四川省大数据精准教学联盟2020级高三第一次统一监测

理科数学

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、班级、准考证号用0.5毫米黑色签字笔填写清楚，考生考试条码由监考老师粘贴在答题卡上的“条码粘贴处”。

2. 选择题使用2B铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用0.5毫米黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数z_1，z_2在复平面对应的点分别是$Z_1(-1,2)$，$Z_2(3,4)$，则$\dfrac{z_1}{z_2}=$

A. $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$　　B. $\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{25}i$

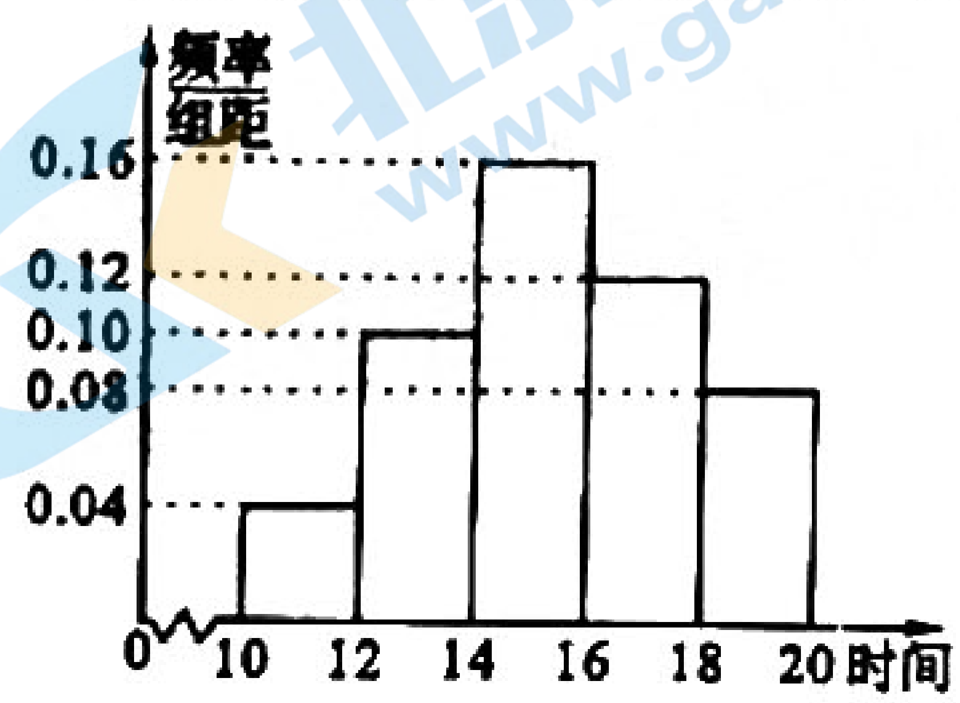
C. $-\dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{5}i$　　D. $-\dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{25}i$

2. 已知集合$A=\left\{x\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\geqslant 1\right.\right\}$，$B=\{x|-2<x<1\}$，则$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

A. $(-2,2)$　　B. $[-1,1]$

C. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

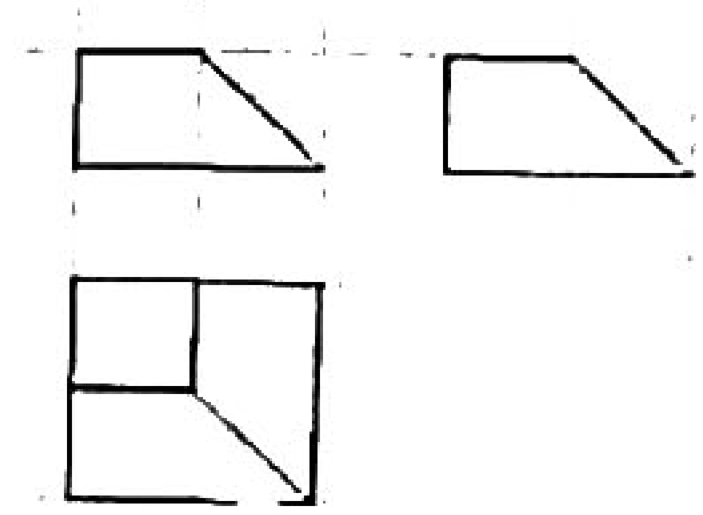
3. 某部门调查了200名学生每周的课外活动时间（单位：h），制成了如图所示的频率分布直方图，其中课外活动时间的范围是[10, 20]，并分成[10, 12)，[12, 14)，[14, 16)，[16, 18)，[18, 20]五组．根据直方图，判断这200名学生中每周的课外活动时间不少于14 h的人数是



