

# 2023 北京八一学校高一 10 月月考

## 数 学

2023.10

本试卷共 4 页, 100 分. 考试时长 90 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效. 考试结束后, 将答题卡交回.

一、选择题: 本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合  $M = \{-2, -1, 0, 1\}$ ,  $N = \{x | -3 \leq x < 0\}$ , 则  $M \cap N =$  ( )

- A.  $\{-2, -1, 0, 1\}$       B.  $\{0, 1\}$       C.  $\{-2\}$       D.  $\{-2, -1\}$

2. 命题“ $\exists x > 0, x^3 < 1$ ”的否定为 ( )

- A.  $\forall x > 0, x^3 \geq 1$       B.  $\forall x \leq 0, x^3 \geq 1$   
C.  $\exists x > 0, x^3 \geq 1$       D.  $\exists x \leq 0, x^3 \geq 1$

3. 已知集合  $A = \{(x, y) | y = x^2 - 2\}$ ,  $B = \{(x, y) | y = x\}$ , 则  $A \cap B$  中元素的个数为 ( )

- A. 3      B. 2      C. 1      D. 0

4. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $ab = 0$ ”是“ $a^2 + b^2 = 0$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分又不必要条件

5. 已知命题  $p: \exists x \in [-1, 3], x - a - 2 \leq 0$ . 若  $p$  为假命题, 则  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $(-\infty, -3]$       B.  $(-\infty, 1]$       C.  $(-\infty, -3)$       D.  $(-\infty, 1)$

6. 设  $p: \frac{1}{2} \leq x \leq 1; q: a \leq x \leq a + 1$ , 若  $q$  是  $p$  的必要不充分条件, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(0, \frac{1}{2})$       B.  $(0, \frac{1}{2}]$       C.  $[0, \frac{1}{2})$       D.  $[0, \frac{1}{2}]$

7. 方程  $x^2 - 4|x| - 12 = 0$  的解集是 ( )

- A.  $\{-2, 2, -6, 6\}$       B.  $\{-2, 2\}$       C.  $\{-6, 6\}$       D.  $\emptyset$

8. 要使二次三项式  $x^2 - 6x + t$  在整数范围内可因式分解,  $t$  为正整数, 那么  $t$  的取值可以有 ( )

- A. 2 个      B. 3 个      C. 5 个      D. 6 个

9. 已知  $A = \{x | x^2 + px - 6 = 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 + qx + 2 = 0\}$ , 且  $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{2\}$ , 则  $p + q$  的值为 ( )

- A. 4      B.  $\frac{5}{3}$       C.  $\frac{14}{3}$       D. 5

10. 设非空数集  $M$  同时满足条件：①  $M$  中不含元素  $-1, 0, 1$ ；②若  $a \in M$ ，则  $\frac{1+a}{1-a} \in M$ . 则下列结论正确的是 ( )

- A. 集合  $M$  中至多有 2 个元素
- B. 集合  $M$  中至多有 3 个元素
- C. 集合  $M$  中有且仅有 4 个元素
- D. 集合  $M$  中至少有 5 个元素

**二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.**

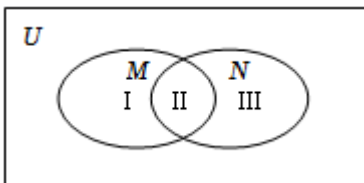
11. 已知集合  $A = \{x | mx^2 + 2x + 1 = 0\}$  有且只有两个子集，则实数  $m =$  \_\_\_\_\_.

12. 集合  $A = \{x | x \geq 1\}$ ， $B = \{x | x \leq a\}$ ， $A \cup B = \mathbf{R}$ ，则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

13. 设  $x, y \in \mathbf{R}$ ，则“ $x > |y|$ ”是“ $x > y$ ”的 \_\_\_\_\_ 条件. (充分不必要，必要不充分，充要，既不充分也不必要)

14. 若关于  $x, y$  的方程组  $\begin{cases} ax - by = 5 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$  与  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ ax + by = 3 \end{cases}$  的解集相等，则  $a =$  \_\_\_\_\_； $b =$  \_\_\_\_\_.

