2019 年北京大学数学金秋营试题解析

题 1. 求最大的正实数 α，对于满足 $a+b+c \mid a^2+b^2+c^2$ 的不全相等的正整数 a,b,c，都有方程

$$(x+b)^2=(x+c)(x+a)$$

在区间 $(0,\alpha)$ 内没有解.

解： 所求 α 的最大值是 $\frac{1}{2}$.

方程 $(x+b)^2=(x+c)(x+a)$ 的解是 $x=\dfrac{b^2-ca}{c+a-2b}$，由 $a+b+c \mid a^2+b^2+c^2$ 知 $a+b+c \mid 2(ab+bc+ca)$.
注意到 $ab+bc+ca=ca+b(c+a)\equiv ca-b^2 \pmod{a+b+c}$，所以 $a+b+c \mid 2(b^2-ca)$.
若 $b^2<ca$，则 $b^2<ca<\left(\dfrac{c+a}{2}\right)^2$，于是 $x=\dfrac{b^2-ca}{c+a-2b}<0$，矛盾.
所以 $b^2>ca$，进而 $c+a>2b$，所以 $2(b^2-ca)\geq a+b+c$，所以

$$x=\frac{b^2-ca}{c+a-2b}\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+c}{c+a-2b}>\frac{1}{2}.$$

我们取 $a=1$，$c=\dfrac{2b^2-b-1}{3}$，其中 $b\equiv 1 \pmod 3$，此时

$$\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2-ca}{c+a-2b}=\frac{1}{2},$$

根据极限保号性知：$\frac{1}{2}$ 是最好的常数. （解题人：吴宇培）

题 2. 圆周上有 2019 只蚂蚁，初始位置各不相同，一开始每只蚂蚁各选一个方向（顺时针，逆时针）以相同的速度开始运动，若两只蚂蚁相撞，则它们立刻反向以相同的速度运动. 证明：每只蚂蚁都经过圆上的每一点.

证法一： 设顺时针的速度为 $+1$，逆时针的速度为 -1，设所有蚂蚁运动的距离（顺时针为正，逆时针为负）之和为 l，由于 $2\nmid 2019$，所以速度之和始终恒定且不为 0，l 与时间成正比. 那么时间足够充分之后，必有一只蚂蚁的运动的距离大于 2 倍周长.

注意到任意两只蚂蚁运动的距离差不超过周长，所以只要有一只蚂蚁跑完 2 圈，那么其他蚂蚁必然跑了一圈. 所以当时间足够充分后，每只蚂蚁运动的距离都大于周长. （解题人：罗 炜）

证法二： 设顺时针的速度为 $+1$，逆时针的速度为 -1，我们把所有蚂蚁的速度之和定义为合速度.

由题意，两只蚂蚁相撞后立刻原速反向，所以合速度的大小与正负（方向）始终不变.

再注意到 2019 是奇数，所以合速度不为 0.

我们注意到 2019 只蚂蚁的排序始终不变（两只相撞就反向，所以相对顺序不会改变），于是合速度始终朝着一个方向，于是所有蚂蚁的位移之和趋向无穷大，这里位移理解为矢量，顺时针为正，逆时针为负，所以必有一只蚂蚁的位移趋向无穷大，那么这只蚂蚁一定可以跑完整个圆周.

结合所有蚂蚁的位置排序不发生改变，所以这只跑完圆周的蚂蚁不会超越它前面的那只蚂蚁（顺着运动方向的第一只蚂蚁），所以前面的蚂蚁也能跑完一圈，反复下去，所有蚂蚁都能跑完一圈. （解题人：吴宇培）

题 3. 设 f 是平面上的双射，证明：f 是保内心映射，当且仅当 f 保外心，并且不会把钝角三角形映射成锐角三角形. 并求所有的保内心映射.

证明： 从一个保内心映射 f 开始.

