2018 北京十一学校高三年级零模考试

数　　学（文）

2018.03

本试卷共 9 页，150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

第一部分　　（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 若集合 $A=\{0,m^2\},B=\{1,2\}$ 则“ $m=1$ ”是“ $A\cup B=\{0,1,2\}$ ”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1=2,a_2+a_3=13$，那么则 $a_4+a_5+a_6$ 等于

（A）40　　（B）42　　（C）43　　（D）45

3. 设 $a=0.6^{4.2},b=7^{0.6},c=\log_{0.6}7$，则 a,b,c 的大小关系是

（A）$c<b<a$　　（B）$c<a<b$　　（C）$b<c<a$　　（D）$a<b<c$

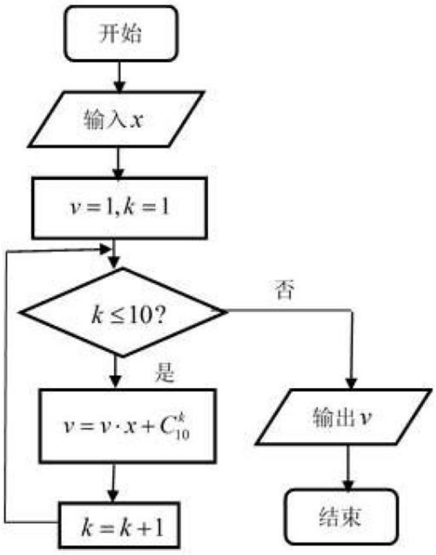
4. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=3$，且 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为

（A）$\frac{\pi}{6}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{2\pi}{3}$　　（D）$\frac{5\pi}{6}$

5. 已知函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x-x^{\frac{1}{3}}$，那么在下列区间中含有函数 $f(x)$ 零点的是

（A）$(0,\frac{1}{3})$　　（B）$(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$　　（C）$(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$

（D）$(\frac{2}{3},1)$



6. 秦九韶是我国南宋时期的数学家，普州（现四川省安岳县）人，他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法，至今仍是比较先进的算法，如图所示的程序框图，给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例，若输入 x 的值为 2，则输出 v 的值为

（A）$2^{10}-1$

（B） 2^{10}

（C） $3^{10}-1$

（D） 3^{10}

7. 右上图是民航部门统计的 2017 年春运期间十二个城市售出的往返机票的平均价格以及相比去年同期变化幅度的数据统计图表，根据图表，下面叙述不正确的是

（A）深圳的变化幅度最小，北京的平均价格最高

（B）深圳和厦门的春运期间往返机票价格同去年相比有所下降

（C）平均价格从高到低居于前三位的城市为北京、深圳、广州

（D）平均价格变化量从高到低居于前三位的城市为天津、西安、厦门

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$. 下列命题：①函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称；②函数 $f(x)$ 是周期函数；③当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 取最大值；④函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象没有公共点. 其中正确命题的序号是

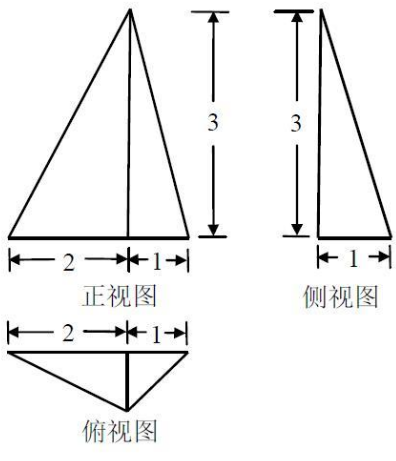
（A）①③　　（B）②③　　（C）①④　　（D）②④

第二部分　（非选择题　共 110 分）

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a}+y^2=1$ 的一条渐近线方程为 $x+\sqrt{3}y=0$，则该双曲线方程为______

10. 直角坐标系中，圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心到 $x+y=2$ 上的动点的距离的最小值为______



11. 已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为______

12. 已知 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{7}$，那么 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为______

13. 若实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases} y+x\le 3 \\ 2y-x\ge 0 \\ x\ge 1 \end{cases}$，则 $z=x^2+y^2$ 的最小值为______；$t=\dfrac{(y+x)(y-x)}{xy}$ 的最大值为______

14. 设函数 $f(x)=x-\frac{a}{x}$, ①若 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上不单调, 实数 a 的取值范围是 ______ ;

②若 $a=1$, 且 $f(mx)+mf(x)<0$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ______ .

三、解答题(共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15. （本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c , 且满足 $\frac{2c-b}{a}=\frac{\cos B}{\cos A}$.

