首都师大附中 2020 届高三下学期数学试题（二）

2020-03

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. “三个实数 a,b,c 成等差数列”是“$2b=a+c$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

2. 若 a，b，c 满足 $2^a=3$，$b=\log_2 5$，$3^c=2$. 则（　　）

A．$c<a<b$　　B．$b<c<a$　　C．$a<b<c$　　D．$c<b<a$

3. 已知集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x\mid ax=1\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的所有可能的取值组成的集合为（　　）

A．$\{1,\frac{1}{2}\}$　　B．$\{-1,\frac{1}{2}\}$　　C．$\{0,1,\frac{1}{2}\}$　　D．$\{-1,0,\frac{1}{2}\}$

4. $\cos 31^\circ\cos 1^\circ+\sin 149^\circ\sin 1^\circ=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

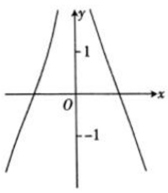
5. 若 $x_1=\frac{\pi}{3}$，$x_2=\pi$ 是函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 两个相邻的极值点，则 ω=（　　）

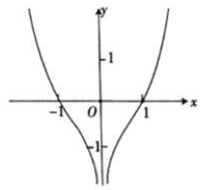
A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．1　　D．2

6. 若 $x>0>y$，则下列各式中一定正确的是（　　）

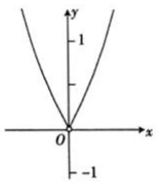
A．$\sin x>\sin y$　　B．$\ln x<\ln(-y)$　　C．$e^x<e^y$　　D．$\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$

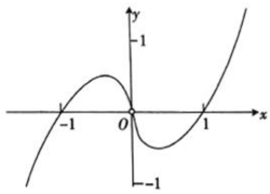
7. 函数 $f(x)=\left(2^x+2^{-x}\right)\ln|x|$ 的图象大致为（　　）

A．

B．

B

C．

D．

8.《九章算术·衰分》中有如下问题:“今有甲持钱五百六十,乙持钱三百五十，丙持钱一百八十，凡三人俱出关，关税百钱.欲以钱数多少衰出之,问各几何?”翻译为“今有甲持钱560,乙持钱350,丙持钱180,甲、乙、丙三个人一起出关，关税共计100钱,要按个人带钱多少的比例交税,问三人各应付多少税?”则下列说法中错误的是（　）

A．甲付的税钱最多　　　　B．乙、丙两人付的税钱超过甲

C．乙应出的税钱约为32　　　　D．丙付的税钱最少

9．已知函数$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le \dfrac{\pi}{4}\\ \cos x, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$，则下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$是周期函数　　　　B．$f(x)$是奇函数

C．$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{4}$对称　　　　D．$f(x)$在$x=\dfrac{5\pi}{2}$处取得最大值

10．下表是某电器销售公司2018年度各类电器营业收入占比和净利润占比统计表：

	空调类	冰箱类	小家电类	其它类
营业收入占比	90.10%	4.98%	3.82%	1.10%
净利润占比	95.80%	－0.48%	3.82%	0.86%

则下列判断错误的是（　　）

A．该公司2018年度冰箱类电器销售亏损

B．该公司2018年度小家电类电器营业收入和净利润相同

C．该公司2018年度净利润主要由空调类电器销售提供

D．剔除冰箱类电器销售数据后，该公司2018年度空调类电器销售净利润占比将会降低

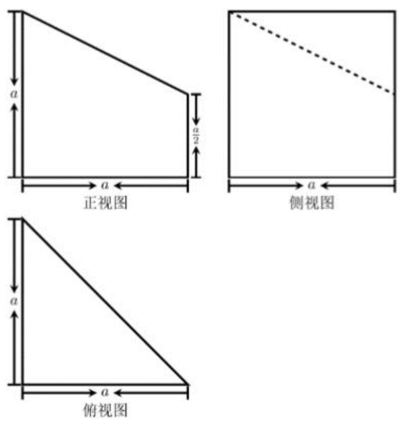
二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．若复数z满足$(2+3\mathrm{i})z=13\mathrm{i}$，则$z=$________.

12. 在$(2+x)^6(1+y)^m$的展开式中，令x^3y的系数为800，则含xy^4项的系数为________.

13．若$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则$|\vec{a}+\vec{b}|$的取值范围是________.

14．　某几何体的三视图如右图所示，若该几何体的体积为$\dfrac{10}{3}$，则棱长为a的正方体的外接球的表面积为________.



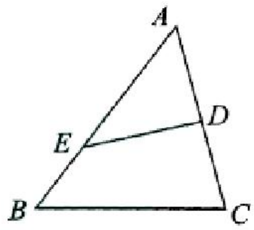
15．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_n=\log_{b_n}c_n(n\geqslant2)$，当$n\ge2$时，$b_n=n$，且点$(b_n,c_n)$是直线$y=x+1$上的点，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________；令$y=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k$，则当$k$在区间$[1,2019]$内时，使$y$的值为正整数的所有$k$值之和为________.

三、解答题：本大题共 6小题，共85分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.（本题 14 分） 如图，已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别是a，b，c，且$a\sin A+(c-a)\sin C=b\sin B$，点$D$是$AC$的中点，$DE\perp AC$，交$AB$于点$E$，且$BC=2$，$DE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

（I）求B；

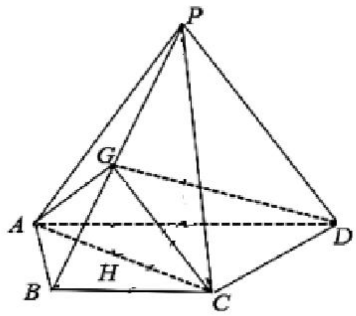
（II）求$\triangle ABC$的面积.