15. 1881 年英国数学家约翰·维恩发明了 Venn 图，用来直观表示集合之间的关系. 全集  $U = \mathbf{R}$ ，集合  $M = \{x | x^2 - 2ax + 4 < 0\}$ ， $N = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$  的关系如图所示，其中区域 I, II 构成  $M$ ，区域 II, III 构成  $N$ . 若区域 I, II, III 表示的集合均不是空集，则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.



**三、解答题：本大题共 5 小题，共 50 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.**

16. 在①  $A \cap B = A$ ；②  $A \cap B = \emptyset$  这两个条件中任选一个，补充在横线上，并解答

已知集合  $A = \{x | 2a - 1 < x < a\}$ ， $B = \{x | x^2 \leq 1\}$ .

- (1) 若  $a = -1$ ，求  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cup B$ ；
- (2) 若 \_\_\_\_\_，求实数  $a$  的取值范围.

17. 已知命题  $P$ ：方程  $x^2 + 2x + m = 0$  有两个不相等的负实数根，命题  $q$ ：方程  $x^2 - 2x + \frac{1}{2} + m = 0$  无实数根.

- (1) 若  $P, q$  均为真命题，求实数  $m$  的取值范围；
- (2) 若  $P, q$  中有一个真命题，一个是假命题，求实数  $m$  的取值范围.

18. 已知  $x_1, x_2$  是方程  $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$  的两个实数根.

- (1) 求  $k$  的取值范围；

(2) 求  $x_1^2 + x_2^2$ 、 $|x_1 - x_2|$ . (结果用  $k$  表示)

(3) 是否存在实数  $k$ , 使  $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$  成立? 若存在, 求出  $k$  的值, 若不存在, 请说明理由.

19. 水果市场将 120 吨水果运往各地商家, 现有甲, 乙, 丙三种车型供选择, 每辆车的运载能力和运费如下表所示: (假设每辆车均满载)

车型	甲	乙	丙
汽车运载量 (吨/辆)	5	8	10
汽车运费 (元/辆)	400	500	600

(1) 若全部水果都用甲, 乙两种车型来运送, 需运费 8200 元. 问分别需甲, 乙两种车型各几辆?

(2) 市场可以调用甲, 乙, 丙三种车型参与运送 (每种车型至少 1 辆), 已知它们的总辆数为 16, 分别求出三种车型的辆数.

20. 已知集合  $P$  中的元素有  $3n$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 个且均为正整数, 将集合  $P$  分成元素个数相等且两两没有公共元素的三个集合  $A, B, C$ , 即  $P = A \cup B \cup C, A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$ , 其中

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}, C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ . 若集合  $A, B, C$  中元素满足

$c_1 < c_2 < \dots < c_n, a_k + b_k = c_k, k = 1, 2, \dots, n$ , 则称集合  $P$  为“完美集合”.

(1) 若集合  $P = \{1, 2, 3\}, Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 判断集合  $P$  和集合  $Q$  是否为“完美集合”? 并说明理由.

(2) 若集合  $P = \{1, x, 3, 4, 5, 6\}$  为“完美集合”, 求正整数  $x$  的值以及相应的集合  $A, B, C$ .

## 参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】D

【分析】利用交集的定义可求得集合  $M \cap N$ .

【详解】因为集合  $M = \{-2, -1, 0, 1\}$ ,  $N = \{x | -3 \leq x < 0\}$ , 则  $M \cap N = \{-2, -1\}$ .

故选：D.

2. 【答案】A

【分析】利用两种特殊命题的否定即可求出结果.

【详解】根据存在量词命题的否定知，命题“ $\exists x > 0, x^3 < 1$ ”的否定为  $\forall x > 0, x^3 \geq 1$ ,

故选：A.

