2023 北京北师大附中高二（下）期中

数　　学

班级_____ 姓名______ 学号

考生须知	
	1．本试卷有三道大题，共 5 页。考试时长 120 分钟，满分 150 分。
	2．考生务必将答案填写在答题纸上，在试卷上作答无效。
	3．考试结束后，考生应将答题纸交回。

一、选择题（每小题 4 分，共 48 分，每题均只有一个正确答案）

1. 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的长轴长为（　　）

A．3　　B．6　　C．8　　D．9

2. 抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为（　　）

A. $x=-2$　　B. $y=-2$　　C. $x=-1$　　D. $y=-1$

3. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在点 $x=1$ 处的导数值是（　　）

A. 1　　B. -1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的一条渐近线方程为 $x+2y=0$，则其离心率为（　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{17}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{4}$

5. 我国古代有辉煌的数学研究成果，其中《周髀算经》，《九章算术》，《海岛算经》，《孙子算经》均有着十分丰富的内容. 某中学计划将这 4 本专著作为高中阶段“数学文化”校本课程选修内容，要求每学年至少选一科，三学年必须将 4 门选完，则小南同学的不同选修方式有（　　）种.

A．12　　B．24　　C．36　　D．72

6. 若 $(x-3)^2(x+1)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{10}x^{10}$，则 $\log_2(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{10})=$（　　）

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 12

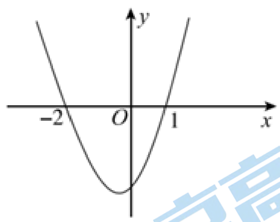
7. 5 个人排成一排，其中甲与乙不相邻，而丙与丁必须相邻，则不同的排法种数为（　　）

A. 24　　B. 48　　C. 60　　D. 72

8. 若函数 $f(x)=x^3-3bx+3b$ 有极小值，则（　）

A．$b\geqslant 0$　　B．$b\leqslant 1$　　C．$b\geqslant 1$　　D．$b>0$

9. 设函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论中一定成立的是(　　)



A. $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$　　B. $f(x)$ 有极小值 $f(-2)$

C. $f(x)$ 有极大值 $f(1)$　　D. $f(x)$ 有极小值 $f(1)$

10. 已知点 P 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上一动点，Q 是圆 $C:(x+3)^2+y^2=1$ 上一动点，点 M（6，4），则 $|PQ|-|PM|$ 的最大值为（　　）

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

11. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且 $F(x)=f(x)+g(x)$，则“$F(x)$ 有极值点”是“$f(x)$ 和 $g(x)$ 中至少有一个函数有极值点”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

12. 设点 A，F_1，F_2 的坐标分别为 $(-1,1)$，$(-1,0)$，$(1,0)$ 动点 $P(x,y)$ 满足：$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=4$，给出下列四个结论：

① 点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

② $|PA|+|PF_2|<5$；

③ 存在 4 个点 P，使得 ΔPAF_1 的面积为 $\frac{3}{2}$；

④ $|PA|+|PF_1|>1$.

则正确结论的个数是(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

13.　$(2x+\frac{1}{x})^4$ 展开式的常数项是__________.

14.　若抛物线 $y^2=12x$ 的焦点为 F，点 P 在此抛物线上且横坐标为3，则 $|PF|=$_________.

15. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像在点 $M(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=\frac{1}{2}x+2$，则 $f(1)+f'(1)=$ __________.

16.　已知双曲线 C 的焦点为 $F_1(0,2)$，$F_2(0,-2)$，实轴长为 2，则双曲线 C 的离心率是________；若点 Q 是双曲线 C 的渐近线上一点，且 $F_1Q\perp F_2Q$，则△QF_1F_2

的面积为________.

17. 若函数 $f(x)=x^3-ax^2+2$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的一个取值是__________.

18. 已知函数 $f(x)=\ln x-k\sin x-1$， $x\in(0,\pi]$，给出下列四个结论：

①对任意的实数 k， $f(x)$ 一定有极值点；

②当 $k\geqslant 0$ 时， $f(x)$ 一定存在零点；

③当 $k\geqslant\dfrac{2}{\pi}$ 时， $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上一定有两个极值点；

④存在无数个实数 k，使 $f(x)$ 有最大值.

