高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|(x+3)(1-x)>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $\{-2,-1,0\}$　　D. $\{-2,-1\}$

2. 若复数 z 满足 $(2-i)z-i=5+4i$，则 $z=$

A. $3+3i$　　B. $3-3i$　　C. $1+3i$　　D. $1-3i$

3. 在区间 $[0,\pi]$ 上随机取一个数 x，则事件"$\cos x>\frac{1}{2}$"的概率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. "$\log_3(x-2)<1$"成立的一个必要不充分条件为

A. $2<x<5$　　B. $x>5$　　C. $x<5$　　D. $3<x<5$

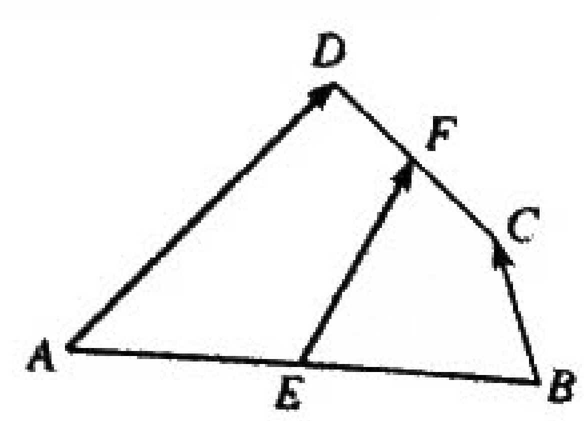
5. 从某中学甲、乙两班中分别随机抽取10名同学，测量他们的身高（单位：cm），所得数据用茎叶图表示如下，由此估计甲、乙两班同学的身高情况. 针对甲、乙两班分别抽取的10名同学的两组数据，下列结论正确的是

甲班		乙班
2　1	18	2
8　2　0	17	1　2　6　8　9
6　5　3	16	2　4　7
8　7	15	9

A. 甲、乙两班同学身高的极差不相等　　B. 甲班同学身高的平均值较大

C. 甲班同学身高的中位数较大　　D. 甲班同学身高在175 cm以上的人数较多

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 AB，CD 的中点，若 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{EF}=$



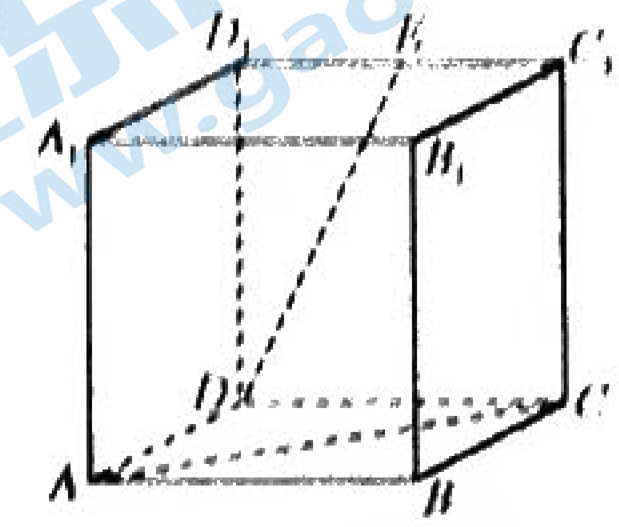
A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x-2)$，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=3^x$，则 $f(2\ 022)+f(2\ 023)=$

A. 3　　　　B. 0　　　　C. -1　　　　D. -3

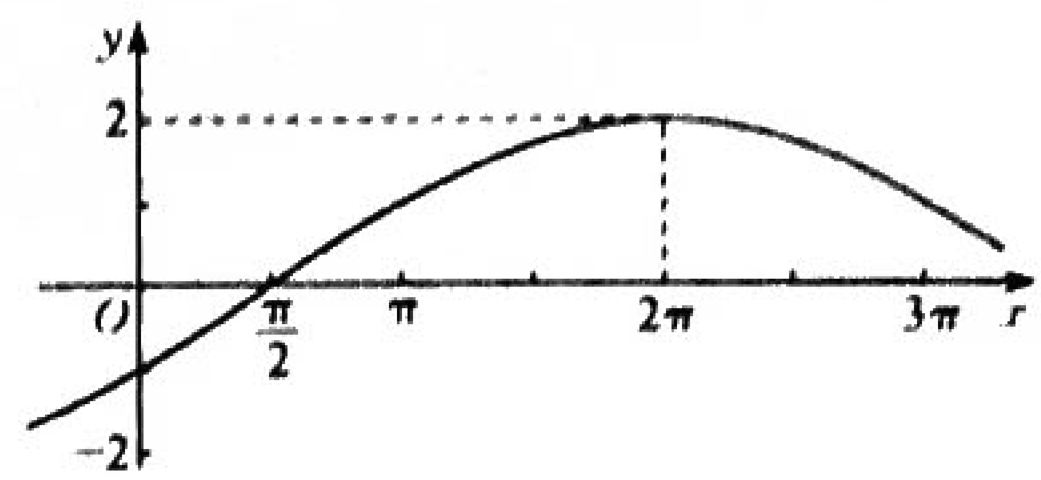
8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 为棱 C_1D_1 的中点，则异面直线 AC 与 DE 所成角的余弦值为



