# 2021 北京海淀高三一模

# 数　　学

2021.04

本试卷共 6 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

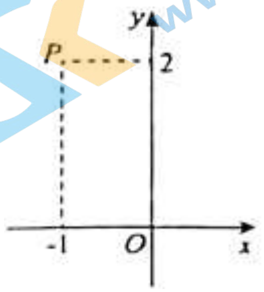
**第一部分（选择题共 40 分）**

**一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

（1）已知集合 $A=\{1\}$，$B=\{x\mid x\geq a\}$。若 $A\cup B=B$，则实数 $a$ 的取值范围是

（A）$(-\infty、1)$　　（B）$(-\infty，1]$　　（C）$(1，+\infty)$　　（D）$[1，+\infty)$

（2）如图，在复平面内，复数 $z$ 对应的点为 $P$.则复数 $\frac{z}{i}$ 的虚部为




（A）1　　（B）$-1$

（C）2　　（D）$-2$

（3）已知$\{a_n\}$为等差数列，$S_n$为其前 $n$ 项和.若 $a_5=S_5=5$，则 $a_1=$

（A）$-5$　　（B）$-4$　　（C）$-3$　　（D）$-2$

（4）在 $(x-\frac{a}{x})^6$ 的展开式中，$x^4$ 的系数为 12，则 $a$ 的值为

（A）2　　（B）$-2$　　（C）1　　（D）$-1$

（5）函数① $f(x)=\sin x+\cos x$，② $f(x)=\sin x\cos x$，③ $f(x)=\cos^2(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$ 中，周期是 $\pi$ 且为奇函数的所有函数的序号是

（A）①②　　（B）②　　（C）③　　（D）②③

（6）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且当 $x>1$ 时，$f(x)=log_2x$，则 $f(8)-f(-2)=$

（A）$-2$　　（B）$-1$　　（C）1　　（D）3

（7）已知 $a$，$b$ 是单位向量，$c=a+2b$，若 $a\perp c$，则$|c|=$

（A）3　　　　（B）$\sqrt{7}$　　　　（C）$\sqrt{3}$　　　　（D）$\sqrt{2}$

（8）已知点 $A(x_1,x_1^2)$，$B(x_2,x_2^2)$，$C(0,\frac{1}{4})$，则“$\triangle ABC$ 是等边三角形”是“直线 $AB$ 的斜率为 0”的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

（9）设无穷等比数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$若$-a_1<a_2<a_1$，则

（A）$\{S_n\}$为递减数列　　　　（B）$\{S_n\}$为递增数列

（C）数列$\{S_n\}$有最大项　　　　（D）数列$\{S_n\}$有最小项

（10）我国魏晋时期的数学家刘徽创造了一个称为“牟合方盖”的立体图形来推算球的体积，如图 1，在一个棱长为 $2a$ 的立方体内作两个互相垂直的内切圆柱，其相交的部分就是牟合方盖，如图 2，设平行于水平面且与水平面距离为 $h$ 的平面为 $a$，记平面 $a$ 截牟合方盖所得截面的面积为 $s$，则函数 $S=f(h)$ 的图象是

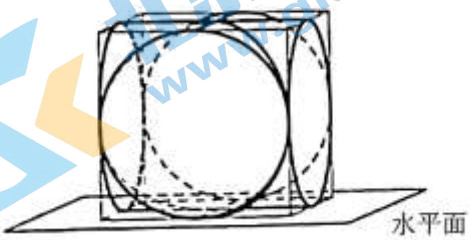



图1

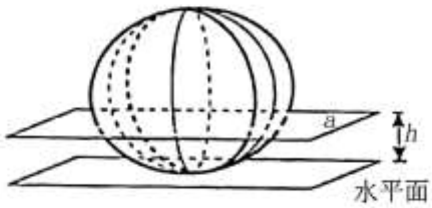
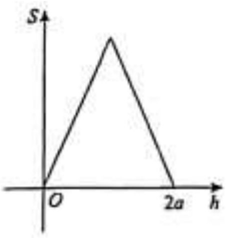
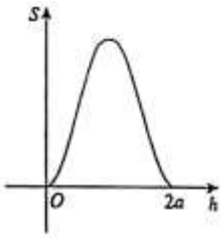


