2018 北京市东城区高二（下）期末

数　　学（文）

本试卷共 100 分。考试时长 120 分钟。

第一部分（选择题　共 36 分）

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

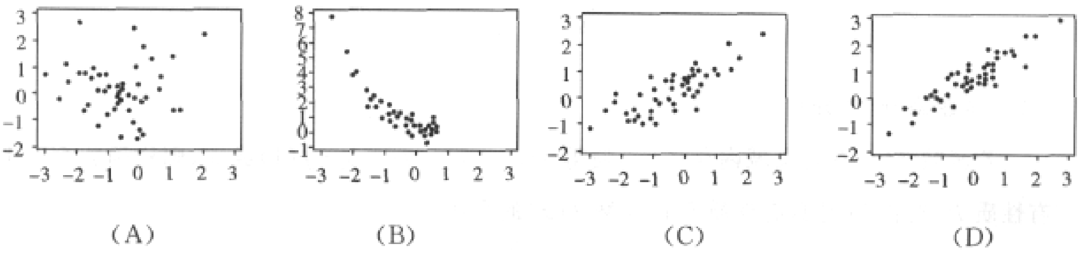
1. 已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$，集合 $B=\{x\,|\,x=2m,m\in A\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0\}$　　B. $\{0,2\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{2,4\}$

2. 在复平面内，复数 $z=1+\dfrac{2}{i}$ 对应的点的坐标是

A. （1，2）　　B. （1，$\dfrac{1}{2}$）　　C. （$1,-\dfrac{1}{2}$）　　D. （1，-2）

3. 如下图，4 个散点图中，不适合用线性回归模型拟合其中两个变量的是



4. 下面几个推理过程是演绎推理的是

A. 在数列$\{a_n\}$中，根据$a_1=1$，$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2}+\dfrac{1}{a_{n-1}}(n\ge 2,n\in N^*)$，计算出$a_2$，$a_3$，$a_4$的值，然后猜想$\{a_n\}$的通项公式

B. 某校高二共 8 个班，一班 51 人，二班 52 人，三班 52 人，由此推测各班人数都超过 50 人

C. 因为无限不循环小数是无理数，而π是无限不循环小数，所以π是无理数

D. 由平面三角形的性质，推测空间四面体的性质

5. 函数 $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{1}{x}$ 在定义域内的零点个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. 已知曲线 $y=\ln x$ 的切线过原点，则此切线的斜率为

A. e　　B. －e　　C. $\frac{1}{e}$　　D. $-\frac{1}{e}$

7. “$a^3>b^3$”是“$a^{\frac{1}{2}}>b^{\frac{1}{2}}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 用反证法证明命题：“若直线 AB，CD 是异面直线，则直线 AC，BD 也是异面直线”，首先应该

A. 假设直线 AC，BD 是共面直线

B. 假设直线 AC，BD 是相交直线

C. 假设直线 AC，BD 是平行直线

D. 假设直线 AC，BD 互相垂直

9. 使不等式 $\frac{1}{x}>x>x^2$ 成立的 x 的取值范围是

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,+\infty)$

10. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，且 $a>b>c$， $a+b+c=0$，则

A. $\forall x\in(0,1)$, 都有 $f(x)>0$

B. $\forall x\in(0,1)$，都有 $f(x)<0$

C. $\exists x_0\in(0,1)$， $f(x_0)=0$

D. $\exists x_0\in(0,1)$， $f(x_0)>0$

11. 给出下列四个命题：

①函数 $y=a^x$（a>0 且 $a\neq1$）与函数 $y=\log_a a^x(a>0且a\neq1)$ 的定义域相同；

②函数 $y=\sqrt{x}$ 与函数 $y=3^x$ 的值域相同；

③函数 $y=|x+1|$ 与函数 $y=2^{x+1}$ 在区间[0, +∞ ）上都是增函数；

④函数 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 与函数 $y=|\log_2 x|$ 都有对称中心。

则正确的命题是

A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ①③

12. 已知函数 f（x）的导函数 $f'(x)$ 是二次函数，且 $y=f'(x)$ 的图象关于 y 轴对称，$f'(3)=0$，若 $f(x)$ 的极大值与极小值之和为 4，则 f（0）=

A. 2 B. 0 C. -2 D. -4

第二部分（非选择题 共 64 分）

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

13. 已知函数 $f(x)=\sin x$ 的导函数为 $f'(x)$，则 $f'(\dfrac{\pi}{2})=$__________。

14. 已知 $a\in R$，i 为虚数单位，若复数 $z=i(a-i)$，$|z|=2$，则 a=__________。

15. 观察下列等式：

1=1；

1-4=-（1+2）；

1-4+9=1+2+3；

1-4+9-16=-（1+2+3+4）

……

根据上述规律，第 6 个式子为____________；第 n 个式子为___________。

16. 已知 $f(x)=x^2$，能够说明“存在函数 $y=g(x)$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，g(x)单调递增，且 $f(x)\cdot g(x)$ 单调递减是真命题的一个 $g(x)$ 为____________。