A. $\frac{1}{5}$　　　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　D. $\frac{3}{4}$

9. 如图，函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象过 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$(2\pi,2)$ 两点，为得到函数 $g(x)=2\cos(\omega x-\varphi)$ 的图象，应将 $f(x)$ 的图象



A. 向右平移 $\frac{7\pi}{6}$ 个单位长度

B. 向左平移 $\frac{7\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{5\pi}{2}$ 个单位长度

D. 向左平移 $\frac{5\pi}{2}$ 个单位长度

10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与斜率为 1 的直线交于 A,B 两点，若线段 AB 的中点为 $(4,1)$，则 C 的离心率 $e=$

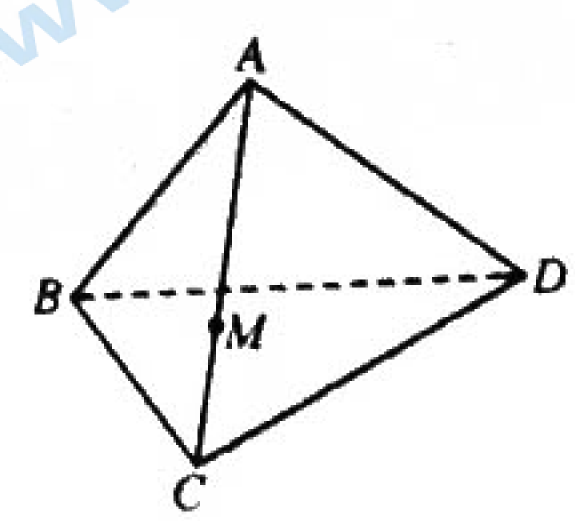
A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　　D. $\sqrt{3}$

11. 下列函数中，最小值不为 2 的是

A. $y=\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}$　　　　B. $y=\cos x+x\sin x+\frac{3\pi}{2}+2(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$

C. $y=\frac{\sqrt{3}\sin x+3\cos x+6}{\cos x+2}$　　　　D. $y=\sqrt{x}+\sqrt{9-x}$

12. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 CBD，$AB=BC=CD=AD=BD=6$，点 M 在 AC 上，$AM=2MC$，过点 M 作三棱锥 $A-BCD$ 外接球的截面，则截面圆面积的最小值为



A. 12π　　　　B. 10π

C. 8π　　　　D. 4π

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\leqslant 2,\\ x+y-1\geqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-3y$ 的最大值为________.

14. 已知 $f(x)=(x+1)e^x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为________.

15. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，过 C 的焦点 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A,B 两点，若 $|FA|\cdot|FB|=32$，则 $p=$________.

16. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，D 在边 BC 上，且 AD 平分 $\angle BAC$，$AD=\sqrt{3}$，$b\sin B-a\sin A=c(\sin B-\sin C)$，$\sin C=3\sin B$，则△$ABC$ 的面积为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

2022 年 7 月 6 日～14 日，素有“数学界奥运会”之称的第 29 届国际数学家大会，受疫情影响，在线上进行，世界各地的数学家们相聚云端、共襄盛举. 某学校数学爱好者协会随机调查了学校 100 名学生，得到如下调查结果：男生占调查人数的 55%，喜欢数学的有 40 人，其他的不喜欢数学；在调查的女生中，喜欢数学的有 20 人，其他的不喜欢数学.