其中所有正确结论的序号是______________.

三、解答题（共 5 小题，共 72 分. 解答时写出文字说明，演算步骤或证明过程）

19. （本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，其左焦点为 $F_1(-1,0)$. 直线 $l:y=\dfrac{1}{2}(x+2)$ 交椭圆 C 于不同的两点 A,B.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）求 ΔF_1AB 的面积.

20.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x^2-2a\ln x$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $2x-y-1=0$，求 a 的值；

（2）求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值.

21.（本小题 15 分）

已知椭圆 C： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且椭圆 C 经过点 $(1,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）已知过点 $P(4,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A， B，与直线 $x=1$ 交于点 Q，设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$， $\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{QB}$ (λ， $\mu\in\mathbf{R}$)，求证： $\lambda+\mu$ 为定值.

22.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax-x^2}{e^x}$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a>0$ 时，求证：$f(x)>-\frac{2}{\mathrm{e}}$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 成立.

23.（本小题 14 分）

已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的无穷数列．该数列前 n 项的最大值记为 A_n，第 n 项之后各项 $a_{n+1}, a_{n+2},\cdots$ 的最小值记为 B_n，$d_n=A_n-B_n$．

（Ⅰ）若 $\{a_n\}$ 为 $2,1,4,3,2,1,4,3,\cdots$，是一个周期为 4 的数列（即对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+4}=a_n$），写出 d_1,d_2,d_3,d_4 的值；

（Ⅱ）设 d 是非负整数．证明：$d_n=-d$（$n=1,2,3,\cdots$）的充分必要条件为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列；

（Ⅲ）证明：若 $a_1=2$，$d_n=1$（$n=1,2,3,\cdots$），则 $\{a_n\}$ 的项只能是 1 或者 2，且有无穷多项为 1．

参考答案

一、选择题（每小题 4 分，共 48 分，每题均只有一个正确答案）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	9	10
B	D	B	A	C	C	A	D	A	C	D	B

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

13. 24　14. 6　15. 3　16. 2；$2\sqrt{3}$　17. $a\in(-\infty,\frac{3}{2}]$（答案不唯一）

18. ②④

三、解答题（共 5 小题，共 72 分.解答时写出文字说明，演算步骤或证明过程）

19.（本小题 14 分）

解：（I）由已知有 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ c=1,\\ a^2-b^2=c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=1,\\ c=1.\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………5 分

（II）由 $\begin{cases}y=k(x+2),\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 消去 y，整理得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+(8k^2-2)=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{1+2k^2}=-\dfrac{4}{3},\\ x_1x_2=\dfrac{8k^2-2}{1+2k^2}=0.\end{cases}$

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

直线 l 的方程为 $x-2y+2=0$，$F_1(-1,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

所以 ΔF_1AB 的面积为 $\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{3}$. ………………14 分

20.（本小题 14 分）

解：（1）因为 $f(x)=x^2-2a\ln x$，所以 $f'(x)=2x-\dfrac{a}{x}$，所以 $f'(1)=2-a$.

因为 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $2x-y-1=0$.

所以 $2-a=2$，解得 $a=0$. ……………………………………5 分

（2）因为 $f(x)=x^2-2a\ln x$，$x\in[1,2]$，所以 $f'(x)=2x-\dfrac{2a}{x}=\dfrac{2x^2-2a}{2x}$，

①当 $2a\le 2$，即 $a\le 1$ 时，$f'(x)\ge 0$ 在 $[1,2]$ 恒成立，

所以 $y=f(x)$ 在 $[1,2]$ 单调递增；所以最小值为 $f(1)=1$；

当 $2a>2$ 时，令 $f'(x)=\dfrac{2x^2-2a}{2x}=0$， $x=\sqrt{a}$ 或 $x=-\sqrt{a}$ （舍）

②当 $\sqrt{a}\geqslant 2$，即 $a\geqslant 4$ 时， $f'(x)\leqslant 0$，

所以 $y=f(x)$ 在 $[1,2]$ 单调递减；所以最小值为 $f(2)=4-2a\ln 2$；

③当 $1<\sqrt{a}<2$，即 $1<a<4$ 时，

x	$(1,\sqrt{a})$	$\sqrt{a}$	$(\sqrt{a},4)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

因此， $f(x)$ 的减区间为 $(1,\sqrt{a})$，增区间为 $(\sqrt{a},4)$.

