

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

8. 若指数函数 $f(x) = a^x$ 的图像与射线 $3x - y + 5 = 0$ ($x \geq -1$) 相交, 则 ()

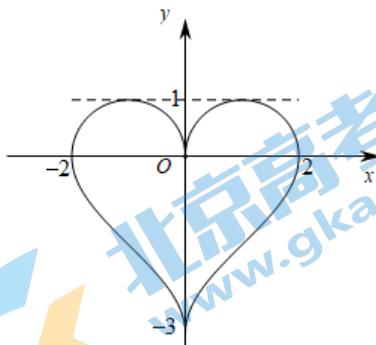
A. $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

B. $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$

C. $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

D. $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$

9. 如下图, 一个“心形”由两个函数的图像构成, 则“心形”上部分的函数解析式可能为 ()



A. $y = |x| \sqrt{4 - x^2}$

B. $y = x \sqrt{4 - x^2}$

C. $y = \sqrt{-x^2 + 2|x|}$

D. $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$

10. 设集合 A 的最大元素为 M , 最小元素为 m , 记 A 的特征值为 $X_A = M - m$, 若集合中只有一个元素, 规定其特征值为 0. 已知 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 是集合 N^* 的元素个数均不相同的非空真子集, 且

规定其特征值为 0. 已知 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 是集合 N^* 的元素个数均不相同的非空真子集, 且

$X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = 62$, 则 n 的最大值为 ()

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

第II卷 (非选择题共 110 分)

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 函数 $f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x-1}$ 的定义域为_____.

12. 求值: $4^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - (\pi-3)^0 =$ _____.

13. 当 $x > 3$ 时, 则 $y = x + \frac{4}{x-3}$ 的最小值为_____, 当 y 取得最小值时 x 的值为_____.

14. 写出一个使得命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 - 2ax + 3 > 0$ 恒成立” 是假命题的实数 a 的值_____. (写出一个 a 的值即可)

15. 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, 给出下列四个结论:

① $f(0) = 1$ 或 -1 ;

② $f(x)$ 一定不是偶函数;

③若 $f(x) > 0$ ，且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

④若 $f(x)$ 有最大值，则 $f(x)$ 一定有最小值。

其中，所有正确结论的序号是_____。

三、解答题：本题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$ ， $B = \{x | m-1 < x < 2m-3\}$ 。

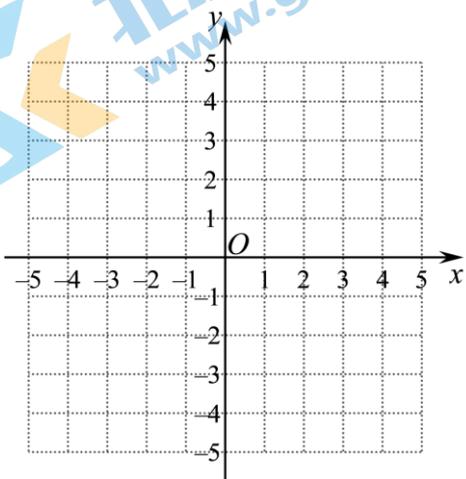
(1) 若 $m = 4$ ，求 $\complement_{\mathbb{R}} A$ ， $A \cap B$ ， $A \cup B$ ；

(2) 若 $B \subseteq A$ ，求实数 m 的取值范围。

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}$ 。

(1) 求 $f(f(-\frac{1}{2}))$ 的值；

(2) 画出函数 $f(x)$ 的图象，根据图象写出函数 $f(x)$ 的单调区间；



(3) 若 $f(x) \leq 8$ ，求 x 的取值范围。

18. 已知函数 $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ 。

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论；

(2) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上的单调性，并用单调性定义证明；

(3) 已知函数 $g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ 5, & x = 0, \\ -f(x), & x < 0, \end{cases}$ 当 $x \in [-\frac{1}{4}, t]$ 时， $g(x)$ 的值域为 $[5, +\infty)$ ，求实数 t 的取值范围。（只

需写出答案）

19. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (3a+1)x + 3$ ， $a \in \mathbb{R}$ 。