1. f 将不共线三点映射为不共线三点. 这从定义给出，注意不能直接说 f 将共线的点映射为共线的点. 这个性质等价说法是，如果三点的像共线，则这三点共线.
2. 若某不共线三点 A,B,C 的像是等腰三角形 $f(A)f(B)=f(A)f(C)$，则 $AB=AC$. 证明如下：设 ABC 的内心为 I，IBC 的内心为 J，则 $f(A)f(B)=f(A)f(C)$ 说明 $f(A),f(I),f(J)$ 共线，说明 A,I,J 共线，说明 $AB=AC$.
3. 若 A,B,C 构成等边三角形，则 $f(A),f(B),f(C)$ 构成等边三角形. 否则，取 $f(O)$ 为 $f(A),f(B),f(C)$ 外心，得到三个等腰三角形 $f(OAB),f(OBC),f(OAC)$. 因为 O 不能和 A,B,C 任何一个相同（用双射），所以 OAB,OBC,OCA 中至少两组是构成三角形的（不共线），根据第 2 条，这是等腰三角形. 因此 O 是 ABC 外心.O 也是内心，因此 $f(O)$ 也同时是 $f(ABC)$ 外心和内心，因此 $f(A),f(B),f(C)$ 构成等边三角形.
4. 若 A,B,C 共线，则 $f(A),f(B),f(C)$ 共线. 否则在 $f(A),f(B)$ 直线上找 $f(D),f(E)$ 与 $f(C)$ 构成等边三角形，根据第 1 条，D,E 在直线 A,B 上.C 也在直线 AB 上. 直线 AB 外还有两个点 F,G 与 D,E 构成等边三角形，则 $f(F),f(G)$ 之一落在 $f(C)$，与双射矛盾.
5. 若不共线三点 A,B,C 满足 $AB=AC$，则 $f(A)f(B)=f(A)f(C)$. 设 I 是 ABC 内心，J 是 IBC 内心，则 AIJ 共线，因此像共线，由前面说法，$f(ABC)$ 是等腰三角形.
6. 菱形映射为菱形，将共线等距分布三点扩充成菱形和中心，利用共线性和距离相等性可知共线等距三点映射为共线等距三点.
7. 垂直直线上选取交点和另外四点构成菱形，则像也是菱形及中心，因此 f 将垂直的直线映射为垂直的直线.
8. 设 A,B,C 是共线三点，B 在 A,C 之间，过 B 的垂直直线上有点 D，$CD=CA$，也有点 E，$AE=AC$. 根据 D,E 存在性可知，共线的 $f(A),f(B),f(C)$ 必然满足 $f(B)$ 在 $f(A),f(C)$ 之间. 这一条说明了直线上的保序性.
9. 直线到它的像是线性映射. 根据保等距性，知道将整数点映射为等距序列；进一步在直线上到原点（选定的一点）距离为有理数倍单位的点上映射是线性的；根据保序性，直线上所有点是线性的.
10. 选两条垂直直线，映射到它的像分别是线性的. 利用共线，交点设为原点，也映射为交点. 根据保持等距性，两个直线上的线性因子相同. 根据保证垂直性，平面上其他每个点可以和已知两条直线上的点及原点形成矩形，这样用保垂直性唯一确定它的像. 最终所有保内心映射为刚体变换复合位似变换.

现在设 f 是一个保外心映射，不将钝角三角形映射为锐角三角形.

1. f 将共线点映射为共线点. 设 A,B,C 共线，取 D,E，使 DE 垂直平分线过 A,B,C. 则 A,B,C 都可以成为 D,E,X 的外心，X 是某点. 因此 $f(A),f(B),f(C)$ 也分别是 $f(D),f(E),f(X)$ 的外心，因此 $f(D),f(E)$ 的垂直平分线过 $f(A),f(B),f(C)$，得证.
2. f 将等腰三角形映射为等腰三角形.$AB=AC$ 则 A 可以成为某 BCD 外心，于是 $f(A)$ 是 $f(B)f(C)f(D)$ 外心，$f(A)f(B)=f(A)f(C)$.
3. 后面的部分可以超保内心映射的论述，可以不用到将钝角三角形映射为锐角三角形这个条件. 这个条件证明直线上保序性时候方便一些.

4. 两个保心映射最终都是刚体变换复合位似，这类变换显然也是保这两个心的，因此等价.

（解题人：罗 炜）

题 4. 给定 l 个实数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l$，证明：存在正整数 k 和正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = 1,$$

对任意的正整数 $n \le k$ 和任意正整数 $m \le l$，都有

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \sin(j\theta_m)\right| \le \frac{1}{2018n}.$$

证明： 要先证明如下引理以及 a_i 的大致取法.

引理： 对于任意首一的实系数多项式 $P(x)$，若 P 没有非负实数根，则存在正整数 α，使得 $(x+1)^\alpha P(x)$ 的各项系数皆为正数.

引理的证明： 显然结论对 $\deg P = 1$ 成立.

