10 分）

已知平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-t\\y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）；以原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，其中点 M 的极坐标为 $(1,\frac{\pi}{2})$.

(1)求直线 l 以及曲线 C 的普通方程；

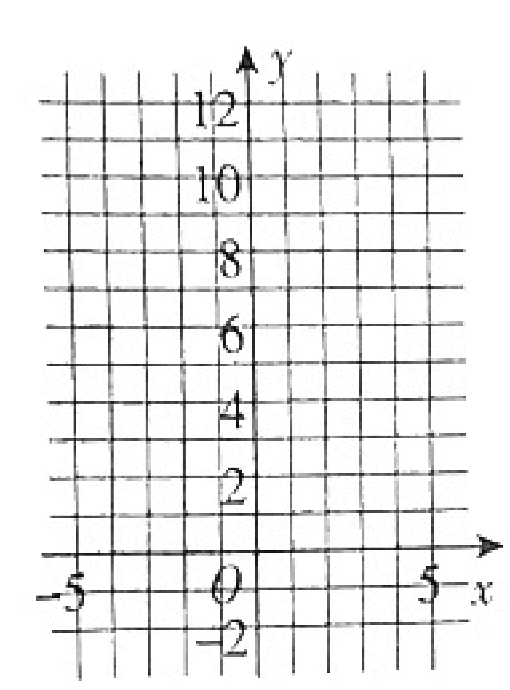
(2)若直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点，求 $\left|\frac{1}{|MA|}-\frac{1}{|MB|}\right|$ 的值.

23.【选修 4—5：不等式选讲】（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=|2x-3|+|x+1|$.

(1)在下列网格纸中作出函数 $f(x)$ 的图象；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)+x^2\geq 3x+a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.



百校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国Ⅱ卷　理科数学　参考答案

1. B 【解析】依题意，$\complement_R B=\{x|x\leqslant -1\}$，故 $A\cap(\complement_R B)=\{x|x\leqslant -1\}$.

2. D 【解析】依题意，$(2+5i)(1-2i)=2+5i-4i-10=12+i$.

3. D 【解析】由图可知，①正确；2020 年 12 月煤炭进口量比 11 月份增加量为 $3908-1176=2732$ 万吨，故②正确；2020 年 3 月至 10 月煤炭进口量的月平均值为 2316.25 万吨，超过 2000 万吨，故③正确.

4. C 【解析】A 中，令 $a=5,b=3$，可知 $\frac{1}{a-2}=\frac{1}{b}$；B 中，令 $a=102,b=12$，可知 $\lg(\frac{a-2}{b-2})>0$；D 中，由指数函数单调性可知，$\frac{1}{2^a}<\frac{1}{2^b}$，则 ABD 均错误.

5. C 【解析】设公差为 d，由 $\begin{cases}a_1+2a_{17}<a_1\\a_1<3a_{13}\end{cases}$，得 $\begin{cases}2a_1+35d<0\\a_1+18d>0\end{cases}$，得 $\begin{cases}a_{18}+a_{19}<0\\a_{19}>0\end{cases}$，故 $a_{18}<0<a_{19}$，所以使得 $a_n>0$ 成立的最小正整数 n 的值为 19.

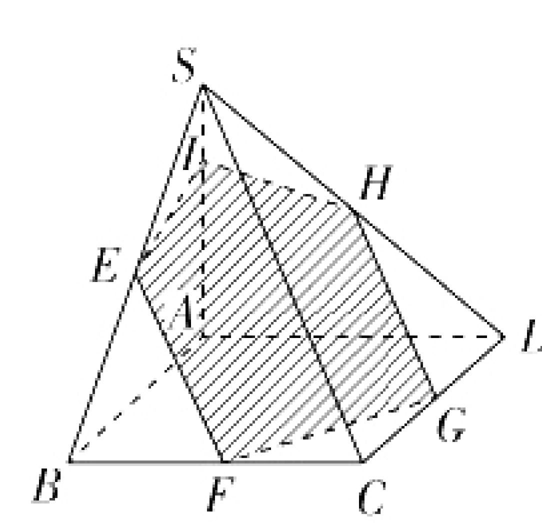
6. D 【解析】记事件 A＝“4 名同学所报节目各不相同”，事件 B＝“已知甲同学报的节目其他同学不报”，$P(B)=\frac{3^3\cdot A_4^1}{4^4}$，$P(AB)=\frac{A_4^4}{4^4}$，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{9}$.