A. 56　　B. 80

C. 144　　D. 184

4. 如图，网格纸上绘制的是一个四棱台的三视图，网格小正方形的边长为1，则该多面体的体积为



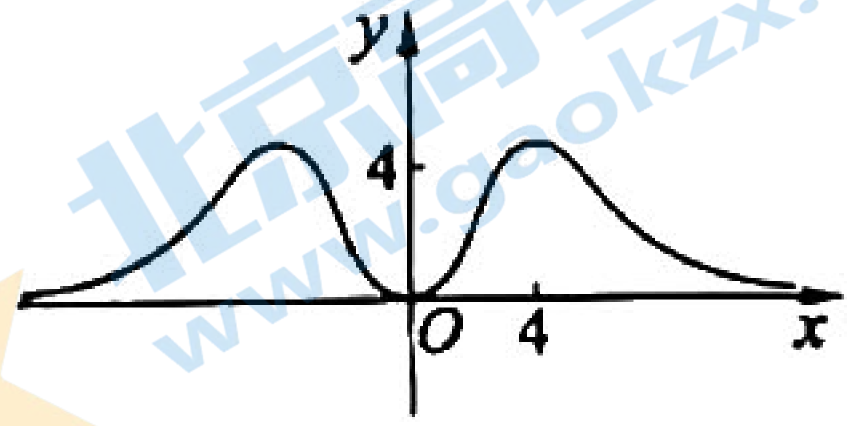
A. $\dfrac{4}{3}$

B. $\dfrac{5}{3}$

C. $\dfrac{7}{3}$

D. 7

5. 已知函数$f(x)$的图象如图所示，则$f(x)$的解析式可以为



A. $f(x)=\dfrac{x^4}{e^x+e^{-x}}$ B. $f(x)=\dfrac{x^3}{e^x+e^{-x}}$

C. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x+e^{-x}}$ D. $f(x)=\dfrac{x^4}{e^x-e^{-x}}$

6. 已知$\sin\alpha=2\cos\alpha$，则$\dfrac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}=$

A. $\dfrac{3}{5}$ B. $\dfrac{2}{5}$ C. $-\dfrac{2}{5}$ D. $-\dfrac{3}{5}$

7. 若点P是曲线$y=\ln x-x^2$上任意一点，则点P到直线$l:x+y-4=0$距离的最小值为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

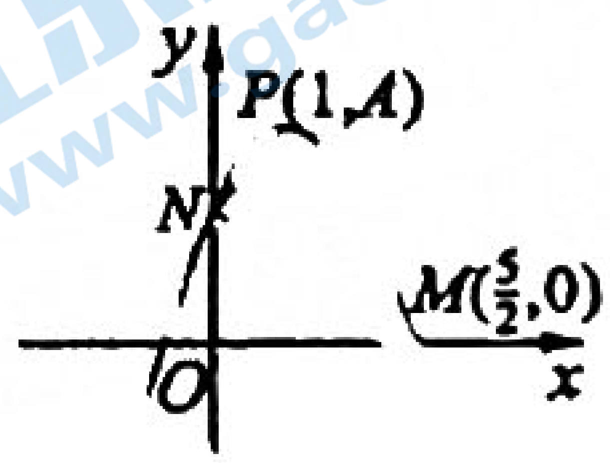
8. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知异面直线A_1C与AD，A_1C与AB所成角的大小分别为60°和45°，则直线B_1D和平面A_1BC所成的角的余弦值为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

9. 抛物线$C:x^2=4y$的焦点为F，直线$x-y+3=0$与C交于A，B两点，则$\triangle ABF$的面积为

A. 4 B. 8 C. 12 D. 16

10. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的图象如图所示，图象与$x$轴的交点为$M(\frac{5}{2},0)$，与$y$轴的交点为$N$，最高点$P(1,A)$，且满足$NM\perp NP$．若将$f(x)$的图象向左平移1个单位得到的图象对应的函数为$g(x)$，则$g(0)=$



A. $-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ B. 0

C. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ D. $\sqrt{10}$

11. 已知球O的半径为2，四棱锥$P-ABCD$的顶点均在球O的球面上，$PA\perp$面$ABCD$，则该四棱锥的体积的最大值为

A. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ B. 4 C. $\dfrac{64\sqrt{3}}{27}$ D. 8

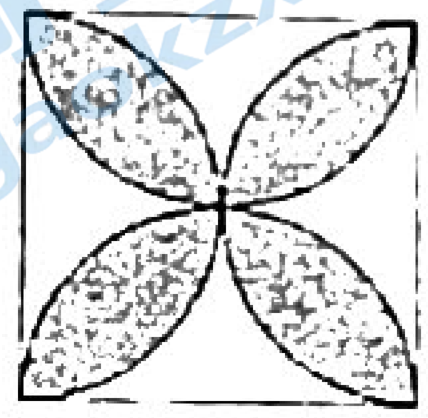
12. 设$a=\dfrac{1}{24}$，$b=\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{1}{30}$，$c=e^{\frac{1}{30}}-1$，则$a,b,c$的大小关系是

A. $b>a>c$ B. $a>b>c$ C. $a>c>b$ D. $c>a>b$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量 $a=(-3,1)$，$b=(1,3)$，$c=b-a$，则 a 与 c 的夹角为________.

14. 四叶草也被称为幸运草、幸福图，其形状被广泛用于窗户、壁纸、地板等装修材料的图案中．如图所示，正方形地板上的四叶草图边界所在的半圆都以正方形的边长为直径．随机抛掷一粒小豆在这块正方形地板上，则小豆落在四叶草图（图中阴影部分）上的概率为______.