（1）请完成下面 2×2 列联表；

	喜欢数学	不喜欢数学	合计
男生			
女生			
合计			

（2）根据 2×2 列联表，判断是否有 99.5% 的把握认为该校学生喜欢数学与学生的性别有关？

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

临界值表：

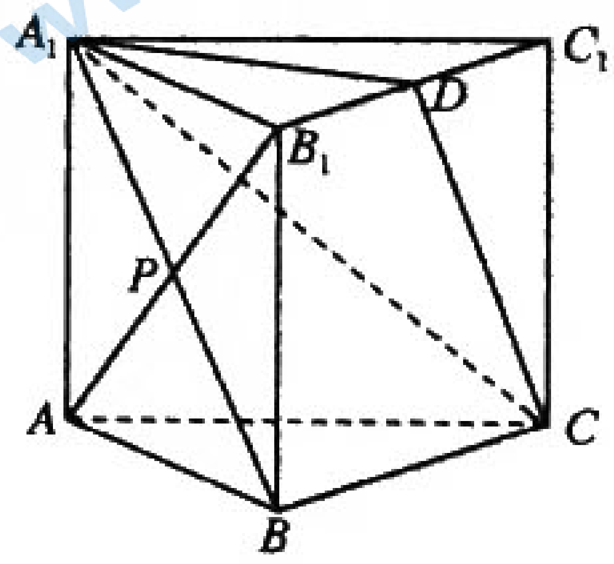
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

18.（本小题满分 12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 B_1C_1 的中点.

（1）证明：$AB_1/\!/$平面 A_1CD；

（2）设 P 为 AB_1 与 A_1B 的交点，若 $\triangle A_1B_1C_1$ 是边长为 2 的等边三角形，$AA_1=\sqrt{3}$，求点 P 到平面 A_1CD 的距离.



19.（本小题满分 12 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，且 $\forall n\geqslant 2$，$a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n-1}a_{n-1}=a_n$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$S_n<3$.

20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+2}{2}x^2+2ax+1$.

(1)若 $x=4$ 是 $f(x)$的极值点,求 a 的值,并判断 $x=4$ 是 $f(x)$的极大值点还是极小值点?

(2)若 $f(x)$在$(1,2)$内有零点,求实数 a 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,且 F_1,F_2 与短轴的两个端点恰好为正方形的四个顶点,点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在 E 上.

(1)求 E 的方程;

(2)过点 F_2 作互相垂直且与 x 轴均不重合的两条直线分别交 E 于点 A,B 和 C,D,若 M,N 分别是弦 AB、CD 的中点,证明:直线 MN 过定点.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数).以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=m$.

(1)求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2)若 C_1 与 C_2 交于相异两点 A,B,且 $|AB|=2\sqrt{3}$,求 m 的值.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知 $a>0,b>0,c>0$,证明:

(1)$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+8ab\geqslant 8$;

(2)$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}\geqslant abc$.

20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+2}{2}x^2+2ax+1$.

(1)若 $x=4$ 是 $f(x)$ 的极值点,求 a 的值,并判断 $x=4$ 是 $f(x)$ 的极大值点还是极小值点?

(2)若 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内有零点,求实数 a 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,且 F_1,F_2 与短轴的两个端点恰好为正方形的四个顶点,点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在 E 上.

(1)求 E 的方程;

(2)过点 F_2 作互相垂直且与 x 轴均不重合的两条直线分别交 E 于点 A,B 和 C,D,若 M,N 分别是弦 AB、CD 的中点,证明:直线 MN 过定点.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)**选修 4-4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数). 以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=m$.

(1)求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2)若 C_1 与 C_2 交于相异两点 A,B,且 $|AB|=2\sqrt{3}$,求 m 的值.

23.(本小题满分 10 分)**选修 4-5:不等式选讲**

已知 $a>0,b>0,c>0$,证明:

(1)$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+8ab\geq 8$;

(2)$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}\geq abc$.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意知 $B=(-3,1)$，所以 $A\cap B=\{-1,0\}$. 故选 B.

2. C　由 $(2-i)z-i=5+4i$，得 $z=\frac{5+5i}{2-i}=\frac{(5+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5+15i}{5}=1+3i$. 故选 C.