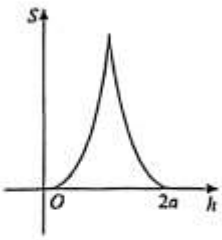

图2



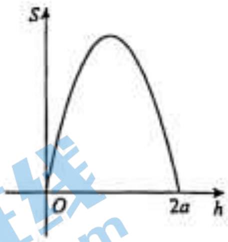

(A)




(B)




(C)




(D)

**第二部分（非选择题共 110 分）**

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

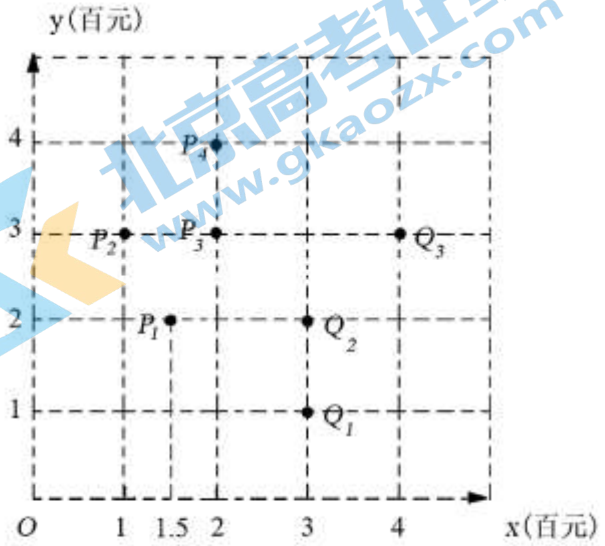
（11）已知函数 $f(x)=x^3+at$ 若曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$）处的切线的斜率为 2.则实数 $a$ 的值是__________。

（12）已知双曲线的两条渐近线互相垂直，则该双曲线的离心率为__________。

（13）已知点 $O$（0，0），$A$（1，2），$B$（$m$，0）（$m>0$），则 $\cos<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}>=$____________,若 $B$ 是以 $OA$ 为边的矩形的项点，则 $m=$____________。

（14）若实数 $\alpha$，$\beta$ 满足方程组 $\begin{cases}1+2\cos\alpha=2\cos\beta\\ \sqrt{3}+2\sin\alpha=2\sin\beta\end{cases}$，则 $\beta$ 的一个值是________。

（15）对平面直角坐标系 $xOy$ 中的两组点，如果存在一条直线 $ax+by+c=0$ 使这两组点分别位于该直线的两侧，则称该直线为“分类直线”，对于一条分类直线 $l$，记所有的点词 $l$ 的距离的最小值为 $d$，约定：$d_1$ 越大，分类直线 $l$ 的分类效果越好，某学校高三（2）出的 7 位同学在 2020 年期间网购文具的费用 $x$（单位：百元）和网购图书的费用 $y$（单位：百元）的情况如图所示，现将 $P_1$，$P_2$，$P_3$ 和 $P_4$ 归为第 I 组点，樽 $Q_1$，$Q_2$，和 $Q_3$ 归为第 II 组点，在上述约定下，可得这两组点的分类效果最好的分类直线，记为 $L$ 给出下列四个结论：




①直线 $x=2.5$ 比直线 $3x-y-5=0$ 的分类效果好；

②分类直线 $L$ 的斜率为 2；

③该班另一位同学小明的网购文具与网购图书的费用均为 300 元，则小明的这两项网购花销的费用所对应的点与第 II 组点位于 $L$ 的同侧；

④如果从第 I 组点中去掉点 $P_1$，第 II 组点保持不变，则分类效果最好的分类直线不是 $L$。

其中所有正确结论的序号是________________。

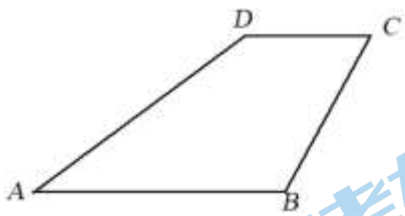
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题共 14 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB=2\sqrt{6}$，$CD=\sqrt{6}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle ADB=\dfrac{1}{3}$。

（I）求 $\cos\angle BDC$；

（II）求 $BC$ 的长.