(1) 若 $f(x) < 0$ 的解集是 $\{x | 1 < x < k\}$ ，求函数 $f(x)$ 的零点；

(2) 求不等式 $f(x) > 0$ 的解集。

20. 因新冠肺炎疫情影响，呼吸机成为紧缺商品，某呼吸机生产企业为了提高产品的产量，投入90万元安装了一台新设备，并立即进行生产，预计使用该设备前 $n(n \in \mathbb{N}_+)$ 年的材料费、维修费、人工工资等共为

$(\frac{5}{2}n^2 + 5n)$ 万元，每年的销售收入55万元. 设使用该设备前 n 年的总盈利额为 $f(n)$ 万元.

(1) 写出 $f(n)$ 关于 n 的函数关系式，并估计该设备从第几年开始盈利；

(2) 使用若干年后，对该设备处理的方案有两种：案一：当总盈利额达到最大值时，该设备以10万元的价格处理；方案二：当年平均盈利额达到最大值时，该设备以50万元的价格处理；问哪种方案处理较为合理？并说明理由.

21. 对于函数 $f(x)$ ，若 $f(x_0) = x_0$ ，则称 x_0 为 $f(x)$ 的“不动点”；若 $f[f(x_0)] = x_0$ ，则称 x_0 为 $f(x)$

的“稳定点”. 函数 $f(x)$ 的“不动点”和“稳定点”的集合分别记为 A 和 B ，即 $A = \{x | f(x) = x\}$ ，

$B = \{x | f[f(x)] = x\}$.

(1) 设函数 $f(x) = 3x + 4$ ，求集合 A 和 B ；

(2) 求证： $A \subseteq B$ ；

(3) 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，且 $A = \emptyset$ ，求证： $B = \emptyset$.

参考答案

一、选择题：本部分共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，选出最符合题意的一项.

1. 【答案】A

【分析】根据元素与集合的关系即可求解.

【详解】因为 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x < 3\}$ ，所以 $3 \notin A, 0 \in A$ ，而 \emptyset 是集合，与 A 的关系不应该是属于关系，而应该是包含关系.

故选:A

2. 【答案】D

【分析】根据给定条件，利用含有一个量词的否定求解作答.

【详解】命题“ $\forall x \geq 2, x^2 \geq 4$ ”是全称量词命题，其否定是存在量词命题，所以命题“ $\forall x \geq 2, x^2 \geq 4$ ”的否定是： $\exists x \geq 2, x^2 < 4$.

故选：D

3. 【答案】B

【分析】根据函数的奇偶性、单调性确定正确答案.

【详解】函数 $y = x^3$ 和函数 $y = -\frac{1}{x}$ 是奇函数，不符合题意，CD 选项错误.

函数 $y = -|x| = \begin{cases} -x, x \geq 0 \\ x, x < 0 \end{cases}$ 是偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上递减，不符合题意，A 选项错误.

函数 $y = x^2$ 是偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，符合题意，B 选项正确.

故选：B

4. 【答案】C

【分析】根据不等式的性质可判断 A, B, C；举反例可判断 D.

【详解】对于 A，当 $c = 0$ 时，则 $a > b$ 时， $ac^2 = bc^2$ ，A 错误；

对于 B，若 $a > b$ ，则 $a - 1 > b - 1 > b - 2$ ，B 错误；

对于 C，若 $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$ ，则 $c \neq 0$ ，即 $c^2 > 0$ ，故 $a > b$ ，C 正确；

对于 D，若 $a > b$ ，不妨取若 $a = -1 > b = -2$ ，则 $a^2 < b^2$ ，D 错误，

故选：C

5. 【答案】A

【分析】由幂函数所过的点求得 $f(x) = \sqrt{x}$ ，进而求 $f(4)$.

【详解】令 $f(x) = x^a$ ，则 $f(2) = 2^a = \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ ，则 $f(x) = \sqrt{x}$ ，

所以 $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

故选: A

6. 【答案】B

【分析】首先求出不等式的解集, 再根据充分条件、必要条件的定义判断即可.