15. 已知双曲线 E: $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，过点 $(2,3)$ 作斜率为 $\dfrac{3}{4}$ 的直线 l 与双曲线 E 交于 A，B 两点，则 $\triangle ABF$ 的周长为________.

16. 若 $\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle ABC$ 外接圆面积的 $\dfrac{1}{3}$，则 $2\sin A\cos(B-C)+\sin 2A=$______.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 与正项等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=2$，$b_3=a_7=a_2+a_4$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

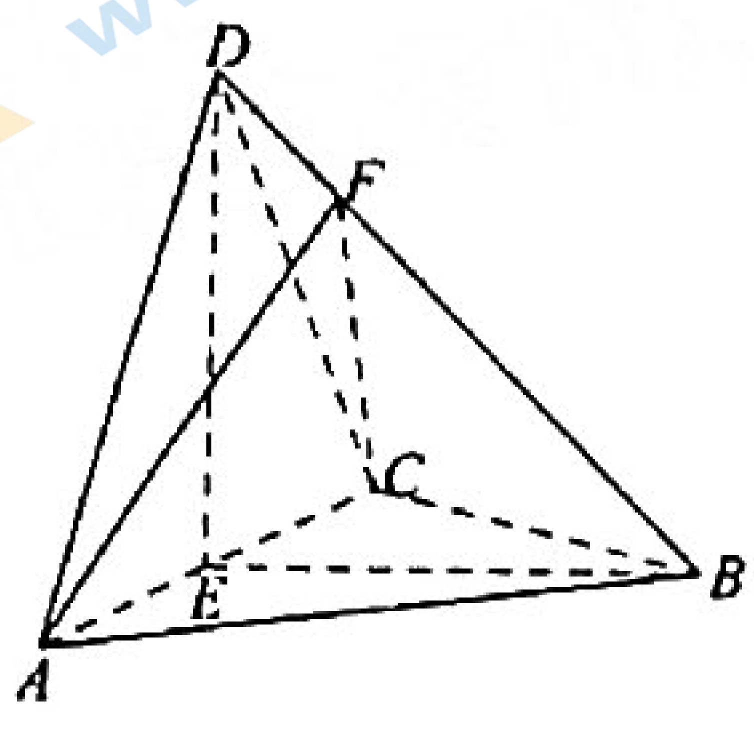
（2）记数列 $\{a_n\}$ 的前20项的和为 S_{20}，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求满足 $T_n \geqslant S_{20}$ 的 n 的最小值.

18.（12分）

如图，在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$，$\triangle BCD$ 均为等边三角形，$AB=2$，点 E 为 AC 的中点，$\angle EBD=45°$.

（1）证明：直线 $DE\perp$ 平面 ABC；

（2）设点 F 在 BD 上，$DF=\dfrac{1}{4}BD$，求二面角 $D-AC-F$ 的余弦值.



19.（12分）

甲袋中装有大小相同的红球2个，白球2个；乙袋中装有与甲袋中相同大小的红球3个，白球4个．先从甲袋中取出1个球投入乙袋中，然后从乙袋中取出3个小球.

（1）求从乙袋中取出的3个小球中仅有1个红球的概率；

（2）记从乙袋中取出的3个小球中白球个数为随机变量 ξ，求 ξ 的分布列和数学期望.

20.（12分）

椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点分别为 A，B，点 M 为第一象限内的动点，直线 MA，MB 与 C 分别交于另外的两点 P，Q，已知 MA，MB 的斜率之比为 $1:3$.

（1）证明：直线 PQ 过定点；

（2）设 $\triangle APQ$ 和 $\triangle BPQ$ 的面积分别为 S_1 和 S_2，求 S_1-S_2 的最大值.

21.（12分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-a(x^2-1)+x$.

（1）若 $f(x)$ 单调递减，求 a 的取值范围；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_2>3x_1$，证明：$e^{10}x_1^2x_2^3>3^{\frac{11}{2}}$.

（二）选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.［选修4－4：坐标系与参数方程］（10分）

在直角坐标系 xOy 中，点 $A(-1,0)$，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=-1$.

（1）写出曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）设点 M 为 C 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AM}$，写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程，并判断 l 与 C_1 是否有公共点.

23.［选修4－5：不等式选讲］（10分）

设函数 $f(x)=|2x-2|+|x+2|$.

（1）解不等式 $f(x)\leqslant 6-x$；

（2）令 $f(x)$ 的最小值为 T，正数 a，b，c 满足 $a+b+c=T$，证明：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\geqslant\frac{16}{3}$.

四川省大数据精准教学联盟2020级高三第一次统一监测

理科数学答案解析与评分标准

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 【答案】A

【考查意图】本小题通过设置复数几何意义情境，设计复数的除法运算，主要考查复数概念，几何意义，共轭复数与复数的除法法则等基础知识；考查运算求解能力，数形结合思想。

【解析】可知 $z_1=-1+2i$，$z_2=3+4i$，则 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1+2i}{3+4i}=\frac{(-1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{5+10i}{25}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$.