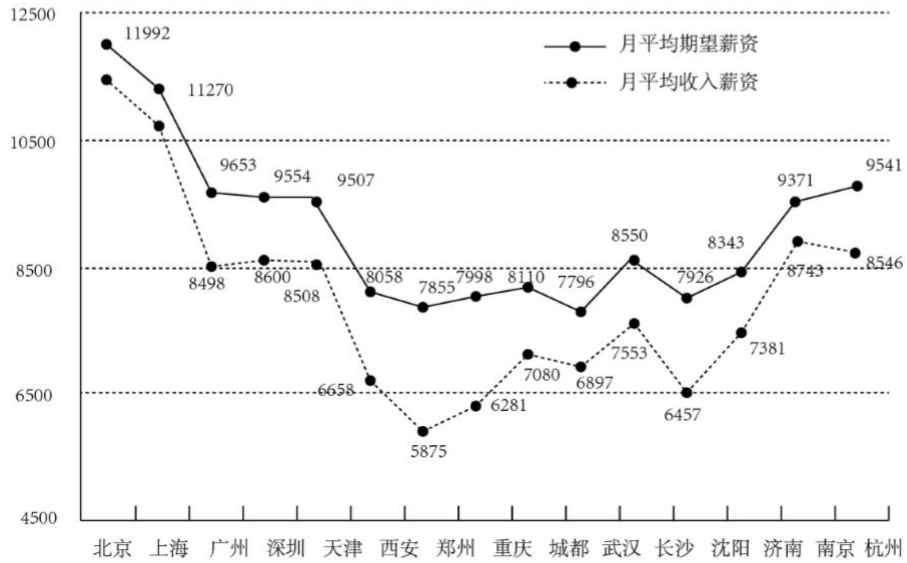
17.（本题 14 分） 已知在四棱锥$P-ABCD$中，$AD//BC$，$AB=BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$，G是PB的中点，ΔPAD是等边三角形，平面$PAD\perp$平面$ABCD$.

（I）求证：$CD\perp$平面GAC；

（II）求二面角$P-AG-C$的余弦值.



18.（本题 14 分） 随着经济全球化、信息化的发展，企业之间的竞争从资源的争夺转向人才的竞争，吸引、留住培养和用好人才成为人力资源管理的战略目标和紧迫任务，在此背景下，某信息网站在 15 个城市中对刚毕业的大学生的月平均收入薪资和月平均期望薪资做了调查，数据如下图所示.



（I）若某大学毕业生从这 15 座城市中随机选择一座城市就业，求该生选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市的概率；

（II）现有 2 名大学毕业生在这 15 座城市中各随机选择一座城市就业，且 2 人的选择相互独立，记 X 为选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市的人数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（III）记图中月平均收入薪资对应数据的方差为 S_1^2，月平均期望薪资对应数据的方差为 S_2^2，判断 S_1^2 与 S_2^2 的大小（只需写出结论）

19.（本题 14 分） 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 过点 $P(2,1)$.

（I）求椭圆 C 的方程，并求其离心率；

（II）过点 P 作 x 轴的垂线 l，设点 A 为第四象限内一点且在椭圆 C 上（点 A 不在直线 l 上），点 A 关于 l 的对称点为 A'，直线 $A'P$ 与 C 交于另一点 B．设 O 为原点，判断直线 AB 与直线 OP 的位置关系，并说明理由.

20.（本题 15 分） 已知函数 $f(x)=x^2-ax+2\ln x\ (a\in\mathbf{R})$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）若 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$，当 $a\ge 2\sqrt{e}+\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ 时，求 $f(x_2)-f(x_1)$ 的最大值.

21.（本题共 14 分） 设 $n\in N^*$ 且 $n\geqslant 2$，集合 $S_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,|x_1|=1,|x_{i+1}|=2|x_i|\,(i=1,2,\cdots,n-1)\right\}$

（I）写出集合 S_2 中的所有元素；

（II）设（a_1，a_2，…，a_n），（b_1，b_2，…，b_n）$\in S_n$，证明“$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$”的充要条件是 $a_i=b_i$（i=1，2，3，…，n）；

（III）设集合 $T_n=\{\sum_{i=1}^{n}x_i\mid$ （x_1，x_2，…，x_n）$\in S_n$｝，求 T_n 中所有正数之和.

2020届首都师范大学附属中学高三数学大练习

1．“三个实数a,b,c成等差数列”是“$2b=a+c$”的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　　　D．既不充分也不必要条件

【答案】C

2．若a，b，c满足$2^a=3$，$b=\log_2 5$，$3^c=2$．则（　　）

A．$c<a<b$　　　B．$b<c<a$　　　C．$a<b<c$　　　D．$c<b<a$

【答案】A

【解析】利用指数函数和对数函数的单调性即可比较大小.

Q $2^a=3$，$2^1<3<2^2$，$\therefore 1<a<2$，Q $b=\log_2 5>\log_2 4$，$\therefore b>2$，Q $3^c=2$，$3^0<2<3^1$，$\therefore$ $0<c<1$，$\therefore c<a<b$，

故选：A.

【点睛】本题考查了指数函数和对数函数的单调性，考查了计算能力和推理能力，属于基础题.