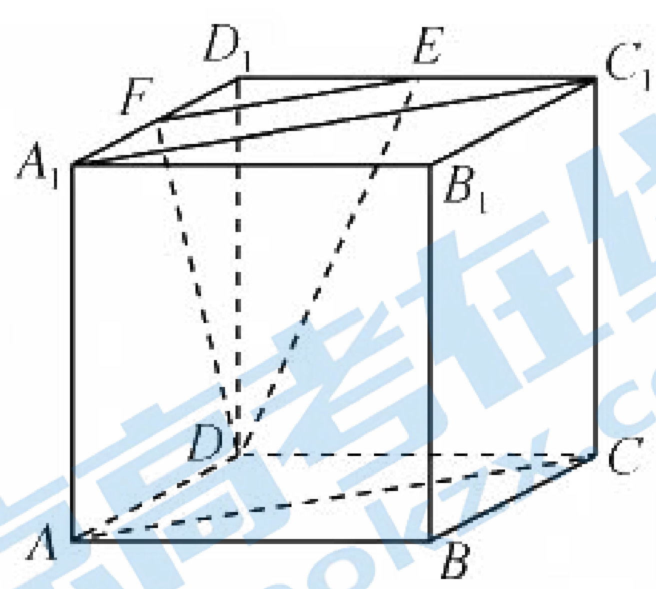
3. A　因为 $x\in[0,\pi]$，$\cos x>\frac{1}{2}$，所以 $0\leqslant x<\frac{\pi}{3}$，故所求概率 $P=\frac{\frac{\pi}{3}-0}{\pi}=\frac{1}{3}$. 故选 A.

4. C　由 $\log_3(x-2)<1$，得 $2<x<5$，所以选项 A 是充要条件，选项 B 是既不充分又不必要条件，选项 D 是充分不必要条件，选项 C 是必要不充分条件. 故选 C.

5. A　甲班同学身高极差为 $182-157=25$，乙班同学身高极差为 $182-159=23$，即甲、乙两班同学身高的极差不相等，故 A 正确；易求甲、乙两班同学身高的平均值分别为 169.2，171，故乙班同学身高平均值较大，故 B 错误；甲、乙两班同学身高的中位数分别为 168，171.5，故 C 错误；甲、乙两班同学身高在 175 cm 以上的人数分别为 3 和 4，故 D 错误. 故选 A.

6. A　由题意知，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$，因为 E，F 分别为 AB，CD 的中点，所以 $\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{CF}$，所以 $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. 故选 A.

7. D　因为 $f(x+2)=f(x-2)$，所以 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(2\,022)+f(2\,023)=f(-2)+f(-1)=-f(2)-f(1)$；在 $f(x+2)=f(x-2)$ 中，令 $x=0$，得 $f(2)=f(-2)=-f(2)$，所以 $f(2)=0$，又 $f(1)=3$，所以 $f(2\,022)+f(2\,023)=-3$. 故选 D.



8. B　取 A_1D_1 的中点 F，连接 A_1C_1，EF，DF，则 $A_1C_1\parallel AC$，$EF\parallel A_1C_1$，所以 $EF\parallel AC$，所以 $\angle DEF$ 或其补角为 AC 与 DE 所成的角，设正方体的棱长为 2，则 $DE=DF=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{2}$，所以 $\cos\angle DEF=\frac{5+2-5}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 故选 B.

9. D　设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图象知 $\frac{T}{4}=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$，所以 $T=6\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{6\pi}=\frac{1}{3}$，又 $f(2\pi)=2$，所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}-2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$. 而 $g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{6}\right]$，所以将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{2}$ 个单位长度可得函数 $g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象. 故选 D.

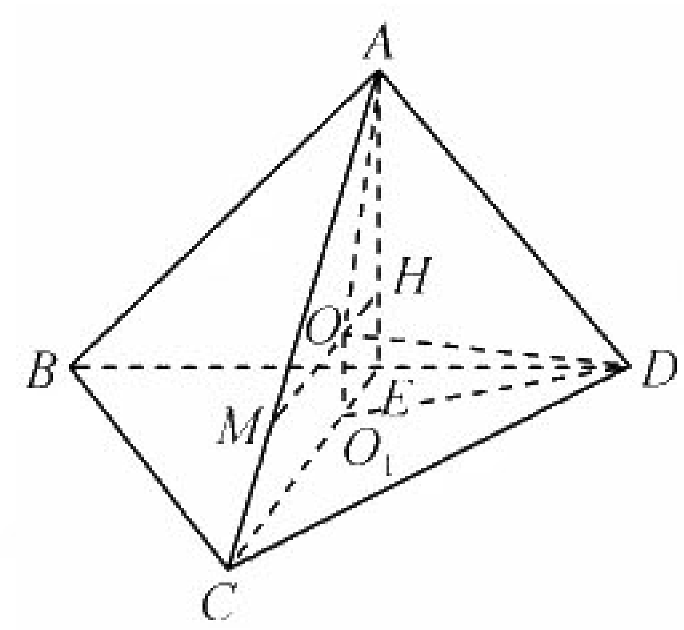
10. C　法一：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$，所以 $\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{a^2}-\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{b^2}=0$，因为 AB 的中点为 $(4,1)$，所以 $x_1+x_2=8$，$y_1+y_2=2$，所以 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4b^2}{a^2}$，由题意知 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$，所以 $\frac{4b^2}{a^2}=1$，即 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，则 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 C.