7. B 【解析】依题意，圆 $C:(x-3)^2+(y-2)^2=11$，圆心 $C(3,2)$，代入 $x-my+3=0$ 中，解得 $m=3$，故 $M(-5,3)$，则 $|MN|=\sqrt{|MC|^2-r^2}=\sqrt{65-11}=3\sqrt{6}$.

8. C 【解析】依题意，$f(x)=x(1+\cos x)+2x+\frac{1}{x}+3$，易知 $y=x(1+\cos x)$，$y=2x+\frac{1}{x}$ 均为奇函数，图象关于原点对称，故函数 $f(x)$ 的图象关于 $(0,3)$ 对称，故 A、D 错误；易知 $f(0.1)>13>f(\frac{\pi}{2})$，故 B 错误；当 $x>0$ 时，$x(1+\cos x)\geqslant 0$，$2x+\frac{1}{x}+3\geqslant 2\sqrt{2}+3$，即 $f(x)>5$，即函数 $y=f(x)-5$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点.

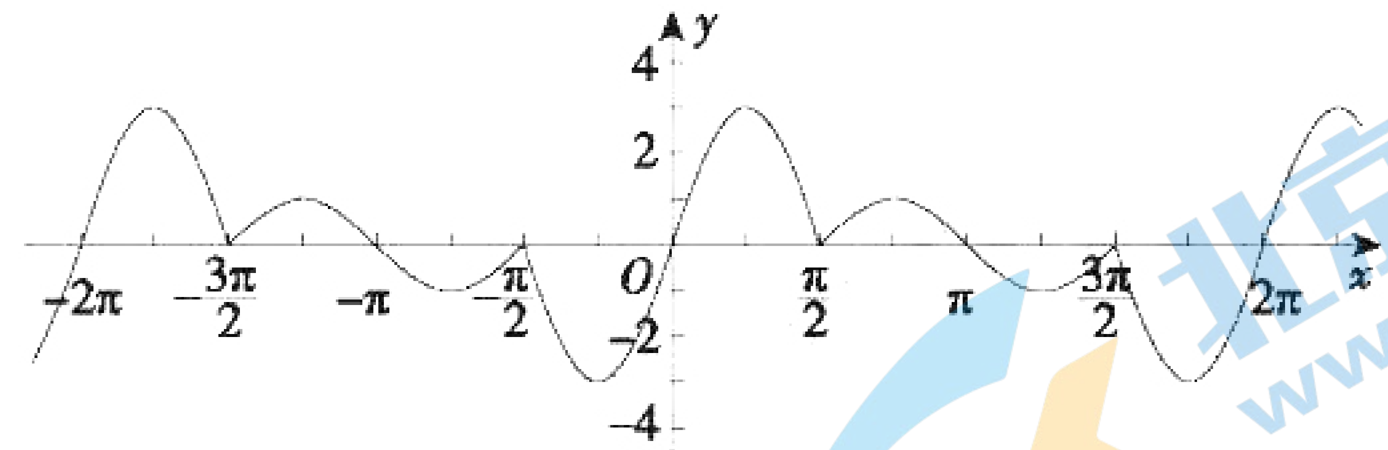
9. B 【解析】由题意，不妨设点 P 在第一象限，延长 F_2M 交直线 $y=\tan\alpha\cdot x(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ 于点 P，则由角平分线的性质可得 M 为 PF_2 的中点，$|OP|=|OF_2|=c$，易得 $P(a,b)$，则 $M(\frac{a-c}{2},\frac{b}{2})$ 代入双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，则 $\frac{(\frac{a-c}{2})^2}{a^2}-\frac{(\frac{b}{2})^2}{b^2}=1$，解得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}-1$.