2. 【答案】C

【考查意图】本小题通过设置数学情境，设计集合补集与交集运算，主要考查解分式不等式，集合的补集、交集运算等基础知识；考查运算求解能力。

【解析】不等式 $\frac{2x-1}{x+1}\geqslant 1$ 等价于 $\frac{2x-1-x-1}{x+1}\geqslant 0$ 即 $\frac{x-2}{x+1}\geqslant 0$，得 $x<-1$ 或 $x\geqslant 2$，所以 $A\cap(\complement_{R}B)=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant 2\}\cap\{x|x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 1\}=\{x|x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 2\}$.

3. 【答案】C

【考查意图】本小题课外活动时间调查的实际情境，设计统计图表识别和运算问题，主要考查直方图概率计算等基础知识；考查运算求解能力。

【解析】设所求人数 $N=2\times(0.16+0.12+0.08)\times 200=144$，故选C.

4. 【答案】C

【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计三视图和直观图的转化，主要考查空间想象能力和数学运算素养。

【解析】$V=\frac{1}{3}(S_{上}+\sqrt{S_{上}S_{下}}+S_{下})h=\frac{1}{3}(1+2+4)=\frac{7}{3}$. 故选C.

5. 【答案】A

【考查意图】本小题通过设置函数图象情境，设计与函数奇偶性、单调性等性质相关的问题，主要考查函数性质综合应用；考查推理论证能力，直观想象、逻辑推理素养。

【解析】由图象的对称性可知，函数 $f(x)$ 可为偶函数，B，D中的函数为奇函数，不符合题意；A，C中的函数满足，对于C，$f(4)=\frac{4^2}{e^4+e^{-4}}\leqslant\frac{16}{e^4}<1$，不符合题意，故选A。

6. 【答案】B

【考查意图】本小题通过设置三角恒等变换情境，设计正弦、余弦化正切，二倍角公式与齐次化问题，主要考查诱导公式，同角间的三角函数关系，弦化切求值等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理素养。

【解析】由 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，显然 $\cos\alpha\neq0$，所以 $\tan\alpha=2$，则 $\dfrac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}=\dfrac{\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha}$

$=\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{2}{1+2^2}=\dfrac{2}{5}$.

7. 【答案】C

【考查意图】本小题通过设置曲线上的点到直线距离最值问题情境，设计函数导数相关的问题，主要考查直线方程、导数几何意义等基础知识；考查推理论证、运算求解能力，数学运算、逻辑推理素养。

【解析】过点 P 作曲线 $y=\ln x-x^2$ 的平行线，且与该曲线相切，设切点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0>0)$，则切线斜率 $k=\dfrac{1}{x_0}-2x_0$，由题 $\dfrac{1}{x_0}-2x_0=-1$，解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-\dfrac{1}{2}$（舍去），则 $P(1,-1)$，故所求最小距离为 $d=\dfrac{|1-1-4|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

8. 【答案】A

【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计线线角和线面角的表示和计算，主要考查空间想象能力，数据分析和数学运算素养。

【解析】设 $AB=a,AD=b,AA_1=c$，则 $A_1C=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，由于 $AD\parallel BC$，所以异面直线 A_1C 与 AD 所成角为 $\angle A_1CB=60°$，从而 $A_1C=2b$，由于 $AB\parallel CD$，所以异面直线 A_1C 与 AB 所成角为 $\angle A_1CD=45°$，从而 $A_1C=\sqrt{2}a$，所以 $c=b,a=\sqrt{2}b$，所以 $A_1B=\sqrt{3}b,B_1D=2b$，故 $d_{B_1-A_1BC}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}b$，直线 B_1D 和平面 A_1BC 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，从而直线 B_1D 和平面 A_1BC 所成的角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

9. 【答案】B.

【考查意图】本小题设置课程学习情境，主要考查直线与抛物线的位置关系，三角形的面积计算等基础知识，考查数学运算素养和逻辑推理素养.

【解析】不妨设 A 在上方，直线与抛物线联立得 $A(6,9)$，$B(-2,1)$，而 $F(0,1)$，从而 $|BF|=2$，易知点 A 到直线 BF 的距离为 8，则 $\triangle ABF$ 的面积为 8.

10. 【答案】D

【考查意图】本小题通过设置正弦型函数图象情境，设计两弦互相垂直，图象平移问题，主要考查正弦函数的解析式，图象平移，求特殊角的三角函数值等必备知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力，数形结合思想，直观想象素养。

【解析】若 $f(x)$ 的周期为 T，由题意有 $\frac{T}{4}=x_M-x_P=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$，所以 $T=6$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，由 $\frac{\pi}{3}\times\frac{5}{2}+\varphi=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，即 $f(x)=A\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f(x)$ 与 y 轴的交点为 $N\left(0,\frac{A}{2}\right)$，由 $NM\perp NP$，则 $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=\left(\frac{5}{2},-\frac{A}{2}\right)\cdot\left(1,\frac{A}{2}\right)=\frac{5}{2}-\frac{A^2}{4}=0$，解得 $A=\pm\sqrt{10}$（舍负），所以 $f(x)=\sqrt{10}\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位得到的图象对应函数为 $g(x)=\sqrt{10}\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{10}\cos\frac{\pi}{3}x$，所以 $g(0)=\sqrt{10}$.