【详解】解: 由 $2-x \geq 0$, 解得 $x \leq 2$, 由 $|x+1| \leq 1$, 即 $-1 \leq x+1 \leq 1$, 解得 $-2 \leq x \leq 0$,

又 $[-2, 0] \subsetneq (-\infty, 2]$,

由 $2-x \geq 0$ 推不出 $|x+1| \leq 1$, 故充分不成立,

由 $|x+1| \leq 1$ 推得出 $2-x \geq 0$, 即必要性成立,

所以 “ $2-x \geq 0$ ” 是 “ $|x+1| \leq 1$ ” 的必要不充分条件.

故选: B

7. 【答案】B

【分析】利用函数的定义域与函数的值域以及函数的定义, 判断选项即可.

【详解】对于①, $x=2$ 时, 在 N 中无元素与之对应, 不满足任意性, 故①错误;

对于②, 同时满足任意性与唯一性, 故②正确;

对于③, $x=2$ 时, 对应元素 $y=3 \in N$, 不满足任意性, 故③错误;

对于④, $x=1$ 时, 在 N 中有两个元素与之对应, 不满足唯一性, 故④错误.

故选: B.

【点睛】本题考查函数的概念以及函数的定义域以及值域的应用, 是基础题.

8. 【答案】D

【分析】分 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 两种情况结合指数函数的图象, 射线的端点进行分析求解即可

【详解】当 $x = -1$ 时, 代入射线得 $y = 2$,

若 $0 < a < 1$, 指数函数 $f(x) = a^x$ 的图象过第一、二象限, 且单调递减, 要使指数函数的图象与射线有交

点, 则当 $x = -1$ 时, $y = a^{-1} \geq 2$, 所以 $0 < a \leq \frac{1}{2}$,

若 $a > 1$, 则可知两图象在第一象限一定有交点,

综上, $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 或 $a > 1$,

故选: D

9. 【答案】C

【分析】根据“心形”上部分的函数图象关于 y 轴对称, 排除部分选项, 再根据函数的最大值判断.

【详解】由函数图象知: “心形”上部分的函数图象关于 y 轴对称, 而 $y = x\sqrt{4-x^2}$, $y = \sqrt{-x^2+2x}$, 不满足;

$y = |x|\sqrt{4-x^2}$ 的图象过 $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$, 当 $0 < x < 2$ 时,

$y = x\sqrt{4-x^2} \leq \frac{x^2 + (\sqrt{4-x^2})^2}{2} = 2$, 当且仅当 $x = \sqrt{4-x^2}$, 即 $x = \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 不符合要求;

$y = \sqrt{-x^2 + 2|x|}$ 的图象过 $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$, 当 $0 < x < 2$ 时,

$y = \sqrt{-x^2 + 2x} = \sqrt{-(x-1)^2 + 1} \leq 1$, 当 $x = 1$ 时, 函数取得最大值 1, 符合要求;

故选: C

10. 【答案】B

【分析】根据题意保证各集合中 $X_{A_n} = M - m$ 尽量小, 结合已知和集合的性质有 n 最大时

$X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = \frac{n(n-1)}{2}$, 进而分析 n 的取值即可.

【详解】由题意 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 中都至少有一个元素, 且元素个数互不相同,

要使 n 最大, 则各集合中 $X_{A_n} = M - m$ 尽量小,

所以集合 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 中的元素个数尽量少且数值尽可能连续,

所以, 不妨设 $X_{A_1} = 0, X_{A_2} = 1, X_{A_3} = 2, \dots, X_{A_n} = n-1$,

则有 $X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = \frac{n(n-1)}{2}$,

当 $n = 11$ 时, $X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = 55 < 62$,

当 $n = 12$ 时, $X_{A_1} + X_{A_2} + X_{A_3} + \dots + X_{A_n} = 66 > 62$,

所以只需在 $n = 11$ 时, 在上述特征值取最小的情况下, 使其中一个集合的特征值增加 7 即可,

故 n 的最大值为 11.

故选: B.

第II卷 (非选择题共 110 分)

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 【答案】 $[-3, 1) \cup (1, +\infty)$

【分析】由函数解析式, 结合根式、分式的性质求定义域.