3．已知集合$A=\{-1,2\}$，$B=\{x\,|\,ax=1\}$，若$B\subseteq A$，则由实数a的所有可能的取值组成的集合为（　　）

A．$\{1,\frac{1}{2}\}$　　　B．$\{-1,\frac{1}{2}\}$　　　C．$\{0,1,\frac{1}{2}\}$　　　D．$\{-1,0,\frac{1}{2}\}$

【答案】D

【解析】分B为空集和B不为空集两种情况讨论，分别求出a的范围，即可得出结果.

因为集合$A=\{-1,2\}$，$B=\{x\,|\,ax=1\}$，$B\subseteq A$，

若B为空集，则方程$ax=1$无解，解得$a=0$；

若B不为空集，则$a\neq 0$；由$ax=1$解得$x=\frac{1}{a}$，所以$\frac{1}{a}=-1$或$\frac{1}{a}=2$，解得$a=-1$或$a=\frac{1}{2}$，

综上，由实数a的所有可能的取值组成的集合为$\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$.

故选D

【点睛】本题主要考查由集合间的关系求参数的问题，熟记集合间的关系即可，属于基础题型.

4．$\cos 31^\circ\cos 1^\circ+\sin 149^\circ\sin 1^\circ=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　**B．**$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　**C．**$-\frac{1}{2}$　　　**D．**$\frac{1}{2}$

【答案】B

【详解】$\cos 31^\circ\cos 1^\circ+\sin 149^\circ\sin 1^\circ=\cos 31^\circ\cos 1^\circ+\sin 31^\circ\sin 1^\circ=\cos\left(31^\circ-1^\circ\right)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故选B

【点睛】本题主要考查了两三家函数的诱导公式，以及两角和的余弦公式的应用，其中解答中年熟记两角和的余弦公式，准确运算是解答的关键，着重考查了推理与运算能力，属于基础题．

5．若$x_1=\frac{\pi}{3}$，$x_2=\pi$是函数$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$两个相邻的极值点，则$\omega=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{3}{2}$　　　　C. 1　　　　D. 2

【答案】B

【解析】由条件得函数的周期为$T=\frac{4\pi}{3}$，由此求出ω.

【详解】由$x_1=\frac{\pi}{3}$，$x_2=\pi$是函数f（x）$=sin\omega x$（ω>0）两个相邻的极值点

所以函数$f(x)$的周期为$T=2\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\pi}{3}$. 又函数$f(x)$的周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi}{3}$，解得：$\omega=\frac{3}{2}$

故选：B

【点睛】本题考查三角函数周期和利用周期求参数的值，是基础题.

6. 若$x>0>y$，则下列各式中一定正确的是（　　）

A. $\sin x>\sin y$　　　　B. $\ln x<\ln(-y)$　　　　C. $e^x<e^y$　　　　D. $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$

【答案】D

【解析】举反例否定A,B,C，根据不等式性质证明D成立.

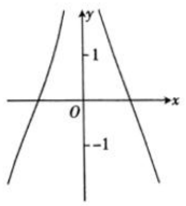
【详解】$\because \sin\pi=\sin-\pi$，$\ln1=\ln[--1]$，$e^1>e^{-1}$，$\therefore$A, B, C 不正确，

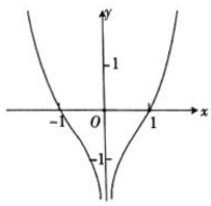
$\because$x>0，$\therefore\frac{1}{x}$>0，$\because$y<0，$\therefore\frac{1}{y}$<0，$\therefore\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$.

故选：D.

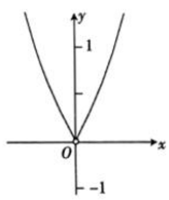
【点睛】本题考查比较大小，考查基本分析判断能力，属基本题.

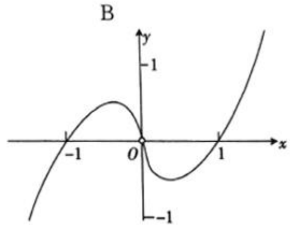
7. 函数$f(x)=\left(2^x+2^{-x}\right)\ln|x|$的图象大致为（　　）

A.


B.


B

C.


D.


【答案】B

【解析】根据函数奇偶性的判断可知函数为偶函数，图象关于y轴对称，排除D；根据$x\in(0,1)$时，

【解析】根据函数奇偶性的判断可知函数为偶函数，图象关于y轴对称，排除D；根据$x\in(0,1)$时，$f(x)<0$，排除A,C，从而得到正确选项.

【详解】∵ $f(x)$定义域为$\{x|x\neq 0\}$，且$f(-x)=\left(2^{-x}+2^{x}\right)\ln|-x|=\left(2^{x}+2^{-x}\right)\ln|x|=f(x)$

$\therefore f(x)$为偶函数，关于y轴对称，排除D；

当$x\in(0,1)$时，$2^{x}+2^{-x}>0$，$\ln|x|<0$，可知$f(x)<0$，排除A,C.

本题正确选项：B

【点睛】本题考查函数图象的辨析，关键是能够通过函数的奇偶性、特殊值的符号来进行排除.

8.《九章算术·衰分》中有如下问题："今有甲持钱五百六十，乙持钱三百五十，丙持钱一百八十，凡三人俱出关，关税百钱. 欲以钱数多少衰出之,问各几何?" 翻译为"今有甲持钱560,乙持钱350,丙持钱180,甲、乙、丙三个人一起出关，关税共计100钱,要按个人带钱多少的比例交税,问三人各应付多少税?" 则下列说法中错误的是（   ）

A. 甲付的税钱最多　　　　B. 乙、丙两人付的税钱超过甲

C. 乙应出的税钱约为32　　　　D. 丙付的税钱最少

【答案】B

【解析】通过阅读可以知道A,D说法的正确性,通过计算可以知道B,C说法的正确性.