若我们已经证明了结论对 $\deg P = 2$ 也成立，则当 $\deg P > 2$ 时，若结论对小于 $\deg P$ 成立，根据代数基本定理，总可以设 $P(x) = (x^2+ax+b)Q(x)$，其中 $x^2+ax+b, Q(x)$ 都没有非负实根.

由归纳假设，存在正整数 β,γ 使得 $(x+1)^\beta(x^2+ax+b)$ 系数全正，$(x+1)^\gamma Q(x)$ 的系数全正，所以 $(x+1)^{\beta+\gamma}P(x)$ 的各项系数全正. 所以我们只需要处理 $\deg P = 2$ 的情况，此时可以设 $P(x) = (x-a)^2+b$，$b+a^2>0$. 设 $(x+1)^k(x-a)^2+b$ 中 x^n 系数为 A_n.

易见 $A_{k+2}, A_0 > 0$，$A_{k+1} = k-2a$，$A_1 = (a^2+b)k-2a$. 当 k 充分大时，$A_1, A_0 > 0$. 当 $1 < n \le k$ 时，

$$A_n = (a^2+b)C_k^n - 2aC_k^{n-1} + C_k^{n-2} = C_k^{n-1}\left[\frac{k-n+1}{n}(a^2+b) - 2a + \frac{n-1}{k-n+1}\right].$$

我们希望

$$a^2 - 2\frac{n}{k-n+1}a + b + \frac{n(n-1)}{(k-n+1)(k-n+2)} = \left(a-\frac{n}{k-n+1}\right)^2 + b - \frac{n(k+1)}{(k-n+1)^2(k-n+2)} > 0 \cdots\cdots(1)$$

若 $2a < \dfrac{n-1}{k-n+1}$，由 (1) 式左边知结论成立；若 $2a \ge \dfrac{n-1}{k-n+1}$，则 $n \le \dfrac{k+2+\frac{1}{2a}}{1+\frac{1}{2a}} \sim \dfrac{2a}{2a+1}k, k \to +\infty$.

此时 $\dfrac{n(k+1)}{(k-n+1)^2(k-n+2)} < O\left(\dfrac{1}{k}\right) \to 0, k \to +\infty$.

所以可以选择充分大的 k 满足要求.

回到原题.

设

$$P(z) = \prod_{j=1}^{l}(z-e^{i\theta_j})(z-e^{-i\theta_j}),$$

根据引理，存在正整数 α(只依赖于 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l$)，$f(z) = (z+1)^\alpha P(z)$ 的各项系数皆为正数. 这些系数从高此项到低次项依次是 $b_t, b_{t-1}, \cdots, b_1(>0)$.

我们注意到：每一段求和

$$\sum_{j=1}^{t} b_j(e^{i\theta_m})^j = f(e^{i\theta_m}) = 0,$$

所以

$$0 = \sum_{j=1}^{t} b_j Im\left((e^{i\theta_m})^j\right) = \sum_{j=1}^{t} b_j \sin(j\theta_m).$$

设 $b_1 + b_2 + \cdots + b_t = f(1) = A$ 是只依赖于 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l$ 的常数，于是我们考虑取 $k = ts$，s 是待定的正整数，取 $a'_{i+at} = \frac{b_i}{2018A(a+1)t}$，我们只要处理每一段中的情况.

由于调和级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ 是发散的，我们可以取 s 充分大，使得

$$\sum_{i=1}^{k} a'_i = \sum_{a=0}^{s-1}\sum_{i=1}^{t} \frac{b_i}{2018A(a+1)t} = \sum_{i=1}^{t} \frac{b_i}{2018At}\sum_{a=0}^{s-1}\frac{1}{a+1} \geq 1.$$

我们取 $a_i = \frac{a'_i}{\sum_{i=1}^{k} a'_i}$，于是 $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$. 若 $at < n \leq (a+1)t$，$t \in \{0, 1, \cdots, s-1\}$，则

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \sin(j\theta_m)\right| &= \left|(\sum_{i=1}^{k} a'_i)\sum_{b=0}^{a-1}\sum_{j=1}^{t}\frac{1}{2018A(b+1)t} b_j \sin(j\theta_m) + \sum_{j=at+1}^{n} a_j \sin(j\theta_m)\right| \\
&= \left|\sum_{j=at+1}^{n} a_j \sin(j\theta_m)\right| \leq \left|\sum_{j=at+1}^{n} a'_j \sin(j\theta_m)\right| \\
&= \frac{1}{2018At(a+1)}|b_{n-at}\sin(n\theta_m) + \cdots + b_1 \sin((at+1)\theta_m)| \\
&\leq \frac{1}{2018At(a+1)}|b_1 + b_2 + \cdots + b_t| \\
&= \frac{1}{2018t(a+1)} \\
&\leq \frac{1}{2018n}.
\end{aligned}$$

这就证明了结论. **（解题人：罗 炜 吴宇培）**

注： 本题在讨论时，一位前 IMO 金牌得主给出“证明引理及 a_i 大致取法”的提示，感谢为国争光的国手.