【详解】由题设 $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq -3$ 且 $x \neq 1$,

所以函数定义域为 $[-3, 1) \cup (1, +\infty)$.

故答案为: $[-3, 1) \cup (1, +\infty)$

12. 【答案】-2

【分析】结合指数幂的运算化简整理即可求出结果.

【详解】 $4^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - (\pi - 3)^0$

$$= (2^2)^{\frac{1}{2}} - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$= 2^1 - \frac{3}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 1$$

$$= -2,$$

故答案为：-2.

13. 【答案】 ①. 7 ②. 5

【分析】通过函数解析式的配凑，即可利用基本不等式可求解

【详解】因为 $y = x + \frac{4}{x-3} = x-3 + \frac{4}{x-3} + 3 \geq 4 + 3 = 7$ ，当 $x-3 = \frac{4}{x-3}$ 时等号成立，此时 $x = 5$

故 y 最小值为 7，当 y 取得最小值时 x 的值为 5，

故答案为：7,5.

14. 【答案】 -1

【分析】根据题意，假设命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 - 2ax + 3 > 0$ 恒成立”是真命题，根据不等式恒成立，分类讨论当 $a = 0$ 和 $a \neq 0$ 时两种情况，从而得出实数 a 的取值范围，再根据补集得出命题

“ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 - 2ax + 3 > 0$ 恒成立”为假命题时 a 的取值范围，即可得出满足题意的 a 的值.

【详解】解：若命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 - 2ax + 3 > 0$ 恒成立”是真命题，

则当 $a = 0$ 时成立，

当 $a \neq 0$ 时有 $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 4a^2 - 12a < 0 \end{cases}$ ，解得： $0 < a < 3$ ，

所以当 $0 \leq a < 3$ 时，命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 - 2ax + 3 > 0$ 恒成立”是真命题，

所以当 $a \in (-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$ 时，命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 - 2ax + 3 > 0$ 恒成立”为假命题，

故答案为：-1. (答案不唯一，只需 $a \in (-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$)

15. 【答案】 ①③

【分析】根据所给性质直接计算可判断①，取特殊函数判断②，利用函数的单调性定义判断③，取特殊函数判断④.

【详解】因为 $\forall x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ ，

所以 $f(0) = \frac{1}{f(0)}$ ，即 $f(0) = 1$ 或 -1 ，故①正确；

不妨取 $f(x)=1$, 则 $f(-x)=\frac{1}{f(x)}=1$, 即 $f(-x)=f(x)$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 故②错误;

设 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_2 < -x_1 < 0$, 所以 $f(-x_2) < f(-x_1)$,

即 $0 < \frac{1}{f(x_2)} < \frac{1}{f(x_1)}$, 所以 $f(x_1) < f(x_2)$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故③正确;

不妨取 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 则满足 $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, 函数有最大值 1, 但是无最小值, 故④错误.

故答案为: ①③

三、解答题: 本题共 6 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) $\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$, $A \cap B = (3, 4]$, $A \cup B = [-1, 5)$

(2) $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$

【分析】(1) 若 $m=4$, 代入集合 B , 由补集交集并集的定义, 求 $\complement_{\mathbb{R}} A, A \cap B, A \cup B$;

(2) 若 $B \subseteq A$, 分 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 两种类型, 求实数 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

$m=4$ 时, $B = \{x | 3 < x < 5\}$, 又 $A = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$,

$\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$,

$A \cap B = (3, 4]$,

$A \cup B = [-1, 5)$.