【详解】甲付的税钱最多、丙付的税钱最少，可知A,D正确:乙、丙两人付的税钱占总税钱的$\frac{35}{100}<\frac{1}{2}$不超过甲。可知$B$错误:乙应出的税钱为$100\times\frac{350}{560+350+180}\approx 32$. 可知$C$正确.

故选:B

【点睛】本题考查了数学阅读能力,考查数学运算能力.属于基础题.

【点睛】本题考查了数学阅读能力,考查数学运算能力.属于基础题.

9．已知函数$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le\frac{\pi}{4}\\ \cos x, & x>\frac{\pi}{4}\end{cases}$，则下列结论正确的是（   ）

A．$f(x)$是周期函数　　　　B．$f(x)$是奇函数

C．$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称　　　　D．$f(x)$在$x=\frac{5\pi}{2}$处取得最大值

【答案】C

【详解】作出函数$f(x)$的图象如图：则由图象知函数$f(x)$不是周期函数，故A不正确；

不是奇函数，故B错误，

若$x>0$，$f(\frac{\pi}{4}+x)=\cos(\frac{\pi}{4}+x)=\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$，

$f(\frac{\pi}{4}-x)=\sin(\frac{\pi}{4}-x)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$，此时$f(\frac{\pi}{4}+x)=f(\frac{\pi}{4}-x)$，

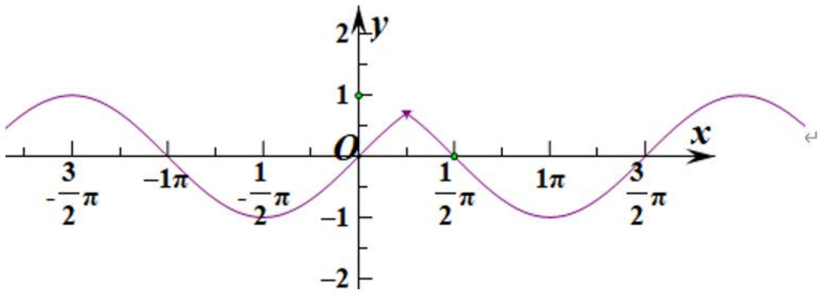
若$x\le 0$，$f(\frac{\pi}{4}+x)=\sin(\frac{\pi}{4}+x)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$，

$f(\frac{\pi}{4}-x)=\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$，此时$f(\frac{\pi}{4}+x)=f(\frac{\pi}{4}-x)$，

综上恒有$f(\frac{\pi}{4}+x)=f(\frac{\pi}{4}-x)$，即图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称，故$C$正确，

$f(x)$在$x=\frac{5\pi}{2}$处$f(x)=f(\frac{5\pi}{2})=\cos\frac{5\pi}{2}=0$不是最大值，故$D$错误，

故选：AC．



【点睛】

本题主要考查与三角函数有关的命题的真假判断，涉及函数周期性、奇偶性对称性以及最值性的性质，利用定义法结合数形结合是解决本题的关键．

10．下表是某电器销售公司 2018 年度各类电器营业收入占比和净利润占比统计表：

	空调类	冰箱类	小家电类	其它类
营业收入占比	90.10%	4.98%	3.82%	1.10%
净利润占比	95.80%	﹣0.48%	3.82%	0.86%

则下列判断错误的是正确的是（）

A．该公司 2018 年度冰箱类电器销售亏损

B．该公司 2018 年度小家电类电器营业收入和净利润相同

C．该公司 2018 年度净利润主要由空调类电器销售提供

D．剔除冰箱类电器销售数据后，该公司 2018 年度空调类电器销售净利润占比将会降低

【答案】B

【解】根据表中数据知，该公司 2018 年度冰箱类电器销售净利润所占比为﹣0.48，是亏损的，A 正确；

小家电类电器营业收入所占比和净利润所占比是相同的，但收入与净利润不一定相同，B 错误；

该公司 2018 年度净利润空调类电器销售所占比为 95.80%，是主要利润来源，C 正确；

所以剔除冰箱类电器销售数据后，该公司 2018 年度空调类电器销售净利润占比将会降低，D 正确．

故选：B．

【点睛】

本题考查了数据分析与统计知识的应用问题，考查了读表与分析能力，是基础题．

二、填空题

11．若复数 z 满足 $(2+3\mathrm{i})z=13\mathrm{i}$，则 $z=$________． $3+2\mathrm{i}$

【详解】因为 $(2+3\mathrm{i})z=13\mathrm{i}$，所以 $z=\dfrac{13\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\dfrac{13\mathrm{i}(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}=\dfrac{26\mathrm{i}+39}{4+9}=3+2\mathrm{i}$.

12. 在 $(2+x)^6(1+y)^m$ 的展开式中，令 x^3y 的系数为 800，则含 xy^4 项的系数为（　　）960

【**解析**】根据二项式的展开式，得到 x^3 和 y 的系数，从而得到关于 m 的方程，解出 m 的值，再得到 x 和 y^4 的系数，从而得到答案.

