2024届高三湖北十一校第一次联考　　参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	A	B	C	C	D	D	BCD	AB	AD	ACD

1.A 【解析】$A=\{0,1,2,3,4\}$, $\complement_U B=\{0,2,4,6\}$ $\therefore A\cap\complement_U B=\{0,2,4\}$

2.C 【解析】$z+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ $\therefore$虚部为$\frac{1}{2}$

3.A【解析】$x^3>8\Leftrightarrow x>2$，$|x|>2\Leftrightarrow x>2或x<-2$ ，前面可以推导后面，后面不能推导前面

4.B 【解析】$t=4时$，$f(4)=ae^{4\lambda}=2a$ $\therefore e^{4\lambda}=2$，再过$t_1$年，$f(4+t_1)=ae^{(4+t_1)\lambda}=8a$

$\Rightarrow e^{(4+t_1)\lambda}=8=2^3=e^{12\lambda}\Rightarrow t_1=8$

5.C 【解析】$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot(|\overrightarrow{AP}|COS\angle PAB)$，由投影的定义知$|\overrightarrow{AP}|COS\angle PAB\in[2,3]$

$\therefore\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}\in[4,6]$

6.C 【解析】$f(-x)+f(x)=0$，$\therefore f(x)$为奇函数，$f'(x)=2\cos x-(e^x+e^{-x})$，$2\cos x\le 2$

$e^x+e^{-x}\ge 2$，$\therefore f'(x)\le 0$ $\therefore f(x)$为减函数，$f(x^2-4)+f(3x)<0$

$\Leftrightarrow x^2-4>-3x\Leftrightarrow x>1或x<-4$

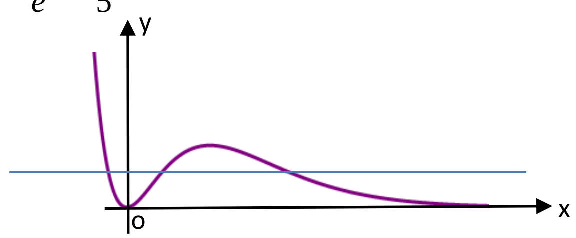
7. D 【解析】将 S 按 3 同余分类得到：$A_0=\{3,6,9\}$, $A_1=\{1,4,7,10\}$, $A_2=\{2,5,8\}$,

$\therefore P=\frac{C_3^3+C_4^3+C_3^3+C_3^1C_4^1C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{20}$.

8.D 【解析】由$2e^x-5x^2=0$得$\frac{x^2}{e^x}=\frac{2}{5}$ ，构造函数 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$， 求导得$g'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$

$g(x)在(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,2)$上单调递增，$(2,+\infty)$上单调递减，且$g(0)=0$，

$g(2)=\frac{4}{e^2}>\frac{2}{5}$及$x\to+\infty时g(x)\to 0$，$g(x)$的图像如图，得到$g(x)=\frac{2}{5}$有 3 个解.



9.BCD

10.AB 【解析】$\left(-\sin\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{3}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$由三角函数的定义的$\sin\alpha=\frac{1}{2},\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

取$\alpha=\frac{5\pi}{6}$，$\therefore f(x)=\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$，$\therefore A$正确.

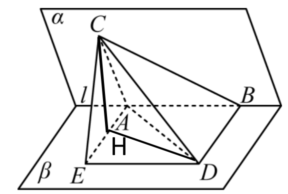
$B:x=\frac{2\pi}{3}$时，$f(x)$=1 正确，

C:平移后应为$y=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$所以 C 错.

D:由$\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)=0$得$2x-\frac{5\pi}{6}=k\pi\Rightarrow x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，仅$k$=0,1符合，恰有两个零点，所以 D 错.

11. AD【解析】A: $\overrightarrow{CD}\bullet\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{AB}+0=\overrightarrow{AB}^2=1$, 故 A 正确；

B:如图，过A作$AE\parallel BD$，且$AE=BD$，连接ED，EC，则$ABDE$为正方形，$\angle CAE$为二面角$\alpha-l-\beta$的平面角，当$\angle CAE=60°$时，易得ΔACE为正三角形，过 C 作 CH$\perp AE$，则 CH$\perp$平面AED,故$\angle CDH$即为CD与平面β所成的角.



在$Rt\Delta CDH$中，$\sin\angle CDH=\frac{CH}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$,故 B 错误；

C: CD=$\sqrt{3}$时$\angle CAE=90°$，C 到面β的距离为 1，所以四面体 ABCD 的体积为$\frac{1}{3}S_{\vartriangle ABD}\bullet 1=\frac{1}{6}$,所以 C 错

D:由 CD=$\sqrt{2}$可得$\angle CAE=60°$如图，取 AE 的中点 M，BD 的中点 N,连接 CM,MN,CN 则二面角

$C-BD-A$的平面角为$\angle CNM$，CM=$\frac{\sqrt{3}}{2}$,MN=1,所以$\cos\angle CNM=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

12.ACD 【解析】等轴双曲线的离心率为$\sqrt{2}$所以 A 正确，

B:设$P(x_0,y_0)$, $d_1d_2=\frac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}}\bullet\frac{|x_0+y_0|}{\sqrt{2}}=\frac{|x_0{}^2-y_0{}^2|}{2}=\frac{a^2}{2}$所以 B 错.