法二：直线 AB 过点 $(4,1)$，斜率为 1，所以其方程为 $y-1=x-4$，即 $y=x-3$. 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 并整理得 $(b^2-a^2)x^2+$

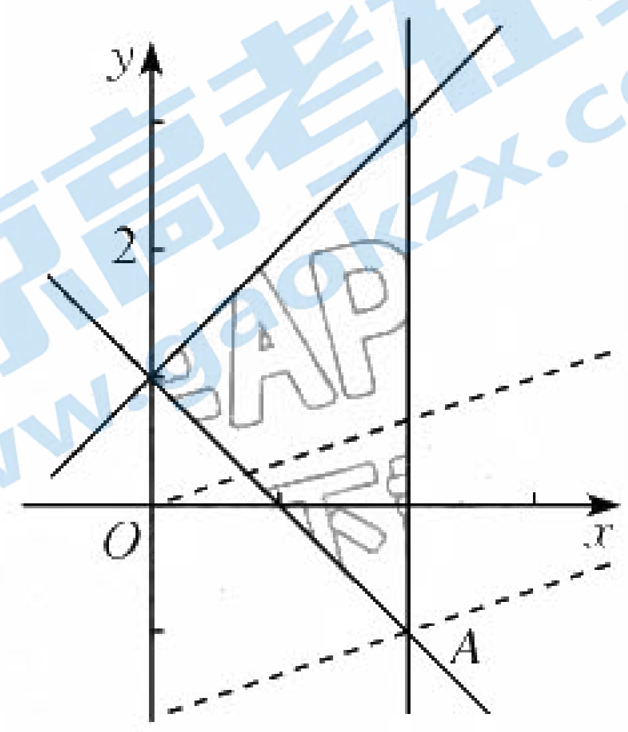
$6a^2x-9a^2-a^2b^2=0$. 因为$(4,1)$为线段 AB 的中点，所以$-\dfrac{6a^2}{b^2-a^2}=2\times4$，整理得 $a^2=4b^2$，所以 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt5}{2}$. 故选 C.

11. D　对于 A，$y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{4}{x^2}\geqslant2\sqrt{\dfrac{x^2}{4}\cdot\dfrac{4}{x^2}}=2$，当且仅当 $x=\pm2$ 时等号成立，故最小值为 2；对于 B，$y'=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$，所以 y 在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$上单调递减，从而 $x=\dfrac{3\pi}{2}$为极小值点，又当 $x=0$ 时，$y=\dfrac{3\pi}{2}+3$；当 $x=\dfrac{3\pi}{2}$时，$y=2$，所以函数的最小值为 2；对于 C，$y=3+\sqrt3\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x+2}$，因为$\dfrac{\sin x}{\cos x+2}$可以看作点 $P(\cos x,\sin x)$与点 $A(-2,0)$连线的斜率，又点 $P(\cos x,\sin x)$在圆 $x^2+y^2=1$ 上，易求得 PA 斜率的最小值为$-\dfrac{\sqrt3}{3}$，所以 $y_{\min}=3+\sqrt3\times\left(-\dfrac{\sqrt3}{3}\right)=2$；对于 D，$y^2=9+2\sqrt{x(9-x)}$，显然$(y^2)_{\min}=9$，又 $y\geqslant0$，所以 y 的最小值为 3，不是 2. 故选 D.