（17）（本小题共 14 分）

在如图所示的多面体中，$AB//CD$，四边形 $ACFE$ 为矩形，$AB=AE=1$，$AD=CD=2$.

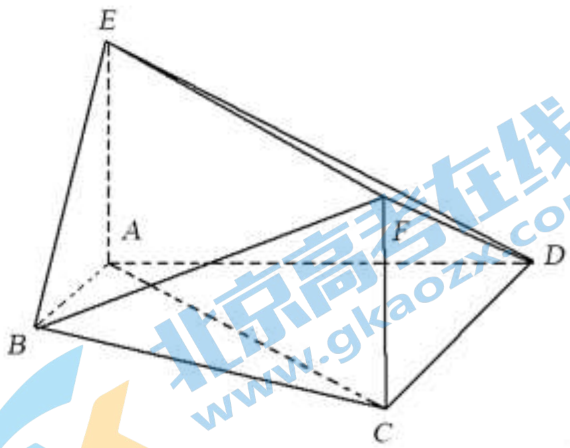
（I）求证：平面 $ABE//$平面 $CDF$；

（II）设平面 $BEF\cap$平面 $CDF=l$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择若干个作为已知，使二面角 $B-l-C$ 的大小确定，并求此二面角的余弦值.

条件①：$AB\perp AD$；

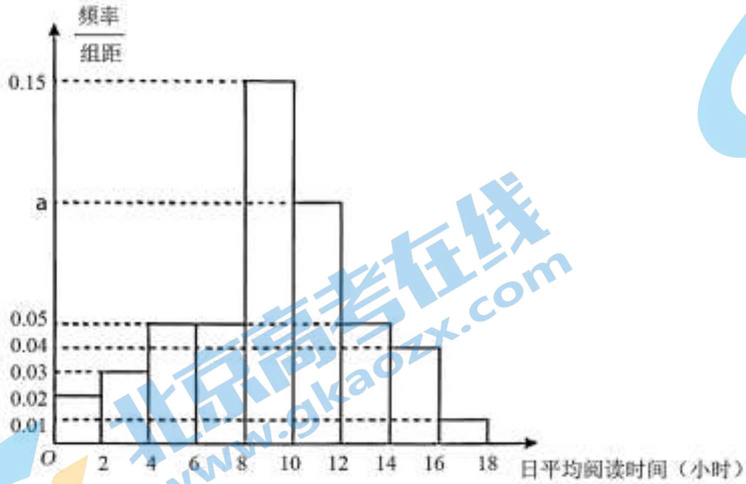
条件②：$AE\perp$平面 $ABCD$；

条件③：平面 $AED\perp$平面 $ABCD$.



（18）（本小题共 14 分）

每年的 4 月 23 日是联合国教科文组织确定的"世界读书日"，又称"世界图书和版权日"，为了解某地区高一学生阅读时间的分配情况，从该地区随机抽取了 500 名高一学生进行在线调查，得到了这 500 名学生的日平均阅读时间（单位：小时），并将样本数据分成[0，2]，（2，4]，（4，6]，（6，8]，（8，10]，（10，12]，（12，14]，（14，16]，（16，18]九组，绘制成如图所示的频率分布直方图.




（I）求 $a$ 的值；

（II）为进一步了解这 500 名学生数字媒体阅读时间和纸质图书阅读时间的分配情况，从日平均阅读时间在（12，14]，（14，16]，（16，18]三组内的学生中，采用分层抽样的方法抽取了 10 人、现从这 10 人中随机抽取 3 人，记日平均阅读时间在（14，16]内的学生人数为 $X$，求 $X$ 的分布列；

（III）以调查结果的频率估计概率，从该地区所有高一学生中随机抽取 20 名学生，用"$P_{20}(k)$"表示这 20 名学生中恰有 $k$ 名学生日平均阅读时间在（10，12]（单位：小时）内的概率，其中 $k=0，1，2，…，20$.当 $P_{20}(k)$ 最大时，写出 $k$ 的值.（只需写出结论）

（19）（本小题共 15 分）

已知函数 $f(x)=x\sin x$.