3. 【答案】B

【分析】由题意， $A \cap B$  即方程组  $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases}$  的解的个数，再联立方程求解即可.

【详解】由题意， $A \cap B$  即方程组  $\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases}$  的解的个数，即  $x^2 - x - 2 = 0$ ，解得  $x = -1$  或  $x = 2$ . 故

$A \cap B = \{(-1, -1), (2, 2)\}$ ，则  $A \cap B$  中元素的个数为 2.

故选：B

4. 【答案】B

【分析】根据充分、必要条件的知识确定正确答案.

【详解】 $ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$ ;

$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ ;

所以“ $ab = 0$ ”是“ $a^2 + b^2 = 0$ ”的必要不充分条件.

故选：B

5. 【答案】C

【分析】由题意  $\neg p$  为真命题，再根据一次函数恒成立性质求解即可.

【详解】由题意  $\neg p: \forall x \in [-1, 3], x - a - 2 > 0$  为真命题，故  $\forall x \in [-1, 3], x > a + 2$  恒成立，故  $-1 > a + 2$ ，即  $a < -3$ .

故选：C

6. 【答案】D

【分析】根据充分条件和必要条件的定义转化为对应关系即可求解.

【详解】因为  $p: \frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ,  $q: a \leq x \leq a+1$ , 又  $q$  是  $p$  的必要不充分条件,

所以  $\begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \\ a+1 \geq 1 \end{cases}$ , 解得  $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ , 经检验满足题意.

故选: D.

7. 【答案】C

【分析】原方程等价于  $(|x|-6)(|x|+2)=0$ , 求解即可.

【详解】解: 因为  $x^2 - 4|x| - 12 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| - 12 = 0 \Leftrightarrow (|x|-6)(|x|+2) = 0$ ,

解得  $|x|=6$  或  $|x|=-2$  (舍),

由  $|x|=6$ , 解得  $x=6$  或  $x=-6$ ,

所以原方程的解集为  $\{-6, 6\}$ .

故选: C.

8. 【答案】B

【分析】根据题设得  $x^2 - 6x + t = (x+a)(x+b)$ , 从而得到  $a+b=-6, ab=t$ , 再利用  $t$  为正整数, 即可求出结果.

【详解】由题可设  $x^2 - 6x + t = (x+a)(x+b)$ , 则  $x^2 - 6x + t = x^2 + (a+b)x + ab$ ,

所以  $a+b=-6, ab=t$ ,

又  $t$  为正整数, 所以  $a, b$  都是负整数,

故  $a=-1, b=-5$  或  $a=-5, b=-1$ , 此时  $t=5$ ;

$a=-2, b=-4$  或  $a=-4, b=-2$ , 此时  $t=8$ ;

$a=-3, b=-3$ , 此时  $t=9$ ;

所以满足题意的  $t$  的取值有 3 个,

故选: B.

9. 【答案】C

【分析】利用条件  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{2\}$ , 得到  $2 \in A$ , 从而求出  $p=1$ , 进而求出集合  $A$ , 得到  $-3 \in B$ , 即可求出结果.

【详解】因为  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{2\}$ ,  $2 \in A$ , 所以  $4+2p-6=0$ , 得到  $p=1$ ,

当  $p=1$  时, 由  $x^2+x-6=0$ , 解得  $x=2$  或  $x=-3$ , 所以  $-3 \in B$ ,

故  $9-3q+2=0$ , 得到  $q=\frac{11}{3}$ , 所以  $p+q=1+\frac{11}{3}=\frac{14}{3}$ ,

故选: C.

10. 【答案】C

【分析】由题意可求出  $a, \frac{1+a}{1-a}, -\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a+1}$  都在  $M$  中，然后计算这些元素是否相等，继而判断  $M$  的元素个数的特点.