12. A　由题意知$\triangle ABD$ 和$\triangle BCD$ 为等边三角形，取 BD 中点为 E，连接 AE，CE，则 $AE\perp BD$，由平面 $ABD\perp$平面 CBD，平面 $ABD\cap$平面 $CBD=BD$，故 $AE\perp$平面 CBD，$AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt3$，易知球心 O 在平面 BCD 的投影为$\triangle BCD$ 的外心 O_1，过 O 作 $OH\perp AE$ 于 H，易得 $OH/\!/O_1E$，$OO_1/\!/HE$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle OHA$ 中，$OH=\sqrt3$，$AH=2\sqrt3$，所以外接球半径 $R=\sqrt{OH^2+AH^2}=\sqrt{15}$，连接 OM，因为 $AH=2HE$，$OH/\!/CE$，$AM=2MC$，所以 H,O,M 三点共线，所以 $OM=MH-OH=\sqrt3$，当 M 为截面圆圆心时截面面积最小，此时截面圆半径 $r=\sqrt{(\sqrt{15})^2-(\sqrt3)^2}=2\sqrt3$，面积为 12π. 故选 A.



13. 5　画出可行域(如图阴影部分)，当直线 $y=\dfrac13x-\dfrac13z$ 经过点 A 时 z 的取值最大，易求得 $A(2,-1)$，所以 $z_{\max}=5$.



14. $2x-y+1=0$　因为 $f'(x)=(x+2)e^x$，所以 $f'(0)=2$，又 $f(0)=1$，故所求切线方程为 $y-1=2(x-0)$，即 $2x-y+1=0$.

15. 4　由题意知 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，直线 AB 的方程为 $y=x-\dfrac{p}{2}$，代入 C 的方程并整理得 $x^2-3px+\dfrac{p^2}{4}=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=3p$，$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$，因为$|FA|=\dfrac{p}{2}+x_1$，$|FB|=\dfrac{p}{2}+x_2$ 且$|FA|\cdot|FB|=32$，所以$\left(\dfrac{p}{2}+x_1\right)\left(\dfrac{p}{2}+x_2\right)=32$，即$\dfrac{p^2}{4}+\dfrac{p}{2}(x_1+x_2)+x_1x_2=32$，所以$\dfrac{p^2}{4}+\dfrac{p}{2}\cdot3p+\dfrac{p^2}{4}=32$，结合 $p>0$，解得 $p=4$.

16. $\dfrac{4\sqrt3}{3}$　由 $b\sin B-a\sin A=c(\sin B-\sin C)$及正弦定理，得 $b^2-a^2=c(b-c)$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，由余弦定理得 $\cos A=\dfrac12$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$，因为 AD 平分$\angle BAC$，所以$\angle CAD=\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$，又因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CAD}+S_{\triangle BAD}$，即$\dfrac12bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac12b\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac12c\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}$，化简得 $bc=b+c$；由 $\sin C=3\sin B$ 及正弦定理，得 $c=3b$，与 $bc=b+c$ 联立，解得 $b=\dfrac43$，$c=4$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{4\sqrt3}{3}$.

17. 解：(1)调查的男生人数为 $100\times55\%=55$(人)，

调查的女生人数为 $100-55=45$(人)， ………………………………………………………… 2 分

补全 2×2 列联表如下：

	喜欢数学	不喜欢数学	合计
男生	40	15	55
女生	20	25	45
合计	60	40	100

……………………………………………………………………………………………… 6 分

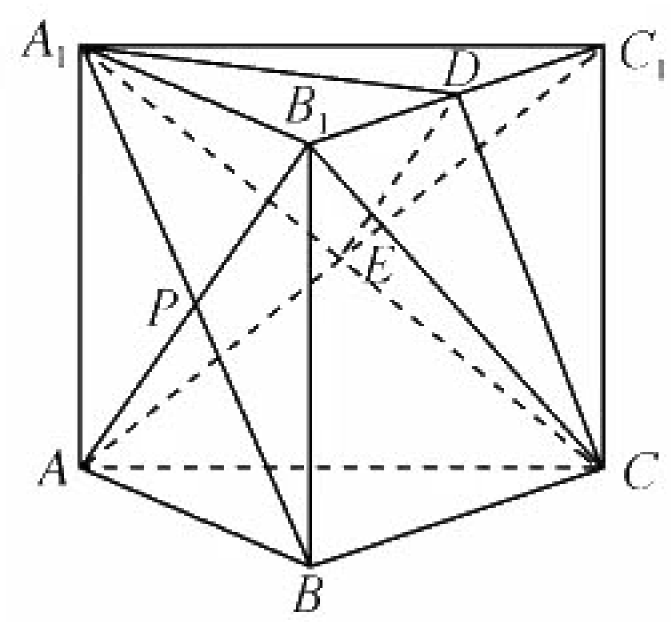
(2) $K^2=\dfrac{100\times(40\times25-15\times20)^2}{60\times40\times55\times45}\approx8.249>7.879$， ………………………………… 10 分