题 5. 设 n 是正整数，非负整数序列 $b_1 = 0, b_2, \ldots, b_n$ 满足：对任何 $1 \leq u, v \leq n$，有

$$\frac{1}{u}(b_1 + b_2 + \cdots + b_u) < \frac{1}{v}(b_1 + b_2 + \cdots + b_v + 1).$$

求所有这样的序列 $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 的个数.

解： 记 $S_v = b_1 + b_2 + \cdots + b_v$，则 $S_1 = 0$，$\{S_i\}$ 是非减整数序列，方程为 $\frac{S_u}{u} < \frac{S_v + 1}{v}$.

取 $v = 1$，得 $S_u < u$.

设 $\frac{S_v + 1}{v}$ 的最小值在 $v = w$ 达到，并且如果有多个符合条件的，取最小的 w. 则方程等价于

$$\frac{S_u}{u} < \frac{S_w + 1}{w} \leq \frac{S_u + 1}{u},$$

题 7. 设函数 $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$，$f$ 单调不增. 给定常数 $C>0$，$\alpha>0$，$\beta>1$，对任意的 $x>y\geq 0$，都有

$$f(x)\leq\frac{C}{(x-y)^{\alpha}}f(y)^{\beta}.$$

证明：0 属于 f 的值域.

证明： 固定 y_0，寻找常数 d，$y_n=y_0+d-\dfrac{d}{2^n}$，于是

$$f(y_{n+1})\leq\frac{C2^{(n+1)\alpha}}{d^{\alpha}}f(y_n)^{\beta}.$$

我们希望 $f(y_n)\leq\dfrac{f(y_0)}{2^{xn}}(n\geq 0)$，其中 x 待定.
结论对 $n=0$ 显然成立. 若我们证明了结论对 $n(\geq 0)$ 成立，则

$$f(y_{n+1})\leq\frac{Cf(y_0)^{\beta-1}}{d^{\alpha}}\frac{f(y_0)}{2^{xn\beta-(n+1)\alpha}}.$$

为了使归纳法成立，我们希望 $2^{xn\beta-(n+1)\alpha}>2^{x(n+1)}$，暂取 $x=\dfrac{\alpha}{\beta-1}$，此时，

$$f(y_{n+1})\leq\frac{2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}Cf(y_0)^{\beta-1}}{d^{\alpha}}\frac{f(y_0)}{2^{x(n+1)}}.$$

现在我们只要让 d 满足 $\dfrac{2^{\frac{\alpha\beta}{\beta-1}}Cf(y_0)^{\beta-1}}{d^{\alpha}}\leq 1$ 即可.
于是我们可以选择常数 d 及存在 $x=\dfrac{\alpha}{\beta-1}$，使得 $f(y_n)\leq\dfrac{f(y_0)}{2^{xn}}$ 成立.
由于 f 单调不增，所以

$$0\leq f(y_0+d)\leq f(y_n)\leq\frac{f(y_0)}{2^{xn}},$$

令 $n\to+\infty$，由于 y_0+d 不依赖于 n，两边极限是 0，所以 $f(y_0+d)=0$.

证毕. **（解题人：罗 炜）**

注： 这是一道数学分析的题目，证法整理自朋友爆的书.（De Giorgi 迭代，见《二阶椭圆型方程与椭圆型方程组》第 7 页引理 4.1）

题 8. 证明：$x^4-20200y^2=1$ 在 $\mathbb{Z}_+^2$ 上无解.

证明： 首先证明几个引理：

引理 1：方程 $x^4-2y^2=1$ 无正整数解.

引理 1 的证明： 若 $x^4-2y^2=1$，则 $(x^2-1)(x^2+1)=2y^2$，而 $(x^2-1,x^2+1)=2$，所以 x^2-1 与 x^2+1 之中有一个是完全平方数，矛盾 (考察平方数的间距).