10. A 【解析】分别取 SB,BC,CD,SD 的中点 E,F,G,H，线段 SA 上靠近 S 的四等分点 I，则平面 $EFGHI$ 即为平面 α，而 $EF=HG=3\sqrt{3}$，$FG=3\sqrt{2}$，$IE=IH=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，故所求截面面积为 $3\sqrt{2}\times 3\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{45}{4}\sqrt{6}$.



11. C 【解析】依题意，$f(x)=\begin{cases}3\sin 2x,-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\\-\sin 2x,\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi\end{cases}(k\in Z)$，作出函数 $f(x)$

的大致图象如下图所示：当 $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$ 时，$f(x)\in[-1,3]$，故 A 错误；函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，故 B 错误；函数 $f(x)$ 的对称中心为 $(k\pi,0)(k\in\mathbf{Z})$，故 D 错误.



12. D 【解析】依题意，$e^{x+2}-x-\frac{1}{2}(x-a)^2>0$，设 $g(x)=e^{x+2}-x-\frac{1}{2}(x-a)^2$，$g'(x)=e^{x+2}-1-x+a$，易知 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g'(0)=e^2+a-1$. ①当 $a\geqslant1-e^2$ 时，$g'(0)\geqslant0$，$g'(x)\geqslant0$，所以 $g(x)$ 单调递增，则 $g(0)=e^2-\frac{1}{2}a^2\geqslant0$，即 $-\sqrt{2}e\leqslant a\leqslant\sqrt{2}e$. ②当 $a<1-e^2$ 时，$g'(0)<0$，可知存在 $x_0>0$，$x\in(0,x_0)$ 使得 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$g(0)=e^2-\frac{1}{2}a^2<e^2-\frac{1}{2}(1-e^2)^2<0$，所以存在 $x\in(0,x_0)$，$g(x)<0$，故不成立.

综上所述，$-\sqrt{2}e\leqslant a\leqslant\sqrt{2}e$.

13. $\sqrt{26}$ 【解析】依题意，$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，则 $6-2\lambda=0$，解得 $\lambda=3$，则 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$.

14. $\sqrt{2}$ 【解析】不妨设点 P 在第一象限，则 $y_P=2\sqrt{2}$，代入 $x^2+y^2=12$ 中，解得 $x_P=2$，故 $P(2,2\sqrt{2})$，代入抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 中，解得 $p=2$，故 $S_{\triangle PFO}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$.

15. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】易知 $AB=2$；设 O_1 为 $\triangle ABC$ 的中心，则 $OO_1\perp$ 平面 ABC，则 $O_1A=\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，由 SA 是球 O 的直径可知，$\angle ABS=90°$，又 $AB=BS=2$，所以 $AS=2\sqrt{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOO_1$ 中，$O_1O=\sqrt{(\frac{AS}{2})^2-O_1A^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，从而点 S 到平面 ABC 的距离 $d=2O_1O=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，故 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot d=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

16. 4 【解析】依题意，$\lambda a_{n+1}+S_nS_{n+2}=S_{n+1}^2(*)$；因为前 k 项成等差数列，设公差为 d，则 $a_2=1+d$，$a_3=1+2d$，若 $k=3$，则 $S_2=2+d$，$S_3=3+3d$. 在 $(*)$ 式中，令 $n=1$ 得，$\lambda a_2+S_1\cdot S_3=S_2^2$，所以 $\lambda(1+d)+3+3d=(2+d)^2$，化简得 $d^2+d+1=\lambda(1+d)$①；若 $k=4$，则 $S_4=4+6d$，在 $(*)$ 式中，令 $n=2$ 得，$\lambda a_3+S_2\cdot S_4=S_3^2$，所以 $\lambda(1+2d)+(2+d)(4+6d)=(3+3d)^2$，化简得 $3d^2+2d+1=\lambda(1+2d)$②；②－①得，$2d^2+d=\lambda d$，因为公差不为 0，所以 $d\neq0$，所以 $2d+1=\lambda$，代入①得，$d^2+2d=0$，所以 $d=-2$，$\lambda=-3$. 所以 $k=4$ 符合题意. 若 $k=5$，则 $a_1=1$，$a_2=-1$，$a_3=-3$，$a_4=-5$，$a_5=-7$，$S_3=-3$，$S_4=-8$，$S_5=-15$，在 $(*)$ 式中，令 $n=3$ 得，$-3a_4+S_3S_5=-3\times(-5)+(-3)\times(-15)=60$，$S_4^2=(-8)^2=64$，所以 $-3a_4+S_3S_5\neq S_4^2$，所以 k 的最大值为 4.