（I）判断函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性，并说明理由；

（II）求证：函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 内有且只有一个极值点；

（III）求函数 $g(x)=\dfrac{f(x)+1}{\ln x}$ 在区间 $(1,\ \pi]$ 上的最小值.

（20）（本小题共 14 分）

已知椭圆 $M$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）过 $A$（$-2$，0），$B$（0，1）两点.

（I）求椭圆 $M$ 的离心率；

（II）设椭圆 $M$ 的右顶点为 $C$，点 $P$ 在椭圆 $M$ 上（$P$ 不与椭圆 $M$ 的顶点重合），直线 $AB$ 与直线 $CP$ 交于点 $Q$，直线 $BP$ 交 $x$ 轴于点 $S$，求证：直线 $SQ$ 过定点.

（21）（本小题共 14 分）

已知无穷数列$\{a_n\}$，对于 $m\in N^*$，若$\{a_n\}$同时满足以下三个条件，则称数列$\{a_n\}$具有性质 $P(m)$.

条件①：$a_n>0$（$n=1$，2，…）；

条件②：存在常数 $T>0$，使得 $a_n\le T$（$n=1$，2，…）；

条件③：$a_n+a_{n+1}=ma_{n+2}$（$n=1$，2，…）.

（I）若 $a_n=5+4x(-\frac{1}{2})^n$（$n=1$，2，…），且数列$\{a_n\}$具有性质 $P$（$m$），直接写出 $m$ 的值和一个 $T$ 的值；

（II）是否存在具有性质 $P$（1）的数列$\{a_n\}$?若存在，求数列$\{a_n\}$的通项公式；若不存在，说明理由；

（III）设数列$\{a_n\}$具有性质 $P$（$m$），且各项均为正整数，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

# 2021 北京海淀高三一模数学

## 参考答案

**一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。**

| 题号 | （1） | （2） | （3） | （4） | （5） | （6） | （7） | （8） | （9） | （10） |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | A | C | B | D | C | C | A | D | D |

**二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。**

| 题号 | （11） | （12） | （13） | （14） | （15） |
|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | $-1$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{\sqrt{5}}{5}$　5 | 0.答案不唯一.<br>满足<br>$2k\pi+\frac{2}{3}\pi,k\in\mathbf{Z}$<br>或 $2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 即可 | ②③④ |

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

（16）（本小题共 14 分）

解：（I）在 $\triangle ABD$ 中，因为 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$， $\cos\angle ADB=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$， $\sin\angle ADB=\sqrt{1-\cos^2\angle ADB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $\cos\angle ABD=\cos(\pi-\angle A-\angle ADB)$

$=-\cos(\angle A+\angle ADB)$

$=-(\cos A\cos\angle ADB-\sin A\sin\angle ADB)$

$=-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

因为 $AB//CD$，

所以 $\angle BDC=\angle ABD$.

所以 $\cos\angle BDC=\cos\angle ABD=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

（II）在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin A}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$.

因为 $AB=2\sqrt{6}$，

所以 $BD=\dfrac{AB\cdot\sin A}{\sin\angle ADB}=\dfrac{2\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=3$.

因为 $CD=\sqrt{6}$，

在 $\triangle CBD$ 中，由余弦定理得 $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC$

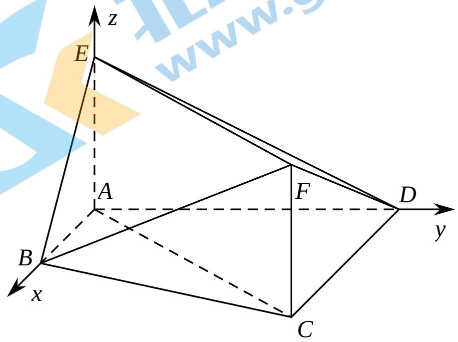
$=9+6-2\times3\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{9}$

$=11$.

所以 $BC=\sqrt{11}$.