【小问 2 详解】

当 $B \subseteq A$ 时,

当 $B = \emptyset$ 时, 则 $m-1 \geq 2m-3$, 得 $m \leq 2$ 满足题意

当 $B \neq \emptyset$ 时, 则 $\begin{cases} m-1 < 2m-3 \\ 2m-3 \leq 4 \\ m-1 \geq -1 \end{cases}$,

解得 $2 < m \leq \frac{7}{2}$

综上: 实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$

17. 【答案】(1) $\frac{3}{2}$

(2) 作图见解析, 减区间为 $(-\infty, 0)$, 增区间为 $(0, +\infty)$

(3) $[-7, 3]$

【分析】(1) 根据分段函数代入求值;

(2) 直接作出函数的大致图象并写出单调区间;

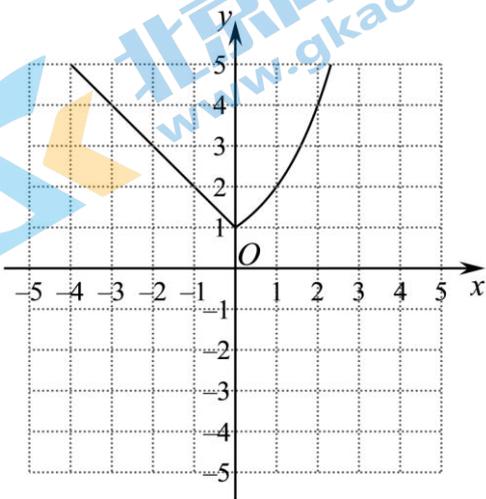
(3) 对 x 分段讨论, 代入相应的解析式求解不等式.

【小问1详解】

$$\text{由 } f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases} \text{ 得 } f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, f(f(-\frac{1}{2})) = f(\frac{3}{2}) = 2^{\frac{3}{2}}.$$

【小问2详解】

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \leq 0 \\ 2^x, & x > 0 \end{cases}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 的图象如下图所示,}$$



由图可知, $f(x)$ 的减区间为 $(-\infty, 0)$, 增区间为 $(0, +\infty)$.

【小问3详解】

$$\text{由 } f(x) \leq 8 \text{ 可得 } \begin{cases} x \leq 0 \\ -x+1 \leq 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x > 0 \\ 2^x \leq 8 \end{cases},$$

解得 $-7 \leq x \leq 0$ 或 $0 < x \leq 3$,

所以 x 的取值范围是 $[-7, 3]$.

18. 【答案】(1) 奇函数, 证明见解析

(2) 单调递增, 证明见解析

(3) $[0, \frac{1}{4}]$

【分析】(1) 利用奇函数定义证明;

(2) 根据单调性定义证明;

(3) 作出 $g(x)$ 的图象, 观察图象得答案.

【小问1详解】

函数 $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ 为奇函数.

证明: 定义域 $\{x | x \neq 0\}$, 因为 $\forall x \in \{x | x \neq 0\}$, 都有 $-x \in \{x | x \neq 0\}$,

$$\text{且 } f(-x) = 4(-x) + \frac{1}{(-x)} = -(4x + \frac{1}{x}) = -f(x),$$

所以函数 $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ 为奇函数.

【小问2详解】

函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

任取 $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, +\infty)$, $\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (4x_2 + \frac{1}{x_2}) - (4x_1 + \frac{1}{x_1}) \\ &= 4(x_2 - x_1) - \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \\ &= (x_2 - x_1) \cdot \frac{4x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2} \end{aligned}$$

因为 $x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 > 0, 4x_1 x_2 - 1 > 0$, 所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0$,

即 $f(x_2) > f(x_1)$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

【小问3详解】

t 的范围 $[0, \frac{1}{4}]$, 理由如下:

$$g(x) = \begin{cases} 4x + \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 5, & x = 0, \\ -(4x + \frac{1}{x}), & x < 0, \end{cases}$$

先证明函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2}]$ 上单调递减.

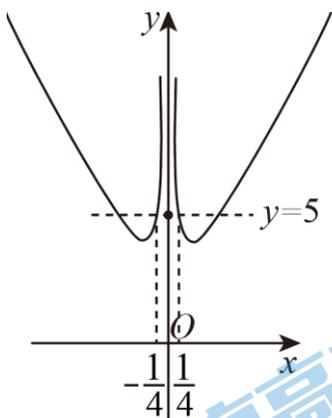
任取 $x_1, x_2 \in (0, \frac{1}{2}]$, $0 < x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2}$,

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot \frac{4x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2},$$

因为 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 x_2 > 0$, $4x_1 x_2 - 1 < 0$, 所以 $f(x_2) - f(x_1) < 0$,

即 $f(x_2) < f(x_1)$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{2}]$ 上单调递减.