17.【解析】(1) $\tan(\frac{5\pi}{4}-A)=\tan(\frac{\pi}{4}-A)=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}=\frac{1}{3}$，解得 $\tan A=\frac{1}{2}$， ………………………… 3 分

故 $\sin^2A+\cos2A=\frac{\cos^2A}{\sin^2A+\cos^2A}=\frac{1}{\tan^2A+1}=\frac{4}{5}$. ………………………… 6 分

(2) 由 (1) 可知，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{2}$①，且 $\sin^2A+\cos^2A=1$②；

联立①②，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ………………………… 8 分

又 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=4$，$c=4$，可得 $b=2\sqrt{5}$. ………………………… 10 分

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4$，则 $a=2$. 即 $BC=2$. …………………………………………………… 12 分

18.【解析】(1)记发生调岗为事件 M，则 $P(M)=C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$. …………………………………… 3 分

故元旦这天不发生调岗的概率为 $1-P(M)=1-\frac{8}{81}=\frac{73}{81}$；…………………………………… 4 分

(2)依题意，ξ 的所有可能取值为 0，1，2.

则 $P(\xi=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，$P(\xi=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，

$P(\xi=0)=1-P(\xi=1)-P(\xi=2)=1-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=\frac{11}{16}$. …………………………………… 8 分

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

…………………………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $E(\xi)=0\times\frac{11}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{16}=\frac{3}{8}$. …………………………………… 12 分

19.【解析】(1)取线段 BC_1 的中点 P，连接 PM，PN， …………………………………… 1 分

因为 N 为 B_1C_1 的中点，所以 $PN\parallel BB_1$，且 $PN=\frac{1}{2}BB_1$， …………………………………… 2 分

又 M 为 A_1A 的中点，所以 $A_1M\parallel BB_1$，且 $A_1M=\frac{1}{2}BB_1$，…………………………………… 3 分

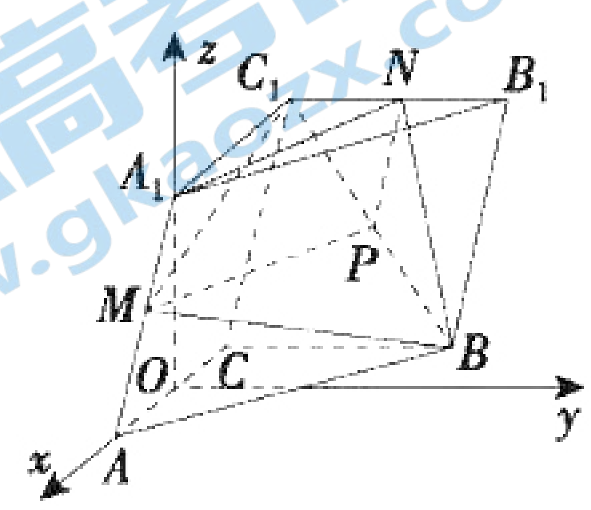
所以 $PN\parallel A_1M$，且 $PN=A_1M$，所以四边形 A_1NPM 是平行四边形，