所以有 99.5% 的把握认为该校学生喜欢数学与学生的性别有关. ………………………………… 12 分

18. (1)证明：连接 AC_1 交 A_1C 于点 E，连接 DE，则 E 为 AC_1 的中点，………………………… 1 分

又 D 为 B_1C_1 的中点，所以 $DE/\!/AB_1$. ……………………………………………………… 2 分

因为 $DE\subset$ 平面 A_1CD，$AB_1\not\subset$ 平面 A_1CD，所以 $AB_1/\!/$ 平面 A_1CD. ……………………… 4 分



(2)解：由(1)知 $AB_1/\!/$ 平面 A_1CD，且 $P\in AB_1$，故点 P 到平面 A_1CD 的距离等于点 B_1 到平面 A_1CD 的距离，设为 d. ………………………………………………… 5 分

因为 $A_1B_1=B_1C_1=C_1A_1=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，所以 $A_1D=\sqrt{3}$，$CD=2$，$A_1C=\sqrt{7}$， ………… 7 分

所以 $A_1D^2+CD^2=A_1C^2$，所以 $\angle A_1DC=90^\circ$，所以 $\triangle A_1CD$ 的面积为 $\sqrt{3}$. ………… 8 分

连接 B_1C，则三棱锥 $C-A_1B_1D$ 的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\sin60^\circ\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$，…… 10 分

又三棱锥 B_1-A_1CD 的体积等于三棱锥 $C-A_1B_1D$ 的体积，

所以 $\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}d=\dfrac{1}{2}$，所以 $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以点 P 到平面 A_1CD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………… 12 分

19. (1)解：因为 $\forall n\geqslant2$，$a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n-1}a_{n-1}=a_n$，

所以当 $n\geqslant3$，$a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n-2}a_{n-2}=a_{n-1}$，……………………………………… 1 分

两式相减，得 $\dfrac{1}{n-1}a_{n-1}=a_n-a_{n-1}$，即 $\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}=a_n$，……………………………………… 2 分

当 $n=2$ 时，$a_2=a_1=1$，

所以当 $n\geqslant3$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}$，……………………………………………………………… 3 分

所以当 $n\geqslant3$ 时，$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\dfrac{a_3}{a_2}\times a_2=\dfrac{n}{n-1}\times\dfrac{n-1}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{3}{2}\times1=\dfrac{n}{2}$， ………………… 4 分

当 $n=2$ 时，上式成立；当 $n=1$ 时，上式不成立，………………………………………………… 5 分

所以 $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \dfrac{n}{2}, n\geqslant2.\end{cases}$ ……………………………………………………………… 6 分

由 $1<x<2$，得 $\frac{x^2}{2}-2x=\frac{1}{2}x(x-4)<0$，所以 $\frac{3}{2}a=\frac{x^3-3x^2+3}{x^2-4x}$. ………………………………………… 8 分

设 $g(x)=\frac{x^3-3x^2+3}{x^2-4x}(1<x<2)$，则 $g'(x)=\frac{(x-2)(x^3-6x^2-6)}{(x^2-4x)^2}$. ………………………………… 9 分

设 $h(x)=x^3-6x^2-6(1<x<2)$，则 $h'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上为减函数，从而 $h(x)<h(1)=-11<0$，………………………………………… 10 分

所以 $g'(x)>0$，从而 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上为增函数，………………………………………………………… 11 分

又 $g(1)=-\frac{1}{3}$，$g(2)=\frac{1}{4}$，

所以 $g(x)$ 的值域为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$，于是 $-\frac{1}{3}<\frac{3}{2}a<\frac{1}{4}$，即 $-\frac{2}{9}<a<\frac{1}{6}$，

故实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{2}{9},\frac{1}{6}\right)$. ……………………………………………………………………… 12 分

21.(1)解：设 $|F_1F_2|=2c$，因为两个焦点和短轴的两个端点为正方形的四个顶点，所以 $b=c$，

因为点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在 E 上，所以 $\frac{2}{4a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$，又 $a^2=b^2+c^2$，………………………………… 2 分

解得 $a^2=2$，$b^2=1$，

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：由(1)知 $F_2(1,0)$，由题意知直线 AB 和直线 CD 的斜率都存在且不为 0，设直线 AB 方程为：$x=my+1$，与 E 的方程联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ x=my+1,\end{cases}$