11.【答案】C

【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计四棱锥和球的组合体，分析数据的相关关系并计算，主要考查空间想象能力和数学运算素养。

【解析】设四边形 $ABCD$ 的外接圆的半径为 r，则 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}|BD|(d_{(A,BD)}+d_{(C,BD)})\leqslant\frac{1}{2}|BD|\cdot(2r)=|BD|\cdot r\leqslant 2r^2$，当且仅当 $ABCD$ 为正方形时，$ABCD$ 的面积最大，且最大值为 $2r^2$. 设球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d，则 $d^2+r^2=4$，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}(2r^2)\cdot(2d)=\frac{4}{3}d(4-d^2)$，设 $f(x)=x(4-x^2)$，则 $f'(x)=4-3x^2$，于是 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 单增，$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$ 单减，从而 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{16\sqrt{3}}{9}$，于是 $V=\frac{4}{3}f(d)\leqslant\frac{64\sqrt{3}}{27}$.

【另解】设四边形 $ABCD$ 的外接圆的半径为 r，球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d，则 $d^2+r^2=4$ 且四边形 $ABCD$ 的最大面积为 $2r^2$，由于 $4=d^2+r^2=d^2+\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{r^2}{2}\cdot\frac{r^2}{2}d^2}=3\sqrt[3]{d^2\frac{r^4}{4}}$，$dr^2\leqslant\frac{16\sqrt{3}}{9}$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}(2d)\cdot(2r^2)\leqslant\frac{64\sqrt{3}}{27}$. 故选 C.

12.【答案】C

【考查意图】本小题通过设置指数式与对数式大小探索性情境，设计函数与导数应用问题，主要考查利用导数研究函数性质等基础知识；考查推理论证、运算求解等数学能力，数学抽象、逻辑推理素养。

【解析】由题，$a=\frac{1}{24}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{30}$，易证 $x>0$ 时，$\sin x<x$，则 $b=\frac{2}{3}\sin\frac{1}{30}<\frac{2}{3}\times\frac{1}{30}=\frac{1}{45}$，则 $b<a$. 欲比较 $b=\frac{2}{3}\sin\frac{1}{30}$ 与 $c=e^{\frac{1}{30}}-1$ 的大小，先比较 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{30}$ 与 $c=e^{\frac{1}{30}}-1$ 的大小，$c-\frac{2}{3}\times\frac{1}{30}=e^{\frac{1}{30}}-1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{30}$，令 $h(x)=e^x-1-\frac{2}{3}x\left(0<x<\frac{3}{2}\right)$，$h'(x)=e^x-\frac{2}{3}>0$，知 $0<x<\frac{3}{2}$ 时 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，则 $0<x<\frac{3}{2}$ 时 $h(x)>h(0)=0$，即 $e^x-1>\frac{2}{3}x$，则

$e^{\frac{1}{30}}-1>\frac{2}{3}\times\frac{1}{30}>\frac{2}{3}\sin\frac{1}{30}$，即 $c>b$. 下面比较 $a=\frac{1}{24}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{30}$ 与 $c=e^{\frac{1}{30}}-1$ 的大小. 构造 $u(x)=e^{x}-1-\frac{5}{4}x(0<x<\frac{1}{5})$，则 $u'(x)=e^{x}-\frac{5}{4}$，当 $0<x<\frac{1}{5}$ 时，$u'(x)<e^{\frac{1}{5}}-\frac{5}{4}$，由 $e<(\frac{5}{4})^{5}$，得 $u'(x)<e^{\frac{1}{5}}-\frac{5}{4}<0$，$u(x)$ 单调递减，则 $u(x)<u(0)=0$，即 $0<x<\frac{1}{5}$ 时，$e^{x}-1<\frac{5}{4}x$，则 $e^{\frac{1}{30}}-1<\frac{5}{4}\times\frac{1}{30}=\frac{1}{24}$，即 $a>c$. 综上所述，$a>c>b$.

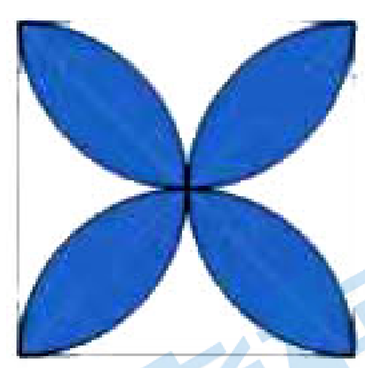
二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 【答案】$\frac{3\pi}{4}$

【考查意图】本小题通过设置数学情境，设计两个已知向量求夹角问题，主要考查求两个向量的差，向量的夹角公式，特殊角的三角函数值等必备知识；考查运算求解能力，数形结合思想。

【解析】由题，得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(4,2)$，设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 的夹角为 α，则 $\cos\alpha=\frac{(-3,1)\cdot(4,2)}{\sqrt{(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+2^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

14. 【答案】$\frac{\pi}{2}-1$



【考查意图】本小题通过设置四叶草生活情境，设计几何概型问题，主要考查阴影部分求面积，几何概型等必备知识；考查运算求解能力，逻辑思维能力，数学建模能力，数学抽象和直观想象素养。

【解析】不妨设正方形的边长为2个单位，则图中阴影部分的面积为两个圆的面积减去一个正方形的面积，即 $2\pi-4$，根据几何概型，小豆落在四叶草图（图中阴影部分）上的概率为 $P=\frac{2\pi-4}{4}=\frac{\pi}{2}-1$.