【详解】因为若  $a \in M$ ，则  $\frac{1+a}{1-a} \in M$ ，所以  $\frac{1+\frac{1+a}{1-a}}{1-\frac{1+a}{1-a}} = -\frac{1}{a} \in M$ ， $\frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}} = \frac{a-1}{a+1} \in M$ ，  
则  $\frac{1+\frac{a-1}{a+1}}{1-\frac{a-1}{a+1}} = \frac{2a}{2} = a \in M$ ，

当  $a \neq -1, 0, 1$  时，4 个元素  $a, \frac{1+a}{1-a}, -\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a+1}$  中，任意两个元素都不相等，

所以集合  $M$  中有且仅有 4 个元素，

故选：C

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11. 【答案】0 或 1

【分析】根据题设条件可得  $A$  为单元素集合，就  $m=0, m \neq 0$  分类讨论后可得实数  $m$  的值.

【详解】因为  $A$  有且只有两个子集，故  $A$  为单元素集合.

当  $m=0$  时， $A = \{x | 2x+1=0\} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ，符合；

当  $m \neq 0$  时，则有  $\Delta = 4 - 4m = 0$  即  $m = 1$ .

综上， $m = 0$  或  $m = 1$ .

故答案为：0 或 1.

【点睛】本题考查集合中元素个数与其子集个数之间的关系以及集合含义的正确理解，一般地，如果有限集中元素的个数为  $n$ ，那么其子集的个数为  $2^n$ ，对于集合  $\{x | f(x)=0\}$ ，它表示方程  $f(x)=0$  的解的集合，讨论含参数的方程的解的时，要考虑二次项系数是否为零.

12. 【答案】 $[1, +\infty)$

【分析】由  $A \cup B = \mathbf{R}$ ，易得  $a \geq 1$ 。

【详解】由  $A \cup B = \mathbf{R}$ ，可知  $a \geq 1$ 。

故答案为： $[1, +\infty)$

【点睛】此题考查通过集合的并集求参数，属于简单题目。

13. 【答案】充分不必要

【分析】利用不等式的性质、特殊值法结合充分条件、必要条件的定义判断可的结论.

【详解】当  $y \geq 0$  时,  $|y| = y$ ; 当  $y < 0$  时,  $|y| = -y > y$ .

所以,  $|y| \geq y$ ,

由  $x > |y|$  可得  $x > |y| \geq y$ , 即 “ $x > |y|$ ”  $\Rightarrow$  “ $x > y$ ”,

取  $x = 1, y = -2$ , 此时,  $x < |y|$ , 即 “ $x > |y|$ ”  $\nRightarrow$  “ $x > y$ ”,

所以, “ $x > |y|$ ” 是 “ $x > y$ ” 的充分不必要条件.

故答案为: 充分不必要条件.

14. 【答案】 ①. 4 ②.  $-\frac{1}{2}$

【分析】根据条件得  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$  的解  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ , 也是两个方程组的解集, 从而得到  $\begin{cases} a - 2b = 5 \\ a + 2b = 3 \end{cases}$ , 进而可

求出结果.

【详解】因为方程组  $\begin{cases} ax - by = 5 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$  与  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ ax + by = 3 \end{cases}$  的解集相等,

所以  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$  的解集也是它们的解集,

由  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$ , 得到  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ ,

所以  $\begin{cases} a - 2b = 5 \\ a + 2b = 3 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} a = 4 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$ ,

故答案为:  $a = 4, b = -\frac{1}{2}$ .

15. 【答案】  $\left(2, \frac{5}{2}\right]$

【分析】由题意  $M = \{x \mid x^2 - 2ax + 4 < 0\}$  与  $N = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$  交集不为空, 且互不为包含关系, 进而可得  $y = x^2 - 2ax + 4$  在  $x = 1$  与  $x = 2$  时的正负即可求解.

【详解】由题意  $M = \{x \mid x^2 - 2ax + 4 < 0\}$  与  $N = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$  交集不为空, 且互不为包含关系,

故  $\begin{cases} 1^2 - 2a \times 1 + 4 < 0 \\ 2^2 - 2a \times 2 + 4 \geq 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} 1^2 - 2a \times 1 + 4 \geq 0 \\ 2^2 - 2a \times 2 + 4 < 0 \end{cases}$ , 即无解或  $2 < a \leq \frac{5}{2}$ .