（Ⅰ）求角 A 的大小;

（Ⅱ）若 $a=2\sqrt{5}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

16. （本小题满分 12 分）

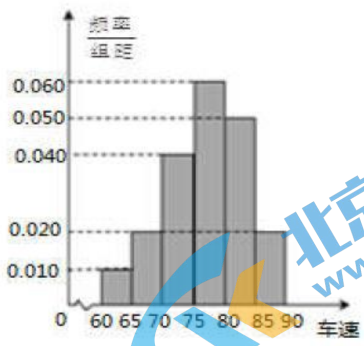
已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项的和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1=b_1=2, a_4+b_4=21, S_4+b_4=30$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

（Ⅱ）记 $c_n=a_nb_n, n\in\mathbf{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

17. （本小题满分 13 分）

春节期间, 由于高速公路继续实行小型车免费, 因此高速公路上车辆较多, 某调查公司在某城市从七座以下小型汽车中按进入服务区的先后每间隔 50 辆就抽取一辆的抽样方法抽取 40 名驾驶员进行询问调查, 将他们在某段高速公路的车速（km/h）分成六段: [60, 65), [65, 70), [70, 75), [75, 80), [80, 85), [85, 90] 后得到如图的频率分布直方图.



（Ⅰ）此调查公司在采样中, 用到的是什么抽样方法?

（Ⅱ）求这 40 辆小型车辆车速的众数、中位数以及平均数的估计值;

（Ⅲ）若从车速在 [60, 70) 的车辆中任抽取 2 辆, 求至少有一辆车的车速在 [65, 70) 的概率.

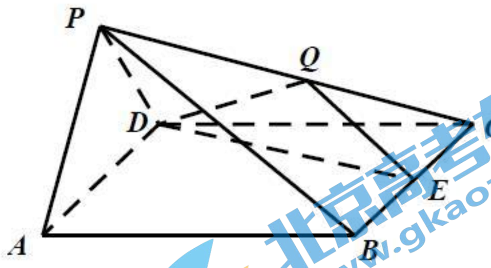
18. （本小题满分 14 分）

四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，$\angle BCD=60^\circ$，$PA=PD=\sqrt{2}$，E 是 BC 中点，点 Q 在侧棱 PC 上.

（Ⅰ）求证：$AD\perp PB$；

（Ⅱ）是否存在 Q，使平面 $DEQ\perp$ 平面 PEQ？若存在，求出，若不存在，说明理由.

（Ⅲ）是否存在 Q，使 $PA//$ 平面 DEQ？若存在，求出. 若不存在，说明理由.

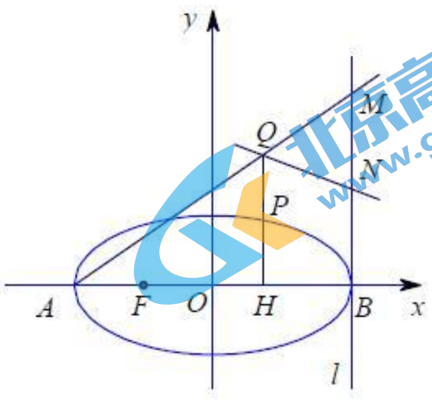


19. （本小题满分 13 分）

如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的长轴为 AB，过点 B 的直线 l 与 x 轴垂直，椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，F 为椭圆的左焦点，且 $|AF|\cdot|BF|=1$.

（Ⅰ）求此椭圆的方程；

（Ⅱ）设 P 是此椭圆上异于 A,B 的任意一点，$PH\perp x$ 轴，H 为垂足，延长 HP 到点 Q 使得 $|HP|=|PQ|$. 连接 AQ 并延长交直线 l 于点 M，N 为 MB 的中点，判定直线 QN 与以 AB 为直径的圆 O 的位置关系.



20. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax$（a 为常数）的图象与 y 轴交于点 A，曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线斜率为 -1.

（Ⅰ）求 a 的值及函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）证明：当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$；

（Ⅲ）证明：对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x^2<ce^x$.

数学试题答案

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	B	C	B	D	D	C

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. $y^2-\frac{x^2}{3}=1$

10. $\sqrt{2}$

11. $\frac{3}{2}$

12. $\pm\frac{1}{5}$

13. $\frac{5}{4}$，$\frac{3}{2}$

14. $(-\infty,-1]$， $(-\infty,-1]$

三、解答题:

15. （本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）$\because \frac{2c-b}{a}=\frac{\cos B}{\cos A}$,

$\therefore (2c-b)\cos A=a\cos B$

由正弦定理, 得 $(2\sin C-\sin B)\cos A=\sin A\cos B$

整理得 $2\sin C\cos A-\sin B\cos A=\sin A\cos B$

所以 $2\sin C\cos A=\sin(A+B)=\sin C$

在 $\triangle ABC$ 中, $\sin C\neq 0$

所以 $\cos A=\frac{1}{2},\angle A=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）由余弦定理 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2},a=2\sqrt{5}$.