所以 $A_1N\parallel PM$；…………………………………………………………………… 4 分

又 $PM\subset$ 平面 BC_1M，$A_1N\not\subset$ 平面 BC_1M，所以 $A_1N\parallel$ 平面 BC_1M；…………………… 5 分

(2)作 $A_1O\perp AC$ 于点 O，因为 $\angle ACC_1=120^\circ$，所以 $\angle AA_1O=30^\circ$，

所以 $AO=\frac{1}{2}A_1A=\frac{1}{2}AC$，即 O 为 AC 的中点；



因为 $AC\perp CB$，$C_1C\perp CB$，$AC\cap CC_1=C$，所以 $BC\perp$ 平面 A_1ACC_1，

所以 $BC\perp A_1O$；因为 $AC\cap BC=C$，所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC；………………………… 7 分

故以点 O 为坐标原点，OA，OA_1 所在直线分别为 x 轴和 z 轴，以过点 O 且平行于 BC 的直线为 y 轴，建立空间直角坐标系如图所示；

令 $AA_1=AC=BC=2a$，则 $B(-a,2a,0)$，$C_1(-2a,0,\sqrt{3}a)$，$M(\frac{1}{2}a,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a)$，$N(-2a,a,\sqrt{3}a)$，所以 $\overrightarrow{BN}=(-a,-a,\sqrt{3}a)$，$\overrightarrow{BM}=(\frac{3}{2}a,-2a,\frac{\sqrt{3}}{2}a)$，$\overrightarrow{C_1M}=(\frac{5}{2}a,0,-\frac{\sqrt{3}}{2}a)$. …………………………………… 9 分

设平面 BC_1M 一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}(x,y,z)\cdot(\frac{3}{2}a,-2a,\frac{\sqrt{3}}{2}a)=0\\(x,y,z)\cdot(\frac{5}{2}a,0,-\frac{\sqrt{3}}{2}a)=0\end{cases}$，

得 $\begin{cases}\frac{3}{2}x-2y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\\frac{5}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$. 取 $x=\sqrt{3}$，$y=2\sqrt{3}$，$z=5$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},2\sqrt{3},5)$. …………………… 11 分

故直线 BN 与平面 BC_1M 所成角的正弦值 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BN}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{BN}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{10}$. ………………………………… 12 分

20.【解析】(1)依题意，$f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1-\dfrac{1}{x^2}$， ………………………………… 2 分

故 $f'(1)=1$. ………………………………… 3 分

又 $f(1)=1$， ………………………………… 4 分

故所求切线方程为 $y-1=x-1$，即 $y=x$. ………………………………… 5 分

(2)由 $f(x)\geqslant x$ 得 $(1+x)\ln x+\dfrac{1}{x}\geqslant x$ 整理得 $(x+1)\ln x+\dfrac{1-x^2}{x}\geqslant 0$，

化简得 $\ln x+\dfrac{1-x}{x}\geqslant 0$， ………………………………… 7 分

令 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$. ………………………………… 9 分

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$，即 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立， ………………………………… 11 分

所以 $f(x)\geqslant x$ 恒成立. ………………………………… 12 分

21.【解析】(1)依题意，$M(-a,0)$，$N(a,0)$，

则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(-a,-3)\cdot(a,-3)=-a^2+9=5$，故 $a^2=4$； ………………………………… 2 分

而 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $b^2=2$， ………………………………… 3 分

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ………………………………… 4 分

(2)设直线 MN 的方程为 $y=-x+n$，联立 $\begin{cases}y=-x+n,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$

整理得 $3x^2-4nx+2(n^2-2)=0$，由 $\Delta=(-4n)^2-4\times3\times2(n^2-2)>0$，得 $n^2<6$.

设 $M(x_1,-x_1+n)$，$N(x_2,-x_2+n)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4n}{3}$，$x_1x_2=\dfrac{2(n^2-2)}{3}$. ………………………………… 6 分

设 MN 的中点为 $P(x_0,-x_0+n)$，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2n}{3}$，$-x_0+n=\dfrac{n}{3}$.