根据 $f(x)$ 的单调性与奇偶性可以作出 $g(x)$ 的图象如下:



计算可知: $g(\frac{1}{4}) = g(-\frac{1}{4}) = 5$,

由图可知, 当 $x \in [-\frac{1}{4}, t]$ 时, $g(x)$ 的值域为 $[5, +\infty)$, t 的取值范围为 $[0, \frac{1}{4}]$.

19. 【答案】19. 1 和 3;

20. 答案见解析.

【分析】(1) 根据题意确定 1 是 $ax^2 - (3a+1)x + 3 = 0$ 的一个根, 从而求出 $a = 1$, 进而求解 $f(x) = 0$ 即可;

(2) 先讨论当 $a = 0$ 时求解不等式, 在 $a \neq 0$ 时求得方程 $(ax-1)(x-3) = 0$ 的两根为 $\frac{1}{a}, 3$, 再比较两根大小, 分类讨论求解不等式即可.

【小问 1 详解】

因为 $f(x) < 0$ 的解集是 $\{x | 1 < x < k\}$, 所以 1 是 $ax^2 - (3a+1)x + 3 = 0$ 的一个根,

所以 $a - (3a+1) + 3 = 0$, 解得 $a = 1$, 所以 $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

令 $f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 3$,

所以 $f(x)$ 的零点为 1 和 3.

【小问 2 详解】

因为 $f(x) > 0$, 即 $ax^2 - (3a+1)x + 3 > 0$, 所以 $(ax-1)(x-3) > 0$,

当 $a = 0$ 时, $-x + 3 > 0$, 解得 $x < 3$;

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $(ax-1)(x-3) = 0$ 的两根为 $x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = 3$,

当 $a < 0$ 时, $y = f(x)$ 开口向下, 且 $\frac{1}{a} < 3$, 解得 $\frac{1}{a} < x < 3$;

当 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时, $y = f(x)$ 开口向上, 且 $\frac{1}{a} > 3$, 解得 $x < 3$ 或 $x > \frac{1}{a}$;

当 $a = \frac{1}{3}$ 时, $y = f(x)$ 开口向上, 且 $\frac{1}{a} = 3$, 解得 $x \neq 3$;

当 $a > \frac{1}{3}$ 时, $y = f(x)$ 开口向上, 且 $\frac{1}{a} < 3$, 解得 $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 3$;

综上所述, 当 $a = 0$ 时, 解集为 $\{x | x < 3\}$;

当 $a < 0$ 时, 解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 3\right\}$;

当 $0 < a < \frac{1}{3}$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < 3 \text{ 或 } x > \frac{1}{a}\right\}$;

当 $a = \frac{1}{3}$ 时, 解集为 $\{x | x \neq 3\}$;

当 $a > \frac{1}{3}$ 时, 解集为 $\left\{x \mid x < \frac{1}{a} \text{ 或 } x > 3\right\}$.

20. 【答案】(1) $f(n) = -\frac{5}{2}n^2 + 50n - 90$, 3 年; (2) 第二种方案更合适, 理由见解析.

【分析】(1) 利用 n 年的销售收入减去成本, 求得 $f(n)$ 的表达式, 由 $f(n) > 0$, 解一元二次不等式求得从第 3 年开始盈利.

(2) 方案一: 利用配方法求得总盈利额的最大值, 进而求得总利润;

方案二: 利用基本不等式求得 $n = 6$ 时年平均利润额达到最大值, 进而求得总利润.

比较两个方案获利情况, 作出合理的处理方案.