17. 函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 1,\\ 3-x, x>1\end{cases}$，若存在 $x_0\in[-1,2]$，使得 $f(x_0)\le a$，则实数 a 的取值范围是___________。

18. 对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\ne 0)$，给出定义：设 $f'(x)$ 是 $y=f(x)$ 的导数，$f''(x)$ 是 $y=f'(x)$ 的导数，若 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0，则称 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的拐点，经过研究发现，任何一个三次函

数都有“拐点”，且该“拐点”也为该函数的对称中心。若 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，则 $f''(x)=$_____；

$f(\frac{1}{2018})+f(\frac{3}{2018})+f(\frac{5}{2018})+\cdots+f(\frac{2017}{2018})=$_____。

三、解答题（本题共 4 小题，共 46 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

19. （本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=-x^3+x^2+b$，$b\in R$

（I）若曲线 $y=f(x)$ 在点（1，f(1)）处的切线与 y 轴相交于点（0，3），试确定 b 的值并求该切线方程；

（II）若 f(x) 在 $x\in[-\frac{1}{2},1]$ 上的最大值为 $\frac{1}{8}$，求实数 b 的值。

20. （本题满分 12 分）

已知函数 $y=f(x)$ 为定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^2+2,0<x\le 3\\ -\frac{3}{x},x>3\end{cases}$$

（I）试求 f(-2) 的值；

（II）指出 f(x) 的单调递增区间；（直接写出结论即可）

（III）求出 f(x) 的零点

21. （本题满分 12 分）

已知 $k\in R$，$k\neq 0$，函数 $f(x)=2^x+k\cdot 2^{-x}(x\in R)$

（I）若函数 f(x) 为偶函数，求 k 的值；

（II）当 $k<0$ 时，试判断函数 f(x) 的单调性，并给出证明；

（III）证明：当 k>0 时，$y=f(x)$ 是轴对称图形，且其对称轴方程为 $x=\frac{1}{2}\log_2 k$。

22. （本题满分 12 分）

若函数 f(x) 在定义域内存在 x_0，使得 $f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$ 成立，则称函数 f(x) 具有性质 P，集合 M 是具有性质 P 的函数 f(x) 的全体。

（I）若函数 $f(x)=\lg\frac{a}{x^2+1}\in M$，求实数 a 的取值范围；

（II）若函数 $f(x)=e^x-x^2$，试说明 $f(x)\in M$，并求使得 $f(x)$ 具有性质 P 的 x_0 的个数。

2018 北京市东城区高二（下）期末数学（文）参考答案

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. B　　2. D　　3. A　　4. C　　5. C

6. C　　7. B　　8. A　　9. C　　10. B

11. D　　12. A

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

13. 0　　14. $\pm\sqrt{3}$

15. 1-4+9-16+25-36=-（1+2+3+4+5+6）

1-4+9-16+⋯+（-1）$^{n+1}$n^{2}=（-1）$^{n+1}$（1+2+⋯+n），$n\in N^*$

16. $g(x)=-\dfrac{1}{x}$（答案不唯一）

17. $a\geq\dfrac{1}{2}$

18. $6x-3$　0

注：两个空的填空题第一个空填对得 1 分，第二个空填对得 2 分

三、解答题（本题共 4 小题，共 46 分）

19. 本题满分 10 分

解：（I）由已知得 $f'(x)=-3x^2+2x$，$f'(1)=-1$，故此切线方程为 $y=-x+3$

将 $x=1$ 代入切线方程得 $y=2$

将（1，2）带入 f(x)得 b=2　　　　4 分

（II）令 $f'(x)=-3x^2+2x=0$，解得 x=0，或 $x=\dfrac{2}{3}$　　　　6 分

当 $x<0$ 或 $x>\dfrac{2}{3}$ 时，$f'(x)<0$，f(x)单调递减；当 $0<x<\dfrac{2}{3}$ 时，$f'(x)>0$，f(x)单调递增。

在 $x=\dfrac{2}{3}$ 时，f(x)取得极大值，$f(\dfrac{2}{3})=\dfrac{4}{27}+b$；

又 $f(-\frac{1}{2})=\frac{3}{8}+b$，所以 $f(-\frac{1}{2})>f(\frac{2}{3})$

当 $x\in[-\frac{1}{2},1]$ 上的最大值为 $f(-\frac{1}{2})$，即 $\frac{3}{8}+b=\frac{1}{8}$，解得 $b=-\frac{1}{4}$　　　　10 分