C: $\tan\alpha\cdot\tan\beta=k_{PA}\cdot(-k_{PB})=-1$, $\tan\gamma=-\tan(\alpha+\beta)=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{2}$

所以$\tan\alpha+\tan\beta+2\tan\gamma=0$，C 正确.

D: 方法 1：设l与双曲线及其渐近线依次交于 E,F,G,H

由$\begin{cases}y=kx+m\\x^2-y^2=a^2\end{cases}\Rightarrow(k^2-1)x^2+2mkx+m^2+a^2=0$得 EH 中点的横坐标为$\frac{mk}{1-k^2}$

由$\begin{cases}y=kx+m\\x^2-y^2=0\end{cases}\Rightarrow(k^2-1)x^2+2mkx+m^2=0$得 FG 中点的横坐标为$\frac{mk}{1-k^2}$，

所以 EH 和 FG 的中点重合，即 M 为双曲线弦 EH 的中点，

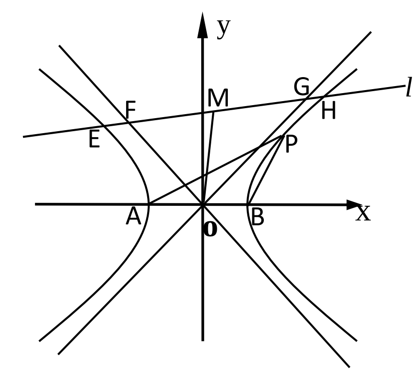
由点差法得k_1k_2=1，所以 D 正确.

方法 2：设$F(x_1,y_1),G(x_2,y_2),M(x_0,y_0)$

由

$\begin{cases}x_1^2-y_1^2=0\\x_2^2-y_2^2=0\end{cases}\Rightarrow(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$

$\therefore 2x_0-2y_0k_1=0\Rightarrow k_1k_2=1$，所以 D 正确.



三．填空题：13. -40　　14. 25　　15. 6　　16. $a \ge e$

13. -40 【解析】$C_5^3(2x)^2(-1)^3=-40x^2$

14. 25【解析】 $x+4y\ge 4\sqrt{xy}$， $xy-5\ge 4\sqrt{xy}\Rightarrow \sqrt{xy}\ge 5\Rightarrow xy\ge 25$

15. 6 【解析】由抛物线的定义知$|MN|=|MF|$，所以$\angle MNF=\angle MFN=\angle NFO=\frac{\pi}{3}$，

$|NF|=\dfrac{p}{\cos\frac{\pi}{3}}=8$，$|MN|=|MF|=8$，$|MF|=x_M+2$，所以$x_M=6$．

16. $a\ge e$【解析】$(\frac{x_2}{x_1})^{x_1x_2}-\frac{e^{ax_2}}{e^{ax_1}}<0\Leftrightarrow(\frac{x_2}{x_1})^{x_1x_2}<e^{ax_2-ax_1}$

两边取对数 $x_1x_2\ln(\frac{x_2}{x_1})<ax_2-ax_1\Leftrightarrow \ln x_2-\ln x_1<\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}\Leftrightarrow \ln x_2+\frac{a}{x_2}<\ln x_1+\frac{a}{x_1}$

所以$h(x)=\ln x+\frac{a}{x}$ 在（1，e）上单调递减，所以$h'(x)\le 0$在（1, e）上恒成立，解出$a\ge e$

四．解答题：

17. 解：(1)　由$B=\frac{\pi}{2}+A$得：$C=\pi-A-B=\frac{\pi}{2}-2A$……2分

$\therefore \cos C=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2A\right)=\sin 2A=2\sin A\cos A$

$\because B>A$，故 A 为锐角，$\therefore \cos A=\frac{4}{5}$ ……4分

$\therefore \cos C=2\sin A\cos A=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$ ……6分

(2) 由（1）知：$\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=\cos A=\frac{4}{5}$，　$\sin C=\frac{7}{25}$

由正弦定理得：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{25}{3}$……10分

$\therefore a+b+c=\frac{25}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)=\frac{25}{3}(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{7}{25})=14$