所以 $b^2+c^2-20=bc\geq 2bc-20$

所以 $bc\leq 20$, 当且仅当 $b=c$ 时取等

所以 $S=\frac{1}{2}bc\sin A\leq 5\sqrt{3}$

即三角形面积的最大值为$5\sqrt{3}$.

16. （本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q.

由$a_1=b_1=2$，得$a_4=2+3d$，$b_4=2\cdot q^3$，$S_4=8+6d$．⋯(3 分)

由条件$a_4+b_4=21, S_4+b_4=30$

得方程组$\begin{cases}2+3d+2q^3=21\\8+6d+2q^3=30\end{cases}$得$\begin{cases}d=1\\q=2\end{cases}$

所以$a_n=n+1, b_n=2^2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅱ）由题意知，$c_n=(n+1)\times 2^n$.

记$T_n=c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n$.

则$T_n=c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n$.

$=2\times2+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+n\times 2^{n-1}+(n+1)\times 2^n$，

$2T_n=2\times2^2+3\times2^3+\ldots+(n-1)\times2^{n-1}+n\times2^n+(n+1)2^{n+1}$，

所以$-T_n=2\times2+\left(2^2+2^3+\ldots+2^n\right)-(n+1)\times2^{n+1}$，

即$T_n=n\cdot2^{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

17. （本小题满分 14 分）

（Ⅰ）由题意知这个抽样是按进服务区的先后每间隔 50 辆就抽取一辆的抽样方法抽取 40 名驾驶员进行询问调查，是一个具有相同间隔的抽样，并且总体的个数比较多，这是一个系统抽样。

故调查公司在采样中，用到的是系统抽样，(2 分)

（Ⅱ）众数的估计值为最高的矩形的中点，即众数的估计值等于 77.5(4 分)

设图中虚线所对应的车速为 x，则中位数的估计值为：

$0.01\times5+0.02\times5+0.04\times5+0.06\times(x-75)=0.5$,

解得 $x=77.5$,即中位数的估计值为 77.5(6 分)

(III)从图中可知,车速在[60,65)的车辆数为: $m_1=0.01\times5\times40=2$(辆),(7 分)

车速在[65,70)的车辆数为: $m_2=0.02\times5\times40=4$(辆)(8 分)

设车速在[60,65)的车辆设为 a,b,车速在[65,70)的车辆设为 c,d,e,f,

则所有基本事件有:

(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f),(d,e),(d,f),(e,f)共 15 种(10 分)

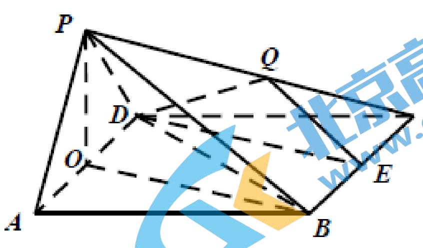
其中车速在[65,70)的车辆至少有一辆的事件有:

(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f),(d,e),(d,f),(e,f)共 14 种(12 分)

所以,车速在[65,70)的车辆至少有一辆的概率为 $P=\dfrac{14}{15}$.(13 分)

18. (本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)取 AD 中点 O,连接 OP,OB,BD.



因为 $PA=PD$,所以 $PO\perp AD$.

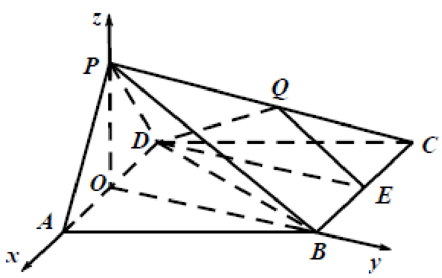
因为菱形 $ABCD$ 中,$\angle BCD=60^\circ$,所以 $AB=BD$.

所以 $BO\perp AD$.

因为 $BO\cap PO=O$,且 $BO,PO\subset$ 平面 POB,所以 $AD\perp$ 平面 POB.

所以 $AD\perp PB$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,$BO\perp AD,PO\perp AD$,



因为侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$,且平面 $PAD\cap$ 底面 $ABCD=AD$,所以 $PO\perp$ 底面 $ABCD$.