（17）（本小题共 14 分）

解：（I）因为四边形 $ACFE$ 为矩形，




所以 $CF\,//\,AE$.

又因为 $AB\,//\,CD$， $AB\cap AE=A$， $AB\subset$ 平面 $ABE$， $AE\subset$ 平面 $ABE$， $CD\subset$ 平面 $CDF$， $CF\subset$ 平面 $CDF$，

所以平面 $ABE\,//$ 平面 $CDF$.

（II）选择①②，或①②③

因为 $AE\perp$ 平面 $ABCD$， $AB\subset$ 平面 $ABCD$， $AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AE\perp AB$， $AE\perp AD$.

又因为 $AB\perp AD$，

所以分别以 $AB$， $AD$， $AE$ 所在的直线为 $x$ 轴， $y$ 轴， $z$ 轴建立如图所示的空间直角坐标系，由题意得 $B(1,0,0)$， $E(0,0,1)$， $F(2,2,1)$.

所以 $\overrightarrow{BE}=(-1,0,1)$， $\overrightarrow{BF}=(1,2,1)$.

设平面 $BEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+z=0,\\ x+2y+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-1$， $z=1$.

于是 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

由（I）可得： $AD\perp$平面$CDF$.

取平面$CDF$ 的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,1,0)$.

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-1}{1\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以二面角 $B-l-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

选择①③

因为平面$AED\perp$平面$ABCD$，平面$AED\cap$平面$ABCD=AD$，

$AB\perp AD$， $AB\subset$平面$ABCD$，

所以 $AB\perp$平面$AED$.

又因为 $AE\subset$平面$AED$，

所以 $AB\perp AE$.

在矩形 $ACFE$ 中， $AE\perp AC$.

因为 $AB\subset$平面$ABCD$， $AC\subset$平面$ABCD$， $AB\cap AC=A$，

所以 $AE\perp$平面$ABCD$.

又因为 $AD\subset$平面$ABCD$，

所以 $AE\perp AD$.

分别以 $AB$， $AD$， $AE$ 所在的直线为 $x$ 轴， $y$ 轴， $z$ 轴建立如图所示的空间直角坐标系，由题意得 $B(1,0,0)$， $E(0,0,1)$， $F(2,2,1)$.

所以 $\overrightarrow{BE}=(-1,0,1)$， $\overrightarrow{BF}=(1,2,1)$.

设平面 $BEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+z=0,\\ x+2y+z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-1$， $z=1$.

于是 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$.

由（I）可得： $AD\perp$平面$CDF$.

取平面$CDF$ 的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,1,0)$.

所以 $\cos < \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} > = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|} = \frac{-1}{1 \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以二面角 $B-l-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（18）（本小题共 14 分）

解：（I）由频率分布直方图可得：

$2(0.02+0.03+0.05+0.05+0.15+a+0.05+0.04+0.01)=1$

解得 $a=0.10$.

（II）由频率分布直方图可知，这 500 名学生中日平均阅读时间在 $(12,14]$，$(14,16]$，$(16,18]$ 三组内的学生人数分别为 $500\times0.10=50$ 人，$500\times0.08=40$ 人，$500\times0.02=10$ 人.

若采用分层抽样的方法抽取了 10 人，则从日平均阅读时间在 $(14,16]$ 内的学生中抽取了 $\frac{40}{50+40+10}\times10=4$ 人.

现从这 10 人中随机抽取 3 人，则 $X$ 的可能取值为 $0,1,2,3$.

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$,

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$,

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$,

$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$.

所以 $X$ 的分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ |

（III）$k=4$.

（19）（本小题共 15 分）

解：（I）由题意知，$f'(x)=\sin x+x\cos x$.

因为 $x\in(0,\ \frac{\pi}{2})$,

所以 $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ \frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

（II）设 $h(x)=f'(x)$，则 $h'(x)=2\cos x-x\sin x$.

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$ 时，$h'(x)<0$.

所以 $h(x)=f'(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\ \pi)$ 内单调递减.