由于点 P 在直线 $x-y+\lambda=0$ 上，所以 $\dfrac{n}{3}=\dfrac{2n}{3}+\lambda$，得 $n=-3\lambda$，代入 $n^2<6$，

得 $9\lambda^2<6$，所以 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<\lambda<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$①. ………………………………… 8 分

因为 $\overrightarrow{AM}=(x_1,-x_1+n-3)$，$\overrightarrow{AN}=(x_2,-x_2+n-3)$，

所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=2x_1x_2-(n-3)(x_1+x_2)+(n-3)^2=\dfrac{4(n^2-2)}{3}-\dfrac{4n(n-3)}{3}+(n-3)^2=\dfrac{3n^2-6n+19}{3}$.

由 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}<\dfrac{28}{3}$，得 $3n^2-6n+19<28\Rightarrow-1<n<3$，所以 $-1<-3\lambda<3$，

即 $-1<\lambda<\dfrac{1}{3}$②. ………………………………… 11 分

又由①②得 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<\lambda<\dfrac{1}{3}$. 故实数 λ 的取值范围为 $(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{1}{3})$. ………………………………… 12 分

22.【解析】(1)依题意，直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x+1$， ………………………………… 2 分

曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-4y=0$. ………………………………… 4 分

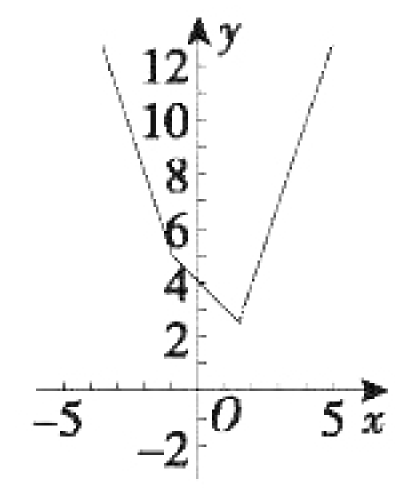
(2)易知点 $M(0,1)$；设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t \\ y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）， …………………………………………… 5 分

设点 A,B 对应的参数分别 t_1,t_2，将直线 l 的参数方程代入 $x^2+y^2-4y=0$，

得 $t^2-\sqrt{3}t-3=0$，所以 $t_1t_2=-3$，$t_1+t_2=\sqrt{3}$. …………………………………………………………………… 8 分

由于直线 l 过 $M(0,1)$，故 $\left|\dfrac{1}{|MA|}-\dfrac{1}{|MB|}\right|=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………………… 10 分

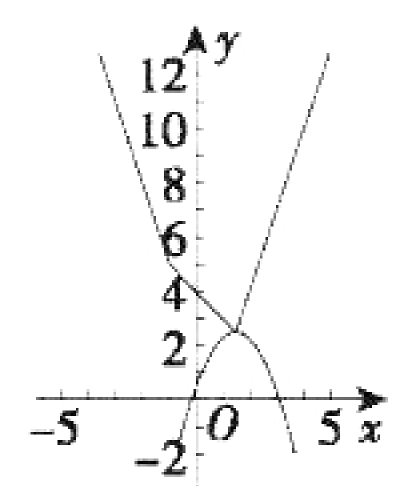
23.【解析】(1)依题意，$f(x)=\begin{cases} 3x-2, x>\dfrac{3}{2} \\ 4-x, -1\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2} \\ 2-3x, x<-1 \end{cases}$， ………………………………………………… 2 分



作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)依题意，如图所示，$|2x-3|+|x+1|+x^2\geqslant 3x+a$，

故 $|2x-3|+|x+1|\geqslant -x^2+3x+a$， …………………………………………………………… 6 分



结合二次函数 $y=-x^2+3x+a$ 的图象可知，

临界状态为 $y=-x^2+3x+a$ 过 $y=f(x)$ 的最低点$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$，

将$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$代入 $y=-x^2+3x+a$ 中，解得 $a=\dfrac{1}{4}$， …………………………………………… 9 分

故实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$. …………………………………………………………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。