$(2+x)^6$ 展开式中 x^3 的系数为 $C_6^3\times2^3$，$(1+y)^m$ 展开式中 y 的系数为 C_m^1，所以 x^3y 的系数为 $C_6^3\times2^3\times C_m^1$

所以 $C_6^3\times2^3\times C_m^1=800$，即 $160m=800$，解得 $m=5$，所以 $(2+x)^6$ 展开式中 x 的系数为 $C_6^1\times2^5$，

$(1+y)^5$ 展开式中 y^4 的系数为 C_5^4，所以含 xy^4 项的系数为 $C_6^1\times2^5\times C_5^4=6\times32\times5=960$

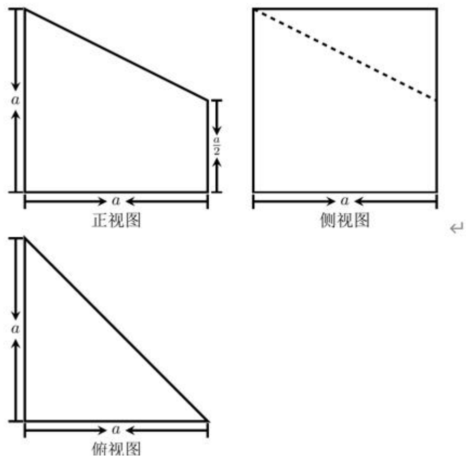
13．若 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 的取值范围是________．　　　　$[1,3]$

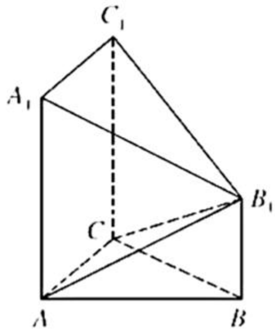
【详解】设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，因为 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=5+4\cos\theta\in[1,9]$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}\in[1,3]$．

14．某几何体的三视图如图所示，若该几何体的体积为 $\dfrac{10}{3}$，则棱长为 a 的正方体的外接球的表面积为____

12π





【分析】根据三视图还原几何体，则该几何体的体积等于一个三棱锥和一个四棱锥的体积和，从而得到 a 的值，然后得到棱长为 a 的正方体的外接球的半径，从而得到答案．

【详解】由题意可知该几何体的直观图如图所示，

则该几何体的体积 $V=V_{B_1-ABC}+V_{B_1-ACC_1A_1}=\dfrac{5}{12}a^3=\dfrac{10}{3}$，解得 $a=2$，

则正方体的棱长为 2，

则其外接球的直径 $2r=\sqrt{3\times2^2}=2\sqrt{3}$，所以棱长为 2 的正方体外接球的表面积 $S=4\pi r^2=4\pi\times(\sqrt{3})^2=12\pi$，

【点睛】本题考查三视图还原几何体，正方体外接球表面积的计算，属于中档题．

15．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_n=\log_{b_n}c_n(n\geq 2)$，当 $n\geq2$ 时，$b_n=n$，且点 (b_n,c_n) 是直线 $y=x+1$ 上的点，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为________；令 $y=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_k$，则当 k 在区间 $[1,2019]$ 内时，使 y 的值为正整数的所有 k 值之和为________．

【答案】 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ \log_n(n+1), & n\geq 2\end{cases}$　　2036

【解析】

【分析】当 $n\geq2$ 时，得到 c_n 的通项，从而得到 a_n，结合 $a_1=1$，得到 a_n 的通项公式，表示出 y，利用对数的换底公式，得到 y 的解析式，$\log_2(k+1)=n$，得到 $k=2^n-1$，根据 $k\in[1,2019]$，得到 n 的范围，从而得到满足要求的 k 值之和，得到答案．

【详解】

因为当 $n\ge 2$ 时，$b_n=n$，且点 (b_n,c_n) 是直线 $y=x+1$ 上的点，

所以当 $n\ge 2$ 时，有 $a_n=\log_n(n+1)(n\geq 2)$，所以 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ \log_n(n+1), & n\geq 2,\end{cases}$

所以 $y=1\times\log_2 3\times\log_3 4\times\cdots\times\log_k(k+1)=1\times\dfrac{\lg 3}{\lg 2}\times\dfrac{\lg 4}{\lg 3}\times\cdots\times\dfrac{\log(k+1)}{\lg k}=\dfrac{\lg(k+1)}{\lg 2}=\log_2(k+1)$，

令 $\log_2(k+1)=n$ 得 $k+1=2^n$，所以 $k=2^n-1$，

所以当 k 在 $[1,2019]$ 内时，即 $1\le 2^n-1\le 2019$，得 $1\le n\le 10, n\in\mathbf{N}^*$

所以使 y 的值为正整数的所有 k 值之和为

$$\left(2^1-1\right)+\left(2^2-1\right)+\cdots+\left(2^{10}-1\right)=\left(2^1+2^2+\cdots+2^{10}\right)-10=\frac{2\left(1-2^{10}\right)}{1-2}-10=2036.$$

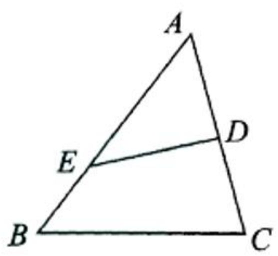
故答案为: $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ \log_n(n+1), & n\geq 2\end{cases}$;2036

【点睛】

本题考查求数列的通项，分组求和，求等比数列前 n 项和，属于中档题

三、解答题

16.（本题 14 分） 如图，已知 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且 $a\sin A+(c-a)\sin C=b\sin B$，点 D 是 AC 的中点，$DE\perp AC$，交 AB 于点 E，且 $BC=2$，$DE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



（1）求 B；

（2）求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) $B=60^\circ$ (2) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