15. 【答案】10

【考查意图】本题设置数学情境，设计综合性问题，主要考查双曲线的定义及标准方程，双曲线的几何性质等必备知识，考查转化与化归的思想方法，以及逻辑推理与数学运算等核心素养.

【解析】易知点 $(2,3)$ 在双曲线右支上，不妨令 $A(2,3)$，依题意直线 l 的方程为 $y-3=\frac{3}{4}(x-2)$，恰好经过双曲线左焦点 $F_1(-2,0)$，故点 B 在双曲线的左支上，根据双曲线的定义，$|BF|-|BF_1|=2$，$|AF_1|-|AF|=2$，从而 $|BF|=2+|BF_1|$，$|AB|=|AF_1|-|BF_1|=|AF|+2-|BF_1|=5-|BF_1|$，故 $|BF|+|AB|=7$，所以 $\triangle ABF$ 的周长 $=|BF|+|AB|+|AF|=7+3=10$.

16. 【答案】$\frac{2\pi}{3}$

【考查意图】本小题通过设置三角形与外接圆面积情境，设计正弦定理与两角和差的正弦

公式应用问题，主要考查三角形面积公式，圆的面积，正弦定理，两角和差的正弦公式等必备知识；考查运算求解能力，逻辑思维能力，数学应用性与创新性.

【解析】因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}S_{\odot O}$，所以 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{3}\pi R^2$，又 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，所以 $\frac{1}{2}\times 2R\sin A\times 2R\sin B\cdot\sin C=\frac{1}{3}\pi R^2$，所以 $\sin A\sin B\sin C=\frac{\pi}{6}$，又 $2\sin A\cos(B-C)+\sin 2A=2\sin A[\cos(B-C)-\cos(B+C)]=4\sin A\sin B\sin C=4\times\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

【考查意图】本小题通过设置等差等比数列情境，设计数列通项与前 n 项和问题，主要考查等差数列，等比数列的通项公式，前 n 项和公式，方程与不等式等必备知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力，数学应用与数学探究意识。

【解析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，正项等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$. ········1 分

由 $a_1=b_1=2$，$b_3=a_7=a_2+a_4$.

即 $2q^2=2+6d=2+d+2+3d$，························3 分

解得 $d=1$，$q=2$，························4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+1$，························5 分

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2^n$. ························6 分

(2) 由 (1) 得 $S_{20}=\frac{20\times(2+21)}{2}=230$，························7 分

$$T_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2,$$ ························8 分

所以，$T_n\geqslant S_{20}$ 即 $2^{n+1}-2\geqslant 230$，

即 $2^n\geqslant 116$，························10 分

由 $2^6=64<116<128=2^7$，

所以满足 $2^n\geqslant 116$ 的 n 的最小值为 7. ························12 分

18.（12 分）

【考查意图】本小题设置课程学习情境，设计空间位置关系的证明，计算线面所成角的大小。准确认识线线共面垂直和异面垂直的判定方式，有效进行线线垂直和线面垂直的转化。主要考查空间想象能力和数学运算素养。

【答案】(1) 略；(2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

【解析】(1) 证明：因为 $\Delta ABD,\Delta BCD$ 均为等边三角形，所以 $DA=DC$，$BA=BC$.

又因为 E 为 AC 的中点，所以 $DE\perp AC,BE\perp AC$，则 $DE=BE=\sqrt{4-(\frac{AC}{2})^2}$，

所以 ΔEBD 为以 BD 为底边的等腰三角形. ……3 分

又因为 $\angle EBD=45°$，所以 $\angle DEB=90°$，即 $DE\perp BE$.

所以 $DE\perp$ 面 ABC. ……5 分

(2) 由 (1) 知：$DE\perp BE$，$DE\perp AC,BE\perp AC$，故以 $\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{ED}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,\sqrt{2}),A(\sqrt{2},0,0),C(-\sqrt{2},0,0),B(0,\sqrt{2},0)$. ……7 分

因为 $DF=\frac{1}{4}BD$，所以 $F(0,\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4})$，

所以 $\overrightarrow{AF}=\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right),\overrightarrow{CF}=\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$，

所以面 ACF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,-3)$. ……10 分

又因为面 ACD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,-1,0)$，

所以，$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

二面角 $D-AC-F$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ……12 分

19.（12 分）

【考查意图】本小题利用摸球实验为情境，设置概率及统计问题，考查离散型随机变量的分布列和数学期望等基础知识；考查推理论证、运算求解、数据处理能力和数学建模、数学运算素养。

【解析】(1) 记“乙袋中取出的 3 个小球中仅有 1 个红球”为事件 A，包含如下两个事件：“从甲袋中取出 1 红球投入乙袋，然后从乙袋取出的 3 个小球中仅 1 个红球”；“从甲袋中取出 1 白球投入乙袋，然后从乙袋取出的 3 个球中仅 1 个红球”，