故$\triangle ABC$的周长为14.……12分

18. 解：(1) 由a_1,a_6,a_{16}成等比数列，故$a_1a_{16}=a_6^2$，即$a_1(a_1+15d)=(a_1+5d)^2$

即$25d^2=5a_1d$，又$d\ne 0$故$a_1=5d$，$a_n=a_1+(n-1)d=(n+4)d$ ……2分

故等比数列的公比$q=\frac{a_6}{a_1}=2$ ……4分

(2) 在等差数列$\{a_n\}$中，$a_{k_n}=a_1+(k_n-1)d=(k_n+4)d$ ……6分

在等比数列$\{a_{k_n}\}$中，$a_{k_n}=a_{k_1}\cdot 2^{n-1}=a_1\cdot 2^{n-1}=5d\cdot 2^{n-1}$

故$(k_n+4)d=5d\cdot 2^{n-1}$，即$k_n=5\cdot 2^{n-1}-4$……9分

$k_1+k_2+\cdots\cdots+k_n=5\cdot(1+2+2^2+\cdots 2^{n-1})-4n=5\cdot 2^n-4n-5$……12分

19 解：(1) 证明：$\because$四边形$ABCD$为矩形，$\therefore AB\,/\!/\,CD$，

$\because AB\subset$平面ABE，$CD\not\subset$平面ABE，$\therefore CD\,/\!/$平面ABE……2分

又$CD\subset$平面CDE，平面$ABE\cap$平面$CDE=l$，$\therefore l\,/\!/\,CD$，……4分

$\because CD\subset$平面$ABCD$，$\therefore l\,/\!/$平面$ABCD$．……6分

(2) 取AB，CD的中点分别为O，F，连接OE，OF，则$OF\perp AB$，

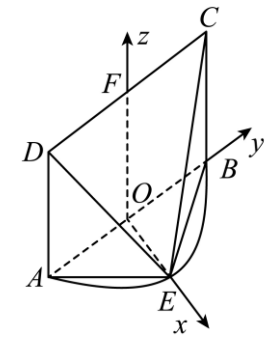
$\because$平面$ABCD\perp$平面ABE，且交线为AB，$\therefore OF\perp$平面ABE，

又$OE\subset$平面ABE，$OF\perp OE$，

当l与半圆弧$\overset{\frown}{AB}$相切时，$OE\perp l$，即$OE\perp AB$，

以OE，OB，OF所在的直线分别为x，y，z轴，

建立如图所示的空间直角坐标系，……7分



不妨设$BC=1$，易得$A(0,-2,0)$，$C(0,2,1)$，$D(0,-2,1)$，$E(2,0,0)$，

则$\overrightarrow{DE}=(2,2,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$，

设$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$为平面DAE的一个法向量，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{DE}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}z_1=0\\ 2x_1+2y_1-z_1=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}z_1=0\\ x_1=-y_1\end{cases}$，

令$x_1=1$，则$\vec{m}=(1,-1,0)$……9分

设$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$为平面DCE的一个法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}4y_2=0\\ 2x_2+2y_2-z_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_2=0\\ 2x_2=z_2\end{cases}$令$x_2=1$，则$\vec{n}=(1,0,2)$……11分

$\therefore\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，所以两平面的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．……12分

20 解：(1) 小球三次碰撞全部向左偏或者全部向右偏落入 B 袋，故概率$P(B)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

小球落入A袋中的概率$P(A)=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ ……2分

故$P_1=P(A)=\frac{3}{4}$，$P_2=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{13}{16}$，$P_3=\left(\frac{3}{4}\right)^3+C_2^1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{51}{64}$……5分

(2) 法 1：游戏过程中累计得不到 n 分，只可能在得到 n-1 分后的一次游戏中小球落入 B 袋（+2 分）

故$1-P_n=\frac{1}{4}P_{n-1}$即$P_n=1-\frac{1}{4}P_{n-1}(n\ge 2)$……8分

法 2：游戏过程中累计得 n 分可以分为两种情况：得到 n-2 分后的一次游戏小球落入 B 袋中(+2 分)，或得到 n-1 分后的一次游戏中小球落入 A 袋中（+1）分，

故$P_n=\frac{3}{4}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}\Rightarrow P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}=P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}(n\ge 3)$

故$\left\{P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}\right\}$为常数数列且$P_2+\frac{1}{4}P_1=1$，故$P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}=1$即$P_n=1-\frac{1}{4}P_{n-1}(n\ge 2)$……………8 分

由$P_n=1-\frac{1}{4}P_{n-1}\Rightarrow P_n-\frac{4}{5}=-\frac{1}{4}\left(P_{n-1}-\frac{4}{5}\right)$………………………………………………10 分

故$\left\{P_n-\frac{4}{5}\right\}$为等比数列且首项为$P_1-\frac{4}{5}=\frac{3}{4}-\frac{4}{5}=-\frac{1}{20}$，公比为$-\frac{1}{4}$