【分析】

（1）通过正弦定理实现边角转化，再应用余弦定理，可求出 B。

（2）根据已知条件可以确定 $AE=CE$，并求出它们的表达式，在 $\triangle BCE$ 中，运用外角与内角的关系、正弦定理，可求出 A，BE 的大小，最后求出面积。

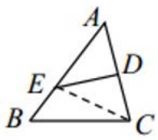
【详解】

解（1）$\because a\sin A+(c-a)\sin C=b\sin B$，由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得 $a^2+c^2-ac=b^2$，（3 分）

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，（5 分）

$Q\,0<B<\pi$，$\therefore B=60^{\circ}$；（7 分）

（2）连接 CE，如下图：



D 是 AC 的中点，$DE\perp AC$，$\therefore AE=CE$，

$\therefore CE=AE=\dfrac{DE}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sin A}$，（8 分）

在 $VBCE$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{CE}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin\angle BEC}=\dfrac{BC}{\sin 2A}$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{6}}{2\sin A\sin 60^{\circ}}=\dfrac{2}{2\sin A\cos A}$，$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，（9 分）

$Q\,0<A<\pi$，$\therefore A=45^{\circ}$，（10 分）

$\therefore \angle ACB=75^{\circ}$，$\therefore \angle BCE=\angle ACB-\angle ACE=30^{\circ}$，$\angle BEC=90^{\circ}$，

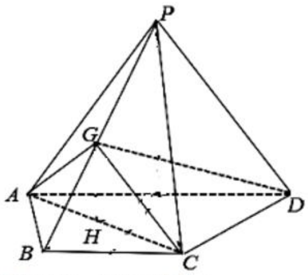
$\therefore CE=AE=\sqrt{3}$，$AB=AE+BE=\sqrt{3}+1$，（12 分）

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CE=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ （14 分）

17.（本题 14 分）已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD//BC$，$AB=BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$，G 是 PB 的中点，ΔPAD 是等边三角形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.

（1）求证：$CD\perp$ 平面 GAC；

（2）求二面角 $P-AG-C$ 的余弦值.



【答案】（1）见解析（2）$-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

【解】

（1）证明：取 AD 的中点为 O，连结 OP，OC，OB，设 OB 交 AC 于 H，连结 GH.

因为 $AD//BC$，$AB=BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$，四边形 $ABCO$ 与四边形 $OBCD$ 均为菱形，（1 分）

$\therefore OB\perp AC$，$OB//CD$，$CD\perp AC$，因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形，O 为 AD 中点，

$\therefore PO\perp AD$，因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAD\,\mathrm{I}$ 平面 $ABCD=AD$.

$PO\subset$ 平面 PAD 且 $PO\perp AD$，$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$（3 分）

因为 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PO\perp CD$，（4 分）

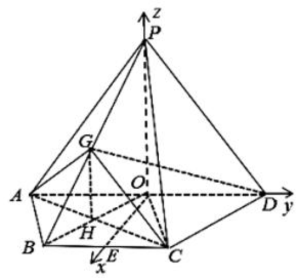
因为 H，G 分别为 OB，PB 的中点，$\therefore GH//PO$，$\therefore GH\perp CD$.（5 分）

又因为 $GH\,\mathrm{I}\,AC=H$，$AC,GH\,\grave{\mathrm{I}}$ 平面 GAC，\ $CD\,\hat{}$ 平面 GAC.（6 分）

（2）取 BC 的中点为 E，以 O 为空间坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

设 $AD=4$，则 $P\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，$A(0,-2,0)$，$C\left(\sqrt{3},1,0\right)$，

$D(0,2,0)$，$G\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$



$\overrightarrow{AP}=(0,2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AG}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{3})$，

设平面 PAG 的一法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$．

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\sqrt{3}z\\ x=z\end{cases}$．令 $z=1$，

则 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},1)$．（10 分）

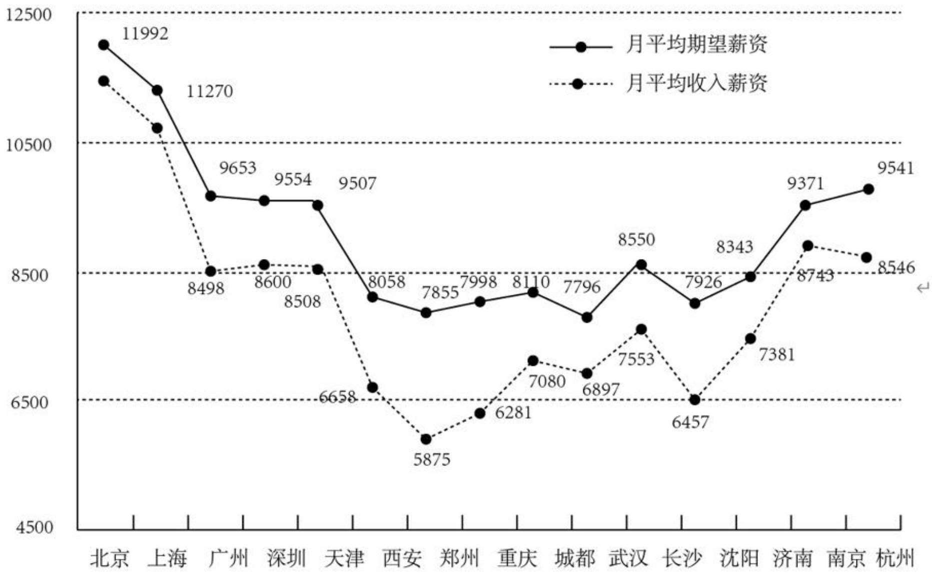
由（1）可知，平面 AGC 的一个法向量 $\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},1,0)$，　（11 分）

$\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{CD}\right\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\vec{n}||\overrightarrow{CD}|}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$（13 分）

∴由题，二面角 $P-AG-C$ 为钝二面角，所以余弦值为 $-\frac{\sqrt{15}}{5}$．（14 分）

【点睛】本题主要考查空间线面位置关系的证明，考查二面角的计算，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平和计算能力.