20. 本题满分 12 分

解：（I）由已知 $f(-2)=-f(2)$，$2\in(0,3]$，$f(2)=\frac{2}{3}$

所以 $f(-2)=-\frac{2}{3}$　　　　4 分

（II）单调递增区间为 $(-\infty,-3)$ 和 $(3,+\infty)$　　　　8 分

（III）由 $-\frac{1}{3}x^2+2=0$，且 $0<x\le 3$，解得 $x=\sqrt{6}$

又 f(x) 为奇函数，可得另一个零点为 $x=-\sqrt{6}$

综上：$f(x)$ 的零点为 $\sqrt{6}$ 和 $-\sqrt{6}$　　　　12 分

21. （本题满分 12 分）

解：（I）若 $f(x)$ 为偶函数，则一定有 $f(1)=f(-1)$，即 $2+\frac{k}{2}=\frac{1}{2}+2k$

解得 $k=1$　　　　3 分

（II）因为 $f'(x)=2^x\ln 2-k(\frac{1}{2})^x\ln 2$，$x\in R$

当 k<0 时，$-k(\frac{1}{2})^x>0$，$\ln 2>0$，所以 $f'(x)>0$ 在 R 上恒成立，即 f(x) 在 R 上单调递增　　　　8 分

注：这里还可以利用函数单调性定义证明。

任取 x_1，$x_2\in R$，且 $x_1<x_2$

则 $f(x_2)-f(x_1)=2^{x_2}+\frac{k}{2^{x_2}}-2^{x_1}-\frac{k}{2^{x_1}}=(2^{x_2}-2^{x_1})(1-\frac{k}{2^{x_1+x_2}})$

因为 $x_1<x_2$，所以 $2^{x_2}>2^{x_1}$，$2^{x_2}-2^{x_1}>0$

又 $k<0$，所以 $1-\frac{k}{2^{x_2+x_1}}>0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$

即 f(x) 在 R 上单调递增；

（III）当 $k>0$ 时， $f(x)=2^x+k\cdot 2^{-x}=2^x+\frac{k}{2^x}$

因为 $f(\log_2 k-x)=2^{\log_2 k-x}+k\cdot 2^{(x-\log_2 k)}=\frac{k}{2^x}+k\cdot\frac{2^x}{k}=2^x+\frac{k}{2^x}=f(x)$

所以 $f(\log_2 k-x)=f(x)$ 对任意 x 都成立

故 $y=f(x)$ 是轴对称图形，其对称轴方程为 $x=\frac{1}{2}\log_2 k$ 12 分

22. 本题满分 12 分

解：（I）因为函数 $f(x)=\lg\frac{a}{x^2+1}\in M$，存在 $x_0\in R$，使得

$$\lg\frac{a}{(x_0+1)^2+1}=\lg\frac{a}{x_0^2+1}+\lg\frac{a}{2}$$

即 $(a-2)x_0^2+2ax_0+2(a-1)=0$ 有实根

故当 $a=2$ 时， $x_0=-\frac{1}{2}$ 符合题意；

当 $a\neq 2$ 时，由 $\Delta\geq 0$，得 $a^2-6a+4\leq 0$，得 $3-\sqrt{5}\leq a\leq 3+\sqrt{5}$ 且 $a\neq 2$

综上：实数 a 的取值范围是 $[3-\sqrt{5},3+\sqrt{5}]$ 5 分

（II）函数 $f(x)=e^x-x^2$ 时

$f(x_0+1)-f(x_0)-f(1)=e^{x_0+1}-(x_0+1)^2-e^{x_0}+x_0^2-e+1=e^{x_0}(e-1)-2x_0-e$ 8 分

设 $g(x)=e^x(e-1)-2x-e$， $g'(x)=e^x(e-1)-2$

令 $g'(x)=0$，存在 $t=\ln\frac{2}{e-1}$

当 $x>t$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增；

当 $x<t$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减；

当 $x=t$ 时，$g'(t)=0$，$g(x)$ 取得最小值。

因为 $1<\dfrac{2}{e-1}<e$，所以 $0=\ln\ 1<\ln\dfrac{2}{e-1}<\ln e=1$，所以 $t=\ln\dfrac{2}{e-1}\in(0,1)$

又因为 $g(4)>0$，$g(-2)>0$，$g(t)=2-2\ln\dfrac{2}{e-1}-e<0$

故函数 $f(x)\in M$ 且存在两个 x_0 的值，使得 $f(x)$ 具有性质 P　　　　　　　　12 分