综上有  $a \in \left(2, \frac{5}{2}\right]$ .

故答案为:  $\left(2, \frac{5}{2}\right]$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 50 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 【答案】(1)  $\{x|x \leq -3 \text{ 或 } x \geq -1\}$

(2) 答案见解析

【分析】(1) 化简集合  $B$ ，根据集合的运算直接计算即可得到结果。

(2) 根据条件分集合  $A$  为空集与集合  $A$  不为空集分别讨论计算，即可得到结果。

【小问 1 详解】

$$B = \{x|x^2 \leq 1\} = \{x|-1 \leq x \leq 1\},$$

当  $a = -1$  时， $A = \{x|-3 < x < -1\}$ ，所以  $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x|x \leq -3 \text{ 或 } x \geq -1\}$

所以  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup B = \{x|x \leq -3 \text{ 或 } x \geq -1\}$

【小问 2 详解】

由(1)知  $B = \{x|-1 \leq x \leq 1\}$ ，

若选①：由  $A \cap B = A$ ，得  $A \subseteq B$

当  $2a - 1 \geq a$ ，即  $a \geq 1$  时， $A = \emptyset$ ，符合题意；

$$\text{当 } A \neq \emptyset \text{ 时，} \begin{cases} 2a - 1 < a \\ 2a - 1 \geq -1, \text{ 解得 } 0 \leq a < 1. \\ a \leq 1 \end{cases}$$

综上所述，实数  $a$  的取值范围是  $[0, +\infty)$

若选②：当  $A = \emptyset$  时， $2a - 1 \geq a$ ，即  $a \geq 1$ ；

$$\text{当 } A \neq \emptyset \text{ 时，} \begin{cases} 2a - 1 < a \\ a \leq -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2a - 1 < a \\ 2a - 1 \geq 1 \end{cases}$$

解得  $a \leq -1$  或  $a$  不存在。

综上所述，实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

17. 【答案】(1)  $m \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(2)  $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

【分析】(1) 根据二次方程根的分布分别列式求解即可；

(2) 分析“ $P$ 真 $Q$ 假”和“ $Q$ 真 $P$ 假”两种情况分别求解即可。

【小问 1 详解】

方程  $x^2 + 2x + m = 0$  有两个不相等的负实数根，则  $\begin{cases} \Delta = 2^2 - 4m > 0 \\ m > 0 \end{cases}$ ，解得  $0 < m < 1$ 。



方程  $x^2 - 2x + \frac{1}{2} + m = 0$  无实数根, 则  $\Delta = (-2)^2 - 4\left(\frac{1}{2} + m\right) < 0$ , 解得  $m > \frac{1}{2}$ .

综上有  $m \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

【小问 2 详解】

由 (1), 当  $p$  真  $q$  假时,  $\begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ , 解得  $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ ;

当  $q$  真  $p$  假时,  $\begin{cases} m \leq 0 \text{ 或 } m \geq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$ , 解得  $m \in [1, +\infty)$ ;

综上有  $m \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$ .

18. 【答案】(1)  $\{k | k < 0\}$

$$(2) x_1^2 + x_2^2 = \frac{k-1}{2k}, \quad |x_1 - x_2| = \sqrt{-\frac{1}{k}}$$

(3) 不存在, 理由见解析

【分析】(1) 根据题意可得出  $\Delta \leq 0$  且  $k \neq 0$ , 可求出实数  $k$  的取值范围;

(2) 根据韦达定理可得出  $x_1^2 + x_2^2$ 、 $|x_1 - x_2|$  关于  $k$  的表达式;

(3) 根据  $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$  结合韦达定理定理可得出关于  $k$  的等式, 求出  $k$  的值, 结合  $k < 0$  可

得出结论.