所以当 $x=\sqrt{a}$ 时， $f(x)$ 有最小值为 $a-a\ln a$.　　......................................14 分

21.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由题意可知 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2, \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2}{b^2}=1, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$ 得 $b^2=2$， $a^2=4$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.　...............5 分

（Ⅱ）由题意可知，直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ x-1=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-3k. \end{cases}$ 所以 $Q(1,-3k)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 得 $x^2+2(kx-4k)^2=4$.

整理得 $(1+2k^2)x^2-16k^2x+(32k^2-4)=0$.

由 $\Delta=(-16k^2)^2-4(1+2k^2)(32k^2-4)>0$，得 $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}<k<\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

设直线 l 与椭圆 C 的交点 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{16k^2}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{32k^2-4}{1+2k^2}$.

因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$， $\overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{QB}$ 且 $\overrightarrow{AP}=(4-x_1,-y_1)$， $\overrightarrow{PB}=(x_2-4,y_2)$，

$\overrightarrow{AQ}=(1-x_1,-3k-y_1)$， $\overrightarrow{QB}=(x_2-1,y_2+3k)$，

所以 $\lambda+\mu=\dfrac{4-x_1}{x_2-4}+\dfrac{1-x_1}{x_2-1}=\dfrac{(4-x_1)(x_2-1)+(1-x_1)(x_2-4)}{(x_2-4)(x_2-1)}$

$=\dfrac{5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8}{(x_2-4)(x_2-1)}$.

因为 $5(x_1+x_2)-2x_1x_2-8=5\times\dfrac{16k^2}{1+2k^2}-2\times\dfrac{32k^2-4}{1+2k^2}-8$

$=\dfrac{80k^2-64k^2+8-8-16k^2}{1+2k^2}=0$，

所以 $\lambda+\mu=0$. ……………15 分

22.（本小题 15 分）

解：(I) 因为 $f(x)=\dfrac{ax-x^2}{e^x}$ 所以 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{e^x}$

当 $a=-1$ 时， $f'(x)=\dfrac{x^2-x-1}{e^x}$ 所以 $f'(1)=\dfrac{-1}{e}$， 而 $f(1)=\dfrac{-2}{e}$

曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(-\dfrac{2}{e})=-\dfrac{1}{e}(x-1)$

化简得到 $y=-\dfrac{1}{e}x-\dfrac{1}{e}$

………………………………5 分

(II) **法一：**

因为 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{e^x}$， 令 $f'(x)=\dfrac{x^2-(a+2)x+a}{e^x}=0$

得 $x_1=\dfrac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2}, x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$

当 $a>0$ 时， x， $f'(x)$， $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表:

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(0), f(x_2)$ 中较小的值，

而 $f(0)=0>-\dfrac{2}{e}$， 所以只需要证明 $f(x_2)>-\dfrac{2}{e}$

因为 $x_2^2-(a+2)x_2+a=0$，所以 $f(x_2)=\dfrac{ax_2-x_2^2}{e^{x_2}}=\dfrac{a-2x_2}{e^{x_2}}$

设 $F(x)=\dfrac{a-2x}{e^x}$，其中 $x>0$，所以 $F'(x)=\dfrac{-2-(a-2x)}{e^x}=\dfrac{2x-(a+2)}{e^x}$