又因为 $f'(\frac{\pi}{2})=1>0$，$f'(\pi)=-\pi<0$，

所以存在唯一 $x_0\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$，使得 $f'(x_0)=0$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上的情况如下：

| $x$ | $(\frac{\pi}{2},\ x_0)$ | $x_0$ | $(x_0,\ \pi)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ |

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\ \pi)$ 内有且只有一个极值点.

（III）由（I）（II）可知，$f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 内单调递增，在 $(x_0,\ \pi)$ 内单调递减.

又因为 $f(1)=\sin 1>0$，$f(\pi)=0$，

所以当 $x\in(1,\pi]$ 时，$f(x)+1\geq 1$.

又因为当 $x\in(1,\pi]$ 时，$0<\ln x\leq\ln\pi$，

所以 $g(x)=\dfrac{f(x)+1}{\ln x}\geq\dfrac{1}{\ln\pi}$，当且仅当 $x=\pi$ 时等号成立.

所以 $g(x)$ 在 $(1,\pi]$ 上的最小值为 $\dfrac{1}{\ln\pi}$.

（20）（本小题共 14 分）

解：（I）因为点 $A(-2,0)$，$B(0,1)$ 都在椭圆 $M$ 上，

所以 $a=2$，$b=1$.

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$.

所以椭圆 $M$ 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（II）方法一：

由（I）知椭圆 $M$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，$C(2,0)$.

由题意知：直线 $AB$ 的方程为 $x=2y-2$.

设 $P(x_0,y_0)$（$y_0\neq 0$，$y_0\neq \pm 1$），$Q(2y_Q-2,y_Q)$，$S(x_S,0)$.

因为 $C,P,Q$ 三点共线，所以有 $\overrightarrow{CP}\parallel\overrightarrow{CQ}$.

所以 $(x_0-2)y_Q=y_0(2y_Q-4)$.

所以 $y_Q=\frac{4y_0}{2y_0-x_0+2}$.

所以 $Q(\frac{4y_0+2x_0-4}{2y_0-x_0+2},\frac{4y_0}{2y_0-x_0+2})$.

因为 $B,S,P$ 三点共线，

所以 $\frac{1}{-x_s}=\frac{y_0-1}{x_0}$，即 $x_s=\frac{x_0}{1-y_0}$.

所以 $S(\frac{x_0}{1-y_0},0)$.

所以直线 $QS$ 的方程为 $x=\frac{\frac{4y_0+2x_0-4}{2y_0-x_0+2}-\frac{x_0}{1-y_0}}{\frac{4y_0}{2y_0-x_0+2}}y+\frac{x_0}{1-y_0}$，

即 $x=\frac{x_0{}^2-4y_0{}^2-4x_0y_0+8y_0-4}{4y_0(1-y_0)}y+\frac{x_0}{1-y_0}$.

又因为点 $P$ 在椭圆 $M$ 上，所以 $x_0{}^2=4-4y_0{}^2$.

所以直线 $QS$ 的方程为 $x=\frac{2-2y_0-x_0}{1-y_0}(y-1)+2$.

所以直线 $QS$ 过定点 $(2,1)$.

方法二：

直线 $QS$ 过定点 $T(2,1)$，理由如下：

设直线 $BP$ 为 $y=k_1x+1$（$k_1\neq 0$ 且 $k_1\neq\pm\frac{1}{2}$），直线 $CP$ 为 $y=k_2(x-2)$（$k_2\neq 0$ 且 $k_2\neq\pm\frac{1}{2}$）.

所以直线 $BP$ 与 $x$ 轴的交点 $S(-\frac{1}{k_1},0)$.

因为直线 $AB$ 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$，

所以直线 $CP$ 与直线 $AB$ 的交点 $Q(\frac{4k_2+2}{2k_2-1},\frac{4k_2}{2k_2-1})$.

所以直线 $TS$ 的斜率 $k_{TS}=\frac{k_1}{2k_1+1}$，直线 $TQ$ 的斜率 $k_{TQ}=\frac{1}{2}k_2+\frac{1}{4}$.

所以 $k_{TS}-k_{TQ}=\frac{k_1}{2k_1+1}-(\frac{1}{2}k_2+\frac{1}{4})=-\frac{k_1k_2+\frac{1}{2}(k_2-k_1)+\frac{1}{4}}{2k_1+1}$.