以 O 为坐标原点,如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

则 $D(-1,0,0), E(-1,\sqrt{3},0), P(0,0,1), C(-2,\sqrt{3},0)$，因为 Q 为 PC 中点，所以 $Q(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$．

所以 $\overrightarrow{DE}=(0,\sqrt{3},0), \overrightarrow{DQ}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，所以平面 DEQ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$．

因为 $\overrightarrow{DC}=(-1,\sqrt{3},0), \overrightarrow{DQ}=(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，设平面 DQC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$．

令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=1, z=-\sqrt{3}$，即 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$．

所以 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{21}}{7}$．

由图可知，二面角 $E-DQ-C$ 为锐角，所以余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$．

（III）设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PC}(0\le\lambda\le1)$

由（II）可知 $\overrightarrow{PC}=(-2,\sqrt{3},-1), \overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$．

设 $Q(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{PQ}=(x,y,z-1)$，

又因为 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PC}=(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,-\lambda)$，所以 $\begin{cases}x=-2\lambda\\ y=\sqrt{3}\lambda\\ z=-\lambda+1\end{cases}$，即 $Q(-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,-\lambda+1)$．

所以在平面 DEQ 中，$\overrightarrow{DE}=(0,\sqrt{3},0), \overrightarrow{DQ}=(1-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,1-\lambda)$，

所以平面 DEQ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1-\lambda,0,2\lambda-1)$，

又因为 $PA//$ 平面 DEQ，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$，

即 $(1-\lambda)+(-1)(2\lambda-1)=0$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$．

所以当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，$PA//$ 平面 DEQ

19．（本小题满分 14 分）

解：（I）由题意：$A(-a,0), B(a,0), F(-c,0)$，并且 $c=\sqrt{a^2-b^2}$．

又因为$|AF|\cdot|BF|=(a+c)(a-c)=a^2-c^2=b^2=1$，所以$b=1$.

又因为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$a^2=4, a=2$.

所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

（Ⅱ）设$P(x_0,y_0)$，则$Q(x_0,2y_0)(x_0\neq\pm2)$

由$A(-2,0)$得$k_{AQ}=\dfrac{2y_0}{x_0+2}$，所以$AQ: y=\dfrac{2y_0}{x_0+2}(x+2)$.

由$B(-2,0)$得$l: x=2$，

所以$M(2,\dfrac{8y_0}{x_0+2}), N(2,\dfrac{4y_0}{x_0+2})$.

所以$k_{NQ}=\dfrac{\dfrac{4y_0}{x_0+2}-2y_0}{2-x_0}=\dfrac{2x_0y_0}{x_0^{\ 2}-4}$.

又因为P点在椭圆上，满足$x_0^{\ 2}+4y_0^{\ 2}=4$.

所以$k_{NQ}=\dfrac{2x_0y_0}{x_0^{\ 2}-4}=\dfrac{2x_0y_0}{-4y_0^{\ 2}}=-\dfrac{x_0}{2y_0}$.

所以直线$NQ: y-2y=-\dfrac{x_0}{2y_0}(x-x_0)$，化简得$x_0x+2y_0y=x_0^{\ 2}+4y_0^{\ 2}=4$.

所以点O到直线NQ的距离$d=\dfrac{4}{\sqrt{x_0^{\ 2}+4y_0^{\ 2}}}=\dfrac{4}{\sqrt{4}}=2$，与圆$O$半径相等.

所以直线NQ与以AB为直径的圆O相切.

20. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由$f(x)=e^x-ax$得$f'(x)=e^x-a$，

由$f'(0)=1-a=-1$得$a=2$.

所以$f(x)=e^x-2x, f'(x)=e^x-2$.

令$f'(x)=0$得$x=\ln 2$.

当$x<\ln 2$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x>\ln 2$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以当 $x=\ln 2$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(\ln 2)=2-2\ln 2$；$f(x)$ 无极大值.

（Ⅱ）令 $g(x)=e^x-x^2$，则 $g'(x)=e^x-2x$.

由（Ⅰ）可知，$g'(x)=f(x)\geq f(\ln 2)>0$，即 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $g(0)=1>0$，所以当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)>0$，即 $x^2<e^x$.

（Ⅲ）①若 $c\geq 1$，则 $e^x\leq ce^x$.

由（Ⅱ）可知，当 $x>0$ 时，$x^2<e^x$，

所以当 $x>0$ 时，$x^2<ce^x$.

取 $x_0=0$，则当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x^2<ce^x$.

②若 $0<c<1$，令 $k=\dfrac{1}{c}>1$，要使不等式 $x^2<ce^x$ 恒成立，则只需使 $e^x>kx^2$ 恒成立.

要使 $e^x>kx^2$ 恒成立，则只需使 $x>\ln(kx^2)=2\ln x+\ln k$ 恒成立.

令 $h(x)=x-2\ln x-\ln k$，则 $h'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$.

所以当 $x>2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 内单调递增；

取 $x_0=16k>16$，则 $h(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内单调递增.

又 $h(x_0)=16k-2\ln(16k)-\ln k=16k-8\ln 2-3\ln k=8(k-\ln 2)+3(k-\ln k)+5k$

其中，$k>\ln k, k>\ln 2, k>0$，所以 $h(x_0)>0$.

即存在 $x_0=\dfrac{16}{c}$，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x^2<ce^x$.

综上，对任意给定的正数 c，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，恒有 $x^2<ce^x$