分别记为事件 A_1，A_2，且 A_1 与 A_2 互斥，

则 $P(A_1)=\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_4^1C_4^2}{C_8^3}=\frac{3}{14}$， ……2 分

又 $P(A_2)=\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}$， ……4 分

所以，$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{3}{14}+\frac{15}{56}=\frac{27}{56}$，

故从乙袋中取出的 3 个小球中仅有 1 个红球的概率为 $\frac{27}{56}$. ……5 分

(2) 白球个数 ξ 的可能值为 0，1，2，3.

$$P(\xi=0)=\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_4^3}{C_8^3}+\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{10}{224}=\frac{5}{112},$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_4^2C_4^1}{C_8^3}+\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{78}{224}=\frac{39}{112},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_4^1C_4^2}{C_8^3}+\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{108}{224}=\frac{27}{56},$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_4^3}{C_8^3}+\frac{C_2^1}{C_4^1}\times\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{28}{224}=\frac{7}{56}.$$ ……………………………………9 分

则ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{5}{112}$	$\frac{39}{112}$	$\frac{54}{112}$	$\frac{14}{112}$

所以，$E\xi=0\times\frac{5}{112}+1\times\frac{39}{112}+2\times\frac{54}{112}+3\times\frac{14}{112}=\frac{189}{112}$. ……………………………………12 分

20. (12 分)

【答案】(1) 直线PQ过定点$(1,0)$；(2)3.

【解析】(1) 证明：设$M(x,y)$，则$k_{MA}=\frac{y}{x+2}$，$k_{MB}=\frac{y}{x-2}$.

因为$k_{MB}=3k_{MA}$，所以$3(x-2)=x+2$，即$x=4$，

故点M在直线$x=4$上. ……………………………………2 分

设$M(4,m)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则$MA:y=\frac{m}{6}(x+2)$.

代入$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得$(m^2+27)x^2+4m^2x+4m^2-108=0$，

所以$-2x_1=\frac{4m^2-108}{m^2+27}$，即$x_1=\frac{-2m^2+54}{m^2+27}$，故$y_1=\frac{m}{6}(x_1+2)=\frac{18m}{m^2+27}$，

同理可得$x_2=\frac{2m^2-6}{m^2+3}$，$y_2=\frac{-6m}{m^2+3}$. ……………………………………4 分

取点$N(1,0)$，则$\overrightarrow{NP}=\left(\frac{-3m^2+27}{m^2+27},\frac{18m}{m^2+27}\right)$，$\overrightarrow{NQ}=\left(\frac{m^2-9}{m^2+3},\frac{-6m}{m^2+3}\right)$，

又因为$\frac{-3m^2+27}{m^2+27}\cdot\frac{-6m}{m^2+3}-\frac{18m}{m^2+27}\cdot\frac{m^2-9}{m^2+3}=0$，

所以$\overrightarrow{NP}\parallel\overrightarrow{NQ}$，即直线$PQ$过定点$(1,0)$. ……………………………………6 分

(2) 由已知，椭圆C的长半轴长$a=2$；由(1)知直线PQ过定点$N(1,0)$.

而$|AN|=a+1=3$，$|BN|=a-1=1$，所以$d_{A-PQ}=3d_{B-PQ}$，故$S_1=3S_2$.

又$S_2=\frac{1}{2}|BN|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}|y_1-y_2|$，所以$S_1-S_2=2S_2=|y_1-y_2|$. ……………………………………8 分

设$PQ:x=ny+1$，代入$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，得$(3n^2+4)y^2+6ny-9=0$，

故 $y_1+y_2=\dfrac{-6n}{3n^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3n^2+4}$. ……………………………………………………10 分

从而 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\dfrac{12\sqrt{n^2+1}}{3n^2+4}=12\sqrt{\dfrac{n^2+1}{(3n^2+4)^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{9(n^2+1)+\dfrac{1}{n^2+1}+6}}\leqslant 3$. ……………………12 分

即当 $n=0$ 时，S_1-S_2 取得最大值 3.

21.（12 分）

【考查意图】本小题主要考查函数零点、极值，导数的应用等基础知识，考查化归与转化、函数与方程等数学思想，考查推理论证、运算求解等数学能力.

【解析】(1) 由 $f(x)=x\ln x-a(x^2-1)+x$ 得 $f'(x)=\ln x-2ax+2(x>0)$，

因为 $f(x)$ 单调递减，所以 $f'(x)=\ln x-2ax+2\leqslant 0$ 在 $x>0$ 时恒成立，

即 $2a\geqslant\dfrac{\ln x+2}{x}$，令 $g(x)=\dfrac{\ln x+2}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{-\ln x-1}{x^2}$，

可知 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；$x>\dfrac{1}{e}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

则 $x=\dfrac{1}{e}$ 时 $g(x)$ 取极大值 $g\left(\dfrac{1}{e}\right)=e$，所以 $2a\geqslant e$，

所以，a 的取值范围是 $\left[\dfrac{e}{2},+\infty\right)$. ……………………………………………………4 分

(2) 由 (1) 知 $f'(x)=\ln x-2ax+2$，

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，则 $f'(x)=\ln x-2ax+2$ 有两个零点 x_1,x_2，