将 $y=k_1x+1$ 代入方程 $x^2+4y^2=4$ 得 $\left(4k_1^2+1\right)x^2+8k_1x=0$.

所以点 $P$ 的横坐标为 $x_P=-\frac{8k_1}{4k_1^2+1}$，则 $y_P=-\frac{4k_1^2-1}{4k_1^2+1}$.

将点 $P$ 的坐标代入直线 $CP$ 的方程 $y=k_2(x-2)$，整理得

$1+2k_2-4k_1^2+8k_1k_2+8k_1^2k_2=0$.

所以 $(1+2k_1)(1-2k_1+2k_2+4k_1k_2)=0$.

因为 $1+2k_1\neq0$，所以 $1-2k_1+2k_2+4k_1k_2=0$.

所以 $k_{TQ}-k_{TS}=0$.

所以直线 $QS$ 过定点 $T\ (2,1)$.

（21）（本小题共 14 分）

解：（I）$m=2$；

答案不唯一.如 $T=6$.

（II）不存在具有性质 $P(1)$ 的数列 $\{a_n\}$，理由如下：

假设存在具有性质 $P(1)$ 的数列，设为 $\{a_n\}$，则 $m=1$.

所以 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，$n=1,2,\cdots$.

因为 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），

所以 $a_{n+2}>a_{n+1}$，即 $a_2<a_3<a_4<\cdots$.

所以 $a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}\geq a_{n+2}+a_2$，即 $a_4-a_3\geq a_2$，$a_5-a_4\geq a_2$，$\cdots$，$a_{n+3}-a_{n+2}\geq a_2$.

累加得，$a_{n+3}-a_3\geq na_2$.

对于常数 $T>0$，当 $n>\frac{T-a_3}{a_2}$ 时，$a_{n+3}\geq na_2+a_3>T$，与②矛盾.

所以不存在具有性质 $P(1)$ 的数列 $\{a_n\}$.

（III）因为数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $P(m)$，由（II）知 $m\neq1$.

① 当 $m=2$ 时，$a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$，即 $a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$，$n=1,2,\cdots$.

所以 $|a_{n+2}-a_{n+1}|=\frac{1}{2^n}|a_2-a_1|$.

若 $a_1=a_2=c$（$c$ 为常数，且 $c\in\mathbf{N}^*$），则 $a_n=c$，$n=1,2,\cdots$.

经检验，数列 $\{c\}$（$c\in\mathbf{N}^*$）具有性质 $P(2)$.

若 $a_1\neq a_2$，当 $n>\log_2|a_2-a_1|$ 时，$|a_{n+2}-a_{n+1}|=\frac{1}{2^n}|a_2-a_1|\in(0,1)$，

与 $a_n\in\mathbf{N}^*$ 矛盾.

② 当 $m\geq 3$ 时，令 $b_n=\max\{a_n,a_{n+1}\}\in\mathbf{N}^*$，则

$a_{n+2}=\frac{1}{m}(a_{n+1}+a_n)\leq\frac{1}{3}(a_{n+1}+a_n)\leq\frac{1}{3}(b_n+b_n)<b_n$，$n=1,2,\cdots$.

所以 $a_{n+3}=\frac{1}{m}(a_{n+2}+a_{n+1})\leq\frac{1}{3}(a_{n+2}+a_{n+1})<\frac{1}{3}(b_n+b_n)<b_n$.

所以 $b_{n+2}=\max\{a_{n+2},a_{n+3}\}<b_n$.

所以 $b_{n+2}\leq b_n-1$，$n=1,2,\cdots$.

所以 $b_3-b_1\leq -1$，$b_5-b_3\leq -1$，$\cdots$，$b_{2n+1}-b_{2n-1}\leq -1$.

所以 $b_{2n+1}-b_1\leq -n$.

当 $n\geq b_1$ 时，$b_{2n+1}\leq b_1-n\leq 0$，与 $b_{2n+1}\in\mathbf{N}^*$ 矛盾.

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=c$（$c$ 为常数，且 $c\in\mathbf{N}^*$）.

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。