【详解】(1) 由题意得:

$$f(n) = 55n - 90 - \left(\frac{5}{2}n^2 + 5n\right) = -\frac{5}{2}n^2 + 50n - 90$$

由 $f(n) > 0$ 得 $-\frac{5}{2}n^2 + 50n - 90 > 0$ 即 $n^2 - 20n + 36 < 0$,

解得 $2 < n < 18$

由 $n \in \mathbf{N}_+$, 设备企业从第 3 年开始盈利

(2) 方案一总盈利额

$$f(n) = -\frac{5}{2}(n-10)^2 + 160, \text{ 当 } n=10 \text{ 时, } f(n)_{\max} = 160$$

故方案一共总利润 $160 + 10 = 170$, 此时 $n = 10$

方案二: 每年平均利润

$$\frac{f(n)}{n} = 50 - \frac{5}{2}\left(n + \frac{36}{n}\right) \leq 50 - \frac{5}{2} \times 2\sqrt{36} = 20, \text{ 当且仅当 } n = 6 \text{ 时等号成立}$$

故方案二总利润 $6 \times 20 + 50 = 170$, 此时 $n = 6$

比较两种方案，获利都是 170 万元，但由于第一种方案只需要 10 年，而第二种方案需要 6 年，故选择第二种方案更合适。

【点睛】本小题主要考查一元二次不等式的解法，考查基本不等式求最值，属于中档题。

21. 【答案】(1) $A = B = \{-2\}$

(2) 证明见解析 (3) 证明见解析

【分析】(1) 当 $f(x) = 3x + 4$ 时，直接解方程 $f(x) = x$ 、 $f[f(x)] = x$ ，可得出集合 A 、 B ；

(2) 分 $A = \emptyset$ 、 $A \neq \emptyset$ 两种情况讨论，第一种情况直接验证即可；在第二种情况下，任取 $x_0 \in A$ ，由“稳定点”和“不动点”的定义证得 $x_0 \in B$ ，即可得出结论；

(3) 分 $a > 0$ 、 $a < 0$ 两种情况讨论，在第一种情况下，推导出 $f(x) > x$ ，结合不等式的基本性质可得出 $f[f(x)] > x$ ，从而得出 $B = \emptyset$ ；在第二种情况下，推导出 $f(x) < x$ ，结合不等式的基本性质可得出 $f[f(x)] < x$ ，从而得出 $B = \emptyset$ 。综合可证得结论成立。

【小问 1 详解】

解：由 $f(x) = 3x + 4 = x$ ，可得 $x = -2$ ，即 $A = \{-2\}$ ，

由 $f[f(x)] = 3(3x + 4) + 4 = 9x + 16 = x$ ，解得 $x = -2$ ，即 $B = \{-2\}$ 。

故当 $f(x) = 3x + 4$ 时， $A = B = \{-2\}$ 。

【小问 2 详解】

证明：当 $A = \emptyset$ ，则 $A \subseteq B$ 成立，

若 $A \neq \emptyset$ ，对任意的 $x_0 \in A$ ， $f(x_0) = x_0$ ，则 $f[f(x_0)] = f(x_0) = x_0$ ，所以， $x_0 \in B$ ，

因此， $A \subseteq B$ 。

综上所述， $A \subseteq B$

【小问 3 详解】

证明：因为 $A = \emptyset$ ，则关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = x$ ($a \neq 0$) 无实解，

即方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 无实解，则 $\Delta = (b-1)^2 - 4ac < 0$ ，

构造函数 $g(x) = ax^2 + (b-1)x + c$ ，

①当 $a > 0$ 时，函数 $g(x)$ 的图象恒在 x 轴上方，

即对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，则 $f(x) > x$ 恒成立，

则 $f[f(x)] > f(x) > x$ ，即 $f[f(x)] - x > 0$ 恒成立，即 $B = \emptyset$ ；

②当 $a < 0$ 时，函数 $g(x)$ 的图象恒在 x 轴下方，

即对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，则 $f(x) < x$ 恒成立，

则 $f[f(x)] < f(x) < x$, 即 $f[f(x)] - x < 0$ 恒成立, 即 $B = \emptyset$.

综上所述, 当 $A = \emptyset$ 时, $B = \emptyset$.

【点睛】 关键点点睛: 在证明第三问时, 要注意分 $a > 0$ 、 $a < 0$ 两种情况分析, 确定 $f(x)$ 与 x 之间的大小关系, 进而可得出 $f[f(x)]$ 与 x 的大小, 从而证出结论成立.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