可知 $0<a<\dfrac{e}{2}$，且 $x_2>3x_1>0$，……………………………………………………5 分

要证明 $e^{10}x_1^2x_2^3>3^{\frac{11}{2}}$，只需证明 $2\ln x_1+3\ln x_2>\dfrac{11}{2}\ln 3-10$. ……………………6 分

由 $\begin{cases}\ln x_1-2ax_1+2=0,\\ \ln x_2-2ax_2+2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\ln x_1=2ax_1-2,\\ \ln x_2=2ax_2-2,\end{cases}$ 则 $2a=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

所以，$2\ln x_1+3\ln x_2=2a(2x_1+3x_2)-10$

$$=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}(2x_1+3x_2)-10$$

$$=\frac{\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}\left(2\cdot\frac{x_1}{x_2}+3\right)-10,$$

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$，则 $t\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$，要证明 $2\ln x_1+3\ln x_2>\dfrac{11}{2}\ln 3-10$，

即证明 $\dfrac{\ln t}{t-1}(2t+3)>\dfrac{11}{2}\ln 3$. ……………………………………………………9 分

令 $h(t)=\dfrac{\ln t}{t-1}(2t+3)$，且 $t\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$，则 $h'(t)=\dfrac{2t-5\ln t-\dfrac{3}{t}+1}{(t-1)^2}$，

令 $u(t)=2t-5\ln t-\dfrac{3}{t}+1$，且 $t\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$，

则 $u'(t)=2-\dfrac{5}{t}+\dfrac{3}{t^2}=\dfrac{(2t-3)(t-1)}{t^2}>0$，

则 $u(t)$ 在 $t\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 时单调递增，故 $u(t)<u\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}+5\ln 3-8<0$，

故 $h'(t)<0$，则 $h(t)$ 在 $t\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 时单调递减，

所以，$h(t)>h\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{11}{2}\ln 3$，即 $\dfrac{\ln t}{t-1}(2t+3)>\dfrac{11}{2}\ln 3$，

则有 $2\ln x_1+3\ln x_2>\dfrac{11}{2}\ln 3-10$.

所以 $e^{10}x_1^2x_2^3>3^{\frac{11}{2}}$，即原不等式成立. ……………………………………………………………… 12 分

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

【答案】(1) $C:(x-2)^2+y^2=4$，$l: x-y=-1$；(2) 直线 l 与圆 C_1 没有公共点.

【解析】(1) 因为曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ （θ 为参数），

所以 $(x-2)^2+y^2=(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2=4$，

即曲线 C 的普通方程为：$(x-2)^2+y^2=4$. ……………………………………………………………… 3 分

因为 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，由 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=-1$，

可得 l 的方程为：$x-y+1=0$. ……………………………………………………………… 5 分

(2) 设 $P(x,y)$，设 $M(2+2\cos\theta,2\sin\theta)$.

因为 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AM}$，

所以 $(x+1,y)=2(2+2\cos\theta+1,2\sin\theta)=(6+4\cos\theta,4\sin\theta)$，

则 $\begin{cases}x+1=6+4\cos\theta,\\ y=4\sin\theta,\end{cases}$

故 P 的轨迹 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=5+4\cos\theta,\\ y=4\sin\theta\end{cases}$ （θ 为参数）. ……………………………… 8 分

所以曲线 C_1 为圆心 $C_1(5,0)$，半径为 4 的圆.

而圆心 C_1 到直线 l 的距离为 $\dfrac{|5-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$.

因为 $3\sqrt{2}>4$，所以直线 l 与圆 C_1 相离，故直线 l 与圆 C_1 没有公共点. ……………………… 10 分

23．［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

【考查意图】本小题以含绝对值的不等式为命题情境，主要考查不等式的证明方法、重要不等式等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；逻辑推理、数学运算素养。

【解析】(1)当 $x<-2$ 时，$f(x)=-2x+2-x-2\leqslant 6-x$，解得 $-3\leqslant x<-2$；…………1 分

当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-2x+2+x+2\leqslant 6-x$，可得 $-2\leqslant x\leqslant 1$；…………2 分

当 $x>1$ 时，$f(x)=2x-2+x+2\leqslant 6-x$，解得 $1<x\leqslant\frac{3}{2}$，…………3 分

综上所述，原不等式的解集为 $\left\{x\middle|-3\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$. …………5 分

(2)若 $x<-2$，则 $f(x)=-3x>6$；

若 $-2\leqslant x\leqslant 1$，则 $f(x)=-x+4\geqslant 3$；

若 $x>1$，则 $f(x)=3x>3$.

所以函数 $f(x)$ 的最小值 $T=3$，故 $a+b+c=3$. …………7 分

又 a,b,c 为正数，

则有 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\right)(a+b+c)=6+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{4b}{c}$

$$\geqslant 6+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{4a}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{4b}{c}}$$

$$=16.$$

当且仅当 $a=b=\frac{3}{4}$，$c=\frac{3}{2}$ 时等号成立.

所以，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}\geqslant\frac{16}{3}$. …………10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。