【小问 1 详解】

解: 因为  $x_1$ 、 $x_2$  是方程  $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$  的两个实数根,

则  $\Delta = 16k^2 - 4 \times 4k(k+1) = -16k \geq 0$ , 且  $4k \neq 0$ , 解得  $k < 0$ .

所以, 实数  $k$  的取值范围是  $\{k | k < 0\}$ .

【小问 2 详解】

解: 因为  $x_1$ 、 $x_2$  是方程  $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$  的两个实数根,

由韦达定理可得  $x_1 + x_2 = 1$ ,  $x_1 x_2 = \frac{k+1}{4k}$ ,

所以,  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1 - \frac{k+1}{2k} = \frac{k-1}{2k}$ ,

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1 - \frac{k+1}{k}} = \sqrt{-\frac{1}{k}}$$

【小问3详解】

解：若存在实数  $k$ ，使  $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$ ，

即  $2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 = 2 \times \frac{k-1}{2k} - \frac{5(k+1)}{4k} = -\frac{k+9}{4k} = -\frac{3}{2}$ ，解得  $k = \frac{9}{5}$ ，不合乎题意，舍去。

因此，不存在实数  $k$  的值，使得  $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$ 。

19. 【答案】(1) 甲车型 8 辆，乙车型 10 辆

(2) 甲，乙，丙三种车型分别为 6,5,5 或 4,10,2

【分析】(1) 分别设出需甲车型  $x$  辆，乙车型  $y$  辆，再根据条件得到方程组  $\begin{cases} 5x+8y=120 \\ 400x+500y=8200 \end{cases}$ ，解方程组即可得出结果；

(2) 设需甲车型  $x$  辆，乙车型  $y$  辆，丙车型  $z$  辆，根据条件得到  $\begin{cases} x+y+z=16 \\ 5x+8y+10z=120 \end{cases}$ ，再利用  $x, y, z$  均为整数这一条件即可求出结果。

【小问1详解】

设需甲车型  $x$  辆，乙车型  $y$  辆，

由题得  $\begin{cases} 5x+8y=120 \\ 400x+500y=8200 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x=8 \\ y=10 \end{cases}$ ，

所以需甲车型 8 辆，乙车型 10 辆。

【小问2详解】

设需甲车型  $x(1 \leq x \leq 14)$  辆，乙车型  $y(1 \leq y \leq 14)$  辆，丙车型  $z(1 \leq z \leq 14)$  辆，

由题得， $\begin{cases} x+y+z=16 \\ 5x+8y+10z=120 \end{cases}$ ，消  $z$  得到  $5x+2y=40$ ，所以  $x=8-\frac{2}{5}y$ ，

又  $x, y$  均为正整数，得到  $\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=4 \\ y=10 \end{cases}$ ，

当  $\begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases}$  时， $z=5$ ，当  $\begin{cases} x=4 \\ y=10 \end{cases}$  时， $z=2$ ，

所以，甲，乙，丙三种车型分别为 6,5,5 或 4,10,2。

20. 【答案】(1) 集合  $P$  为“完美集合”，集合  $Q$  不是“完美集合”，理由见解析。

(2) 答案见解析

【分析】(1) 根据“完美集合”的定义判断集合  $P$ 、 $Q$ ，可得出结论；

(2) 分析可知  $x \geq 7$ ，则  $x \in C$ ，可知集合  $C$  中的另一个元素为  $\frac{19-x}{2}$ ，则  $\frac{19-x}{2}$  为 1、3、4、5、6 中的某个数，求出  $x$  的可能取值，然后对  $x$  的取值进行分类讨论，结合“完美集合”的定义判断即可得解。

【小问1详解】

解：对于集合  $P = \{1, 2, 3\}$ ，取集合  $A_1 = \{1\}$ 、 $B_1 = \{2\}$ 、 $C_1 = \{3\}$ ，则  $P = A_1 \cup B_1 \cup C_1$ ，