18.（本题 14 分）随着经济全球化、信息化的发展，企业之间的竞争从资源的争夺转向人才的竞争，吸引、留住培养和用好人才成为人力资源管理的战略目标和紧迫任务，在此背景下，某信息网站在 15 个城市中对刚毕业的大学生的月平均收入薪资和月平均期望薪资做了调查，数据如下图所示.



（1）若某大学毕业生从这 15 座城市中随机选择一座城市就业，求该生选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市的概率．

（2）现有 2 名大学毕业生在这 15 座城市中各随机选择一座城市就业，且 2 人的选择相互独立，记 X 为选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市的人数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（3）记图中月平均收入薪资对应数据的方差为 S_1^2，月平均期望薪资对应数据的方差为 S_2^2，判断 S_1^2 与 S_2^2 的大小（只需写出结论）

【答案】（1）$\frac{2}{5}$；（2）分布列见解析，$E(X)=\frac{4}{5}$；（3）$S_1^2>S_2{}^2$

【解析】

（1）根据图表知：月平均收入薪资高于 8500 元的城市有 6 座，故 $p=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$ ；（3 分）

（2）X 的可能取值为 $0,1,2$，

则 $p(\xi=0)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$；$p(\xi=1)=C_2^1\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$；$p(\xi=2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$（9 分）

分布列为：（10 分）

ξ	0	1	2
p	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X)=\frac{9}{25}\times0+\frac{12}{25}\times1+\frac{4}{25}\times2=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$ （12 分）

（3）根据图像知月平均收入薪资对应数据波动更大，故 $S_1^2>S_2{}^2$（14 分）

【点睛】本题考查了概率的计算，分布列，数学期望，方差，意在考查学生的综合应用能力.

19.（本题 14 分） 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ 过点 $P(2,1)$．

（1）求椭圆 C 的方程，并求其离心率；

（2）过点 P 作 x 轴的垂线 l，设点 A 为第四象限内一点且在椭圆 C 上（点 A 不在直线 l 上），点 A 关于 l 的对称点为 A'，直线 $A'P$ 与 C 交于另一点 B．设 O 为原点，判断直线 AB 与直线 OP 的位置关系，并说明理由．

【答案】（1）椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$（2）直线 AB 与直线 OP 平行，理由见解析．

【解析】

（1）将 P 点代入椭圆方程，可得 a 的值，结合离心率的公式可得离心率的值；

（2）设直线 $PA:y-1=k(x-2)$，$PB:y-1=-k(x-2)$，设点 A 的坐标为 (x_1,y_1)，$B(x_2,y_2)$，分别

求出 x_1-x_2，y_1-y_2，根据斜率公式以及两直线的位置关系与斜率的关系可得答案.

【详解】

解：（1）由椭圆方程椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 过点 $P(2,1)$，可得 $a^2=8$，（1 分）

$\therefore c^2=a^2-2=8-2=6$，（3 分）

$\therefore$椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．（5 分）

（2）直线 AB 与直线 OP 平行．（6 分）

证明如下：

设直线 $PA:y-1=k(x-2)$，$PB:y-1=-k(x-2)$，（7 分）

设点 A 的坐标为 (x_1,y_1)，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=kx-2k+1\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8k(1-2k)x+16k^2-16k-4=0$，$\therefore 2+x_1=\dfrac{8k(2k-1)}{4k^2+1}$，（9 分）

$\therefore x_1=\dfrac{8k^2-8k-2}{1+4k^2}$，同理 $x_2=\dfrac{8k^2+8k-2}{4k^2+1}$，$\therefore x_1-x_2=-\dfrac{16k}{4k^2+1}$，（11 分）

由 $y_1=kx_1-2k+1$，$y_2=-kx_2+2k+1$，有 $y_1-y_2=k(x_1+x_2)-4k=-\dfrac{8k}{4k^2+1}$，（12 分）

$\because A$ 在第四象限，$\therefore k\neq 0$，且 A 不在直线 OP 上．$\therefore k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{2}$，（13 分）

又 $k_{OP}=\dfrac{1}{2}$，故 $k_{AB}=k_{OP}$，$\therefore$直线 AB 与直线 OP 平行．（14 分）

【点睛】

本题考查椭圆的简单性质，直线与椭圆位置关系的应用及斜率与直线平行的关系，是中档题.

20.（本题 15 分）已知函数 $f(x)=x^2-ax+2\ln x\ (a\in\mathbf{R})$．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$，当 $a\geq 2\sqrt{e}+\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ 时，求 $f(x_2)-f(x_1)$ 的最大值.