故$P_n-\frac{4}{5}=(-\frac{1}{20})(-\frac{1}{4})^{n-1}=(\frac{1}{5})(-\frac{1}{4})^n$，故$P_n=(\frac{1}{5})(-\frac{1}{4})^n+\frac{4}{5}$ ……………………………12 分

21. 解：(1)设动圆半径为 r，由圆 M 与圆F_1外切得：$|MF_1|=r+\frac{1}{2}$，由圆 M 与圆F_2内切得：$|MF_2|=\frac{7}{2}-r$

故$|MF_1|+|MF_2|=4>|F_1F_2|=2$，………………………………………………………………2 分

故点M的轨迹是以F_1，F_2为焦点的椭圆，且$2a=4,2c=2$，故$b^2=3$

$\therefore$点M的轨迹 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$……………………………………………………4 分

（2）设$l:y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Rightarrow\left(4k^2+3\right)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$……………………………6 分

故$x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3},x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$，AB 的中点 M$\left(\frac{4k^2}{4k^2+3},\frac{-3k}{4k^2+3}\right)$

故 AB 的中垂线的方程为：$y+\frac{3k}{4k^2+3}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{4k^2}{4k^2+3}\right)$…………………………8 分

因为AA'的中垂线为 x 轴，故 AB 的中垂线与 x 轴的交点即为外心 Q,

令 y=0 得：$x_Q=\frac{k^2}{4k^2+3}$，故$|QF_2|=\left|\frac{k^2}{4k^2+3}-1\right|=\frac{3\left(k^2+1\right)}{4k^2+3}$…………………………9 分

又$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\,\frac{12\sqrt{1+k^2}}{4k^2+3}=\frac{12\left(1+k^2\right)}{4k^2+3}$…………………………10 分

故$\frac{|QF_2|}{|AB|}=\frac{1}{4}$(定值)……………………………………………………………12 分

22.解：$f'(x)=\frac{1}{x}\therefore$切线$l$的方程为$:y-\ln\left(mx_1\right)=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$ 即$:y=\frac{1}{x_1}x+\ln\left(mx_1\right)-1$

令$y=0$得$x_2=x_1(1-\ln\left(mx_1\right))$………………………………………………………………2 分

（1）当$x_1=\frac{1}{e},m=1$时 切线 l 的方程为$:y=ex-2$…………………………………………4 分

（2）由$x_2>0$得$x_1(1-\ln\left(mx_1\right))>0\because m>0\therefore x_1>0,1-\ln mx_1>0\Rightarrow 0<x_1<\frac{e}{m}$

$x_2=x_1(1-\ln mx_1)$，令$g(x)=x(1-\ln mx),x\in(0,\frac{e}{m})$，

令$g'(x)=-\ln mx$，由$g'(x)=0$得$x=\frac{1}{m}$

且$x\in(0,\frac{1}{m})$时 $g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$x\in(\frac{1}{m},\frac{e}{m})$时 $g'(x)<0$，$g(x)$单调递减

$\therefore g(x)_{\max}=g(\frac{1}{m})=\frac{1}{m}\therefore$当$0<x_1<\frac{e}{m}$，$x_2=g(x_1)\le\frac{1}{m}\therefore\left|x_2-\frac{1}{m}\right|=\frac{1}{m}-x_2$…………6 分

①当$0<x_1\le\frac{1}{m}$时$\left|x_1-\frac{1}{m}\right|=\frac{1}{m}-x_1$，$\left|x_1-\frac{1}{m}\right|-\left|x_2-\frac{1}{m}\right|=\frac{1}{m}-x_1-(\frac{1}{m}-x_2)=x_2-x_1=-x_1\ln mx_1$,

$\because 0<x_1\le\frac{1}{m},\therefore -x_1\ln mx_1\ge 0\therefore\left|x_1-\frac{1}{m}\right|\ge\left|x_2-\frac{1}{m}\right|$……………………………………8 分

②当$\frac{1}{m}<x_1<\frac{e}{m}$时$\left|x_1-\frac{1}{m}\right|-\left|x_2-\frac{1}{m}\right|=\left(x_1-\frac{1}{m}\right)-\left(\frac{1}{m}-x_2\right)=x_2+x_1-\frac{2}{m}=x_1(2-\ln mx_1)-\frac{2}{m}$,

令$h(x)=x(2-\ln mx)-\frac{2}{m},x\in(\frac{1}{m},\frac{e}{m})$，$h'(x)=1-\ln mx$，当$x\in(\frac{1}{m},\frac{e}{m})$时 $h'(x)>0$

$\therefore h(x)$在$(\frac{1}{m},\frac{e}{m})$上单调递增 $\therefore h(x)>h(\frac{1}{m})=0$ $\therefore\left|x_1-\frac{1}{m}\right|>\left|x_2-\frac{1}{m}\right|$

综上，$\left|x_1-\frac{1}{m}\right|\ge\left|x_2-\frac{1}{m}\right|$……………………………………………………………12 分