消去 x 并整理，得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$，……………………………………………………………… 5 分

且 $\Delta=4m^2+4(m^2+2)>0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2}$，所以 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\frac{4}{m^2+2}$，

所以点 M 的坐标为 $\left(\frac{2}{m^2+2},-\frac{m}{m^2+2}\right)$，

因为 $AB\perp CD$，则直线 CD 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+1$，

同理得 $N\left(\frac{2m^2}{2m^2+1},\frac{m}{2m^2+1}\right)$，………………………………………………………………… 6 分

当 $\frac{2m^2}{2m^2+1}\neq\frac{2}{m^2+2}$，即 $m\neq\pm1$ 时，直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\dfrac{\frac{m}{2m^2+1}+\frac{m}{m^2+2}}{\frac{2m^2}{2m^2+1}-\frac{2}{m^2+2}}=\frac{3m}{2(m^2-1)}$，

所以直线 MN 的方程为 $y+\frac{m}{m^2+2}=\frac{3m}{2(m^2-1)}\left(x-\frac{2}{m^2+2}\right)$，……………………………… 8 分

所以 $y=\frac{3m}{2(m^2-1)}\left(x-\frac{2}{m^2+2}\right)-\frac{m}{m^2+2}=\frac{3m}{2(m^2-1)}\left[x-\frac{2}{m^2+2}-\frac{2(m^2-1)}{3(m^2+2)}\right]$，

因为 $\frac{2}{m^2+2}+\frac{2(m^2-1)}{3(m^2+2)}=\frac{6+2(m^2-1)}{3(m^2+2)}=\frac{2(m^2+2)}{3(m^2+2)}=\frac{2}{3}$，

所以直线 MN 的方程即为 $y=\dfrac{3m}{2(m^2-1)}\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$，显然直线 MN 过定点 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$；…………………… 10 分

当 $\dfrac{2m^2}{2m^2+1}=\dfrac{2}{m^2+2}$，即 $m=\pm1$ 时，则 $M\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$，$N\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ 或 $M\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，$N\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$，

此时直线 MN 的方程为 $x=\dfrac{2}{3}$，也过点 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. …………………… 11 分

综上所述，直线 MN 过定点 $\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. …………………… 12 分

22. 解：(1) 在 C_1 的参数方程中消去参数 α，得 C_1 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=4$；…………………… 2 分

由 $\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=m$ 得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta=m$，…………………… 4 分

又 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，所以 C_2 的直角坐标方程为 $x-y-\sqrt{2}m=0$. …………………… 5 分

(2) 由 (1) 知曲线 C_1 是以 $(1,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，曲线 C_2 为直线，…………………… 6 分

则圆心 $(1,0)$ 到曲线 C_2 的距离 $d=\dfrac{|1-\sqrt{2}m|}{\sqrt{2}}$，…………………… 7 分

因为 $|AB|=2\sqrt{3}$，所以 $\left(\dfrac{|1-\sqrt{2}m|}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2=2^2$，…………………… 8 分

解得 $m=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$，或 $m=\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$. …………………… 10 分

23. 证明：(1) 法一：因为 $a>0$，$b>0$，

所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+8ab=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+4ab+4ab\geqslant4\sqrt[4]{\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{b^2}\cdot4ab\cdot4ab}=8$. …………………… 3 分

当且仅当 $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{b^2}=4ab$，即 $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立. …………………… 4 分

法二：因为 $a>0$，$b>0$，

所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\geqslant\dfrac{2}{ab}$，当且仅当 $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{b^2}$，即 $a=b$ 时等号成立. …………………… 2 分

所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+8ab\geqslant\dfrac{2}{ab}+8ab\geqslant2\sqrt{\dfrac{2}{ab}\times8ab}=8$，当且仅当 $\dfrac{2}{ab}=8ab$，即 $ab=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立. …………………… 3 分

综上，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+8ab\geqslant8$，当且仅当 $a=b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立. …………………… 4 分

(2) 因为 $a^2b^2+b^2c^2\geqslant2ab^2c$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立；

$b^2c^2+c^2a^2\geqslant2abc^2$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立；

$c^2a^2+a^2b^2\geqslant2a^2bc$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，…………………… 7 分

所以 $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geqslant2abc(a+b+c)$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立. …………………… 8 分

因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，所以 $a+b+c>0$，…………………… 9 分

所以 $\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}\geqslant abc$. …………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。