【解】

（1）由 $f(x)=x^2-ax+2\ln x$ 得 $f'(x)=2x-a+\dfrac{2}{x}$；（2 分）

因为 $x>0$，所以 $2x+\dfrac{2}{x}\geq 4$；（3 分）

当 $a \le 4$ 时，$f'(x)=2x-a+\dfrac{2}{x}\ge 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；（5 分）

当 $a>4$ 时，由 $f'(x)=2x-a+\dfrac{2}{x}>0$ 解得 $x>\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$ 或 $0<x<\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}$；

由 $f'(x)=2x-a+\dfrac{2}{x}<0$ 解得 $\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}<x<\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$；

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$，$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4},+\infty\right)$ 上单增；在 $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4},\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$ 上单减；

（8 分）

综上，当 $a\le 4$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>4$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$，$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4},+\infty\right)$ 上单增，在 $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4},\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$

上单减；

（2）若 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$，由（1）知 x_1,x_2 是方程 $2x^2-ax+2=0$ 的两不等实根，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{a}{2}$，$x_1x_2=1$，（10 分）

$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=(x_2{}^2-ax_2+2\ln x_2)-(x_1{}^2-ax_1+2\ln x_1)$

$$=x_2{}^2-x_1{}^2+2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2\ln\frac{x_2}{x_1}=x_1{}^2-x_2{}^2+2\ln\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{x_2{}^2}-x_2{}^2+2\ln x_2{}^2$$，（11 分）

令 $t=x_2{}^2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{x_2{}^2}-x_2{}^2+2\ln x_2{}^2=\dfrac{1}{t}-t+2\ln t$；

由（1）可知 $x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$，当 $a\ge 2\sqrt{e}+\dfrac{2}{\sqrt{e}}$ 时，

$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}\ge\dfrac{2\sqrt{e}+\dfrac{2}{\sqrt{e}}+\sqrt{4e+8+\dfrac{4}{e}-16}}{4}=\sqrt{e}$，所以 $t=x_2{}^2\in\left[e,+\infty\right)$，（12 分）

令 $g(t)=\dfrac{1}{t}-t+2\ln t$，$t\in\left[e,+\infty\right)$，

则 $g'(t)=-\dfrac{1}{t^2}-1+\dfrac{2}{t}=-\dfrac{t^2-2t+1}{t^2}=-\dfrac{(t-1)^2}{t^2}<0$ 在 $t\in\left[e,+\infty\right)$ 上恒成立；（13 分）

所以 $g(t)=\dfrac{1}{t}-t+2\ln t$ 在 $t\in\left[e,+\infty\right)$ 上单调递减，（14 分）

故 $g(t)_{\max}=g(e)=\dfrac{1}{e}-e+2$，即 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{e}-e+2$.（15 分）

【点睛】本题主要考查导数的应用，通常需要对函数求导，根据导数的方法研究函数单调性、极值、最值等，属于常考题型.

21.（本题共 14 分）设 $n\in N^*$ 且 $n\geqslant 2$，集合 $S_n=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots x_n\right)\middle|\left|x_1\right|=1,\left|x_{i+1}\right|=2\left|x_i\right|(i=1,2,\cdots,n-1)\right\}$

（1）写出集合 S_2 中的所有元素；

（2）设（a_1，a_2，$\cdots$，a_n），（b_1，b_2，$\cdots$，b_n）$\in S_n$，证明“$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$”的充要条件是 $a_i=b_i$（i=1， 2，3，…，n)；

（3）设集合 $T_n=\{\sum_{i=1}^{n}x_i|$ （x_1，x_2，…，x_n）$\in S_n\}$，求 T_n 中所有正数之和.

【答案】（1）$(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2)$；（2）证明见解析；（3）$4^{n-1}$

【解析】

（1）直接列出所有情况得到答案.

（2）分别证明充分性和必要性，假设存在 j 使 $a_j\neq b_j$，则 $a_j=-b_j$，不妨设 $a_j<0,b_j>0$

得到 $\sum_{i=1}^{j}a_i<0,\sum_{i=1}^{j}b_i>0$，矛盾，得到证明.

（3）$\sum_{i=1}^{n}x_i>0$ 当且仅当 $x_n>0$，数列 T_n 中所有正数有 2^{n-1} 个，再计算和得到答案.

【详解】

（1）$S_2=\{(x_1,x_2)\,\|x_1|=1,|x_2|=2|x_1|\}$，所以元素为 $(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2)$ （4 分）

（2）当 $a_i=b_i$ 时，易知 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$ 成立，充分性；（5 分）

当 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$ 时，数列 $\{|x_n|\}$ 是首项为1，公比为2的等比数列，故 $|x_n|=2^{n-1}$，（6 分）

假设存在 j 使 $a_j\neq b_j$，则 $a_j=-b_j$，不妨设 $a_j<0,b_j>0$

则 $|a_1|=|b_1|=1,\sum_{i=1}^{j-1}x_i,,\sum_{i=1}^{j-1}|x_i|=\frac{1-2^{j-1}}{1-2}=2^{j-1}-1<|x_j|=2^{j-1}$

故 $\sum_{i=1}^{j}a_i<0,\sum_{i=1}^{j}b_i>0$，这与 $\sum_{i=1}^{j}a_i=\sum_{i=1}^{j}b_i$ 矛盾，故 $a_j=b_j$，必要性；

综上所述：$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$ 的充要条件是 $a_i=b_i$ （9 分）

（3）$\sum_{i=1}^{n-1}x_i,,\sum_{i=1}^{n-1}|x_i|=\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}-1<|x_n|=2^{n-1}$，故 $\sum_{i=1}^{n}x_i>0$ 当且仅当 $x_n>0$

数列 T_n 中所有正数有 2^{n-1} 个，所有正数之和为 $2^{n-1}\cdot 2^{n-1}=4^{n-1}$ （5 分）

【点睛】本题考查了求元素，充分必要条件的证明，数列求和，意在考查学生的综合应用能力.