令 $F'(x)=0$，得 $x_3=\dfrac{a+2}{2}$，

当 $a>0$ 时，x，$F'(x)$，$F(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表:

x	$(0,x_3)$	x_3	$(x_3,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $F(\dfrac{a+2}{2})=\dfrac{-2}{e^{1+\frac{a}{2}}}$，而 $F(\dfrac{a+2}{2})=\dfrac{-2}{e^{1+\frac{a}{2}}}>\dfrac{-2}{e}$

注意到 $x_2=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}>0$，所以 $f(x_2)=F(x_2)>-\dfrac{2}{e}$，问题得证

……………………………15 分

法二：

因为"对任意的 $x>0$，$\dfrac{ax-x^2}{e^x}>-\dfrac{2}{e}$"等价于"对任意的 $x>0$，$\dfrac{ax-x^2}{e^x}+\dfrac{2}{e}>0$"

即"$x>0$，$\dfrac{2e^x+e(ax-x^2)}{e^{x+1}}>0$"，故只需证"$x>0$，$2e^x+e(ax-x^2)>0$"

设 $g(x)=2e^x+e(ax-x^2)$，所以 $g'(x)=2e^x+e(a-2x)$

设 $h(x)=g'(x)$，$h'(x)=2e^x-2e$ 令 $h'(x)=0$，得 $x=1$

当 $a>0$ 时，x，$h'(x)$，$h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的变化情况如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以 $h(x)$ $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $h(1)$，而 $h(1)=2e+e(a-2)=ea>0$

所以 $x>0$ 时，$g'(x)=2e^x+e(a-2x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

所以 $g(x)>g(0)$

而 $g(0)=2>0$，所以 $g(x)>0$，问题得证

法三：

"对任意的$x>0$，$f(x)>-\frac{2}{e}$"等价于"$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值大于$-\frac{2}{e}$"

因为$f'(x)=\frac{x^2-(a+2)x+a}{e^x}$，令$f'(x)=0$

得$x_1=\frac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2}, x_2=\frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$

当$a>0$时，x，$f'(x)$，$f(x)$在在$(0,+\infty)$上的变化情况如下表：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上的最小值为$f(0), f(x_2)$中较小的值，

而$f(0)=0>-\frac{2}{e}$，所以只需要证明$f(x_2)>-\frac{2}{e}$

因为$x_2^{\ 2}-(a+2)x_2+a=0$，所以$f(x_2)=\frac{ax_2-x_2^{\ 2}}{e^{x_2}}=\frac{a-2x_2}{e^{x_2}}>\frac{-2x_2}{e^{x_2}}$

注意到$x_2=\frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$和$a>0$，所以$x_2=\frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}>2$

设$F(x)=\frac{-2x}{e^x}$，其中$x>2$

所以$F'(x)=\frac{-2(1-x)}{e^x}=\frac{2(x-1)}{e^x}$

当$x>2$时，$F'(x)>0$，所以$F(x)$单调递增，所以$F(x)>F(2)=-\frac{4}{e^2}$

而$-\frac{4}{e^2}-(-\frac{2}{e})=\frac{2e-4}{e^2}>0$

所以$f(x_2)>F(x_2)>-\frac{2}{e}$，问题得证

法四：

因为$a>0$，所以当$x>0$时，$f(x)=\frac{ax-x^2}{e^x}>\frac{-x^2}{e^x}$

设$F(x)=\frac{-x^2}{e^x}$，其中$x>0$ 所以$F'(x)=\frac{x(x-2)}{e^x}$

所以x，$F'(x)$，$F(x)$的变化情况如下表:

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$

$F'(x)$	$-$	0	+
$F(x)$	↘	极小值	↗

所以 $F(x)$ 在 $x=2$ 时取得最小值 $F(2)=-\dfrac{4}{e^2}$，而 $-\dfrac{4}{e^2}-(-\dfrac{2}{e})=\dfrac{2e-4}{e^2}>0$

所以 $x>0$ 时，$F(x)>-\dfrac{2}{e}$

所以 $f(x)>F(x)>-\dfrac{2}{e}$

23.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）$d_1=2-1=1$，$d_2=2-1=1$，$d_3=4-1=3$，$d_4=4-1=3$．…………..4 分