引理 2：方程组 $\begin{cases}a^2-b^2=c^2+d^2\\ ab=cd\end{cases}$ 无正整数解.

引理 2 的证明： 若正整数 a,b,c,d 满足 $a^2-b^2=c^2+d^2,ab=cd$. 取一组正整数解 (a,b,c,d) 使 a 最小.
若存在素数 $p\mid(a,b)$，则 $p\mid cd$，$p\mid c^2+d^2$，从而 $p\mid c$，$p\mid d$，此时 $\left(\dfrac{a}{p},\dfrac{b}{p},\dfrac{c}{p},\dfrac{d}{p}\right)$ 也是解，$\dfrac{a}{p}<a$，与 a 的最小性矛盾. 所以 $(a,b)=1$，同理有 $(c,d)=1$.
设 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{d}{b}=\dfrac{m}{n}$，正整数 m,n 互素.

我们设 $a=km, b=kn, d=ml, b=nl$, k,l 是正整数, m,n,k,l 两两互素.

由于 $m^2k^2-n^2l^2=n^2k^2+m^2l^2$, 得 $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}=\frac{l^2}{k^2}$, 由 $(m,n)=1$ 知 $(m^2-n^2,m^2+n^2)=1$ 或 2.

(1) 若 $(m^2-n^2,m^2+n^2)=1$, 由勾股数公式知: $2\nmid m$, $2\mid n$, $m=A^2+B^2=C^2-D^2$, $n=2AB=2CD$, 则 $AB=CD$, 其中 A,B,C,D 是正整数. $a=km\geq m=C^2-D^2\geq C+D>C$, 矛盾.

(2) 若 $(m^2-n^2,m^2+n^2)=2$, 则 $m^2-n^2=2l^2$, $m^2+n^2=2k^2$, 进而 $k^2-l^2=n^2$, $k^2+l^2=m^2$, 类似 (1) 可得矛盾.

引理 3: 方程 $2x^2-y^4=1$ 仅有一个正整数解 $(1,1)$.

引理 3 的证明: 若 $2x^2-y^4=1$, 则 $\left(\frac{y^2+1}{2}\right)^2+\left(\frac{y^2-1}{2}\right)^2=x^2$.

若 $y>1$, 则由勾股数公式, $\frac{y^2+1}{2}=a^2-b^2$, $\frac{y^2-1}{2}=2ab$.

于是 $a^2-b^2=\left(\frac{y+1}{2}\right)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2$, $ab=\frac{y+1}{2}\frac{y-1}{2}$, 由引理 2 可得矛盾. 所以 $y=1$, $x=1$.

下面回到原题: 我们证明 $x^4-202y^2=1$ 在 $\mathbb{Z}_+^2$ 上无解. 若正整数 x,y 满足 $(x^2-1)\left(\frac{x^2+1}{2}\right)=101y^2$.

(1) 若 $x^2-1=a^2$, $x^2+1=202b^2$, $x^2\equiv 0,1 \pmod 3$, 所以 $b^2\equiv 2 \pmod 3$ 或 $a^2\equiv 2 \pmod 3$, 矛盾.

(2) 若 $x^2-1=101a^2$, $x^2+1=2b^2$, 则 $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=b^2$, 从而 $\left\{\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right\}=\{m^2-n^2,2mn\}$, 其中, m,n 一奇一偶且互素. 于是 $|m^2-n^2-2mn|=1$. $mn(m+n)(m-n)=202\left(\frac{a}{4}\right)^2$, 由于 $m,n,m-n,m+n$ 两两互素. 所以 $m-n$ 与 $m+n$ 之中必有一个是完全平方数.

(2.1) $m+n$ 是完全平方数:

若 $m^2-n^2-2mn=1$, 则 $2m^2=(m+n)^2+1$. 由引理 3 知, $m+n=1$, 矛盾.

若 $m^2-n^2-2mn=-1$, 则 $(m+n)^2-2m^2=1$, 由引理 1 可得矛盾.

(2.2) $m-n$ 是完全平方数:

若 $m^2-n^2-2mn=1$, 则 $(m-n)^2-2n^2=1$, 与引理 1 矛盾.

若 $m^2-n^2-2mn=-1$, 则 $(m-n)^2+1=2n^2$, 由引理 3 可得 $m-n=n=1$, 与

$$mn(m+n)(m-n)=202\left(\frac{a}{4}\right)^2$$

矛盾.

证毕. **(解题人: 龚固)**