三个集合  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  两两没有公共元素，且  $1+2=3$ ，故集合  $P$  为“完美集合”，

对于集合  $Q$ ，若集合  $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，则存在集合  $A_2$ 、 $B_2$ 、 $C_2$ ，

使得  $A_2 \cap B_2 = \emptyset$ ， $A_2 \cap C_2 = \emptyset$ ， $C_2 \cap B_2 = \emptyset$  且  $Q = A_2 \cup B_2 \cup C_2$ ，

记集合  $A_2$  所有元素之和为  $a$ ，集合  $B_2$  中所有元素之和为  $b$ ，集合  $C_2$  所有元素之和为  $c$ ，

$$\text{则} \begin{cases} a+b=c \\ a+b+c=1+2+3+4+5+6=21 \end{cases}, \text{ 可得 } c = \frac{21}{2} \notin \mathbf{N}^*,$$

故集合  $Q$  不是“完美集合”。

【小问2详解】

解：因为集合  $P = \{1, x, 3, 4, 5, 6\}$  为“完美集合”，由 (1) 可知  $x \neq 2$ ，则  $x \geq 7$ ，

根据定义可知， $c_n$  为  $P$  中的最大元素，故  $c_2 = x$ ，

$$\text{又因为集合 } C \text{ 中各元素之和为 } L = \frac{1+x+3+4+5+6}{2} = \frac{x+19}{2},$$

所以，集合  $C$  中的另一个元素为  $\frac{x+19}{2} - x = \frac{19-x}{2}$ ，且  $\frac{19-x}{2}$  为 1、3、4、5、6 中的某个数，

所以， $x$  的可能取值有 17、13、11、9、7，

当  $x=7$  时，则  $C = \{6, 7\}$ ， $\begin{cases} A = \{1, 3\} \\ B = \{5, 4\} \end{cases}$  或  $\begin{cases} A = \{5, 4\} \\ B = \{1, 3\} \end{cases}$ ，满足定义要求；

当  $x=9$  时，则  $C = \{5, 9\}$ ， $\begin{cases} A = \{1, 3\} \\ B = \{4, 6\} \end{cases}$  或  $\begin{cases} A = \{4, 6\} \\ B = \{1, 3\} \end{cases}$ ，满足定义要求；

当  $x=11$  时，则  $C = \{4, 11\}$ ， $\begin{cases} A = \{1, 5\} \\ B = \{3, 6\} \end{cases}$  或  $\begin{cases} A = \{3, 6\} \\ B = \{1, 5\} \end{cases}$ ，满足定义要求；

当  $x=13$  或 17 时，在 1、3、4、5、6 中任取两个数，这两个数之和的最大值为 11，

此时，集合  $P$  不是“完美集合”。

综上所述，当  $x=7$  时， $\begin{cases} A = \{1, 3\} \\ B = \{5, 4\} \\ C = \{6, 7\} \end{cases}$  或  $\begin{cases} A = \{5, 4\} \\ B = \{1, 3\} \\ C = \{6, 7\} \end{cases}$ ；

当  $x=9$  时， $\begin{cases} A = \{1, 3\} \\ B = \{4, 6\} \\ C = \{5, 9\} \end{cases}$  或  $\begin{cases} A = \{4, 6\} \\ B = \{1, 3\} \\ C = \{5, 9\} \end{cases}$ ；

$$\text{当 } x=11 \text{ 时, } \begin{cases} A=\{1,5\} \\ B=\{3,6\} \\ C=\{4,11\} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} A=\{3,6\} \\ B=\{1,5\} \\ C=\{4,11\} \end{cases} .$$

【点睛】关键点点睛：本题考察集合的新定义，解题时要紧扣“完美集合”的定义，分析集合元素之间的关系，解本题第（2）问的关键就是找出集合  $C$  中的两个元素，确定  $x$  的可能取值，然后逐一结合定义分析讨论求解。

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