（Ⅱ）**充分性：**

因为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，且 $d\geqslant 0$，所以

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots.$$

因此 $A_n=a_n$，$B_n=a_{n+1}$，$d_n=a_n-a_{n+1}=-d$（$n=1,2,3,\cdots$）

必要性：

思路 1： 因为 $d_n=-d\leqslant 0$（$n=1,2,3,\cdots$），所以 $A_n=B_n+d_n\leqslant B_n$．

又因为 $a_n\leqslant A_n$，$a_{n+1}\geqslant B_n$，

所以 $a_n\leqslant a_{n+1}$．

于是，$A_n=a_n$，$B_n=a_{n+1}$．

因此 $a_{n+1}-a_n=B_n-A_n=-d_n=d$，

即 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列．

思路 2：反证法

若 $d_n=-d$（$n=1,2,3,\cdots$），假设 a_k 是第一个使得 $a_n<a_{n-1}$ 的项，即 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{k-1}>a_k$，

所以 $A_{k-1}=a_{k-1}$，$A_k=a_{k-1}$，$B_{k-1}\leqslant a_k$，进而可得

$d_{k-1}=A_{k-1}-B_{k-1}=a_{k-1}-B_{k-1}\geqslant a_{k-1}-a_k>0$，这与 $d_{k-1}=-d\leqslant 0$ 矛盾．

因此对任意的正整数 n，都有 $a_n\leqslant a_{n+1}$．

进而可得，$d_n=A_n-B_n=a_n-a_{n+1}=-d$，即 $a_{n+1}-a_n=d$，

因此 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列．…………..9 分

（Ⅲ）**思路 1：** 首先，$\{a_n\}$ 中的项不能是 0，否则 $d_1=a_1-0=2$，矛盾．

其次，$\{a_n\}$ 中的项不能超过 2，用反证法证明如下：

若 $\{a_n\}$ 中有超过 2 的项，设 a_k 是第一个大于 2 的项，

$\{a_n\}$ 中一定存在某项为1，否则与 $d_1=1$ 矛盾.

当 $n\geqslant k$ 时，$a_n\geqslant 2$，否则与 $d_k=1$ 矛盾；

因此存在最大的 i 在 2 到 $k-1$ 之间，使得 $a_i=1$，此时 $d_i=A_i-B_i=2-B_i\leqslant 2-2=0$

综上，$\{a_n\}$ 中没有超过 2 的项，

所以 $\{a_n\}$ 中的项只能是1或 2 .

下面证明1有无数个，用反证法证明如下：

若 a_k 为最后一个1，则 $d_k=A_k-B_k=2-2=0$，矛盾.

因此1有无数个.

思路 2： 因为 $a_1=2$，$d_1=1$，所以 $A_1=a_1=2$，$B_1=A_1-d_1=1$.

故对任意 $n\geqslant 1$，$a_n\geqslant B_1=1$.

假设 $\{a_n\}$（$n\geqslant 2$）中存在大于 2 的项.

设 m 为满足 $a_m>2$ 的最小正整数，

则 $m\geqslant 2$，并且对任意 $1\leqslant k<m$，$a_k\leqslant 2$.

又因为 $a_1=2$，所以 $A_{m-1}=2$，且 $A_m=a_m>2$.

于是，$B_m=A_m-d_m>2-1=1$，$B_{m-1}=\min\{a_m,B_m\}\geqslant 2$.

故 $d_{m-1}=A_{m-1}-B_{m-1}\leqslant 2-2=0$，与 $d_{m-1}=1$ 矛盾.

所以对于任意 $n\geqslant 1$，有 $a_n\leqslant 2$，即非负整数列 $\{a_n\}$ 的各项只能为 1 或 2.

因为对任意 $n\geqslant 1$，$a_n\leqslant 2=a_1$，

所以 $A_n=2$.

故 $B_n=A_n-d_n=2-1=1$.

因此对于任意正整数 n，存在 m 满足 $m>n$，且 $a_m=1$，即数列 $\{a_n\}$ 有无穷多项为 1.

…………..14 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。