

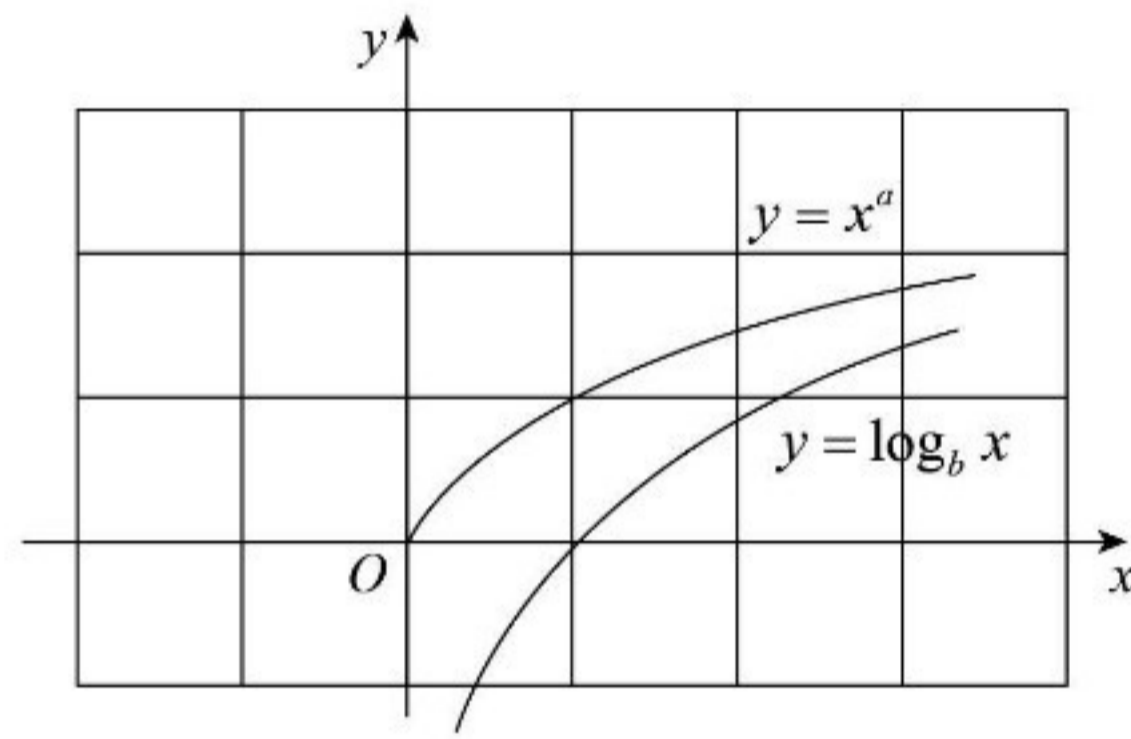
清华附中高三 2019 年 10 月月考试卷

数学

北京高考在线
www.gkz.com

一、选择题

1. 已知集合 $A = \{x|x > 2\}$, $B = \{x|(x-1)(x-3) < 0\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
- A. $\{x|x > 1\}$ B. $\{x|2 < x < 3\}$ C. $\{x|1 < x < 3\}$ D. $\{x|x > 2 \text{ 或 } x < 1\}$
2. 若角 θ 的终边过点 $P(3, -4)$, 则 $\tan(\theta + \pi) = (\quad)$
- A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$
3. 已知函数 $y = x^a$, $y = \log_b x$ 的图象如图所示, 则 (\quad)



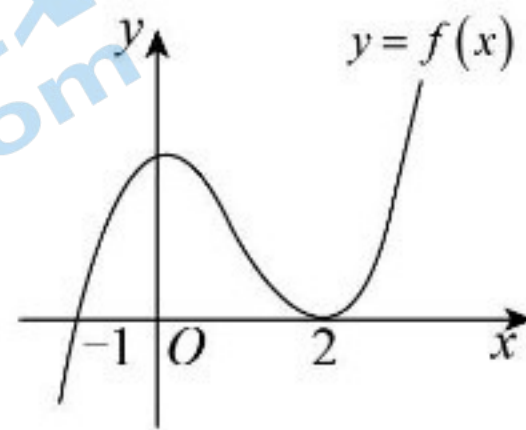
- A. $b > 1 > a$ B. $b > a > 1$ C. $a > 1 > b$ D. $a > b > 1$
4. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 “ $f(0) = 0$ ” 是 “函数 $f(x)$ 为奇函数” 的 (\quad)
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知 $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值为 (\quad)
- A. $\frac{3}{6}$ B. $-\frac{3}{8}$ C. $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ D. $-\frac{3\sqrt{7}}{8}$
6. 我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题: “远望巍巍塔七层, 红光点点倍加增, 共灯三百八十一, 请问尖头几盏灯?” 意思是: 一座 7 层塔共挂了 381 盏灯, 且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍, 则塔的顶层共有灯 (\quad)
- A. 1 盏 B. 3 盏 C. 5 盏 D. 9 盏
7. 象棋社团组织中国象棋比赛, 采用单循环赛制, 即要求每个参赛选手必须且只须和其他选手各比赛一场, 胜者得 2 分, 负者得 0 分, 平局两人各得 1 分. 若冠军获得者得分比其他人都多, 且获胜场次比其他人都少, 则本次比赛的参赛人数至少为 (\quad)
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

8. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x \leq 0 \\ \ln(x+a), & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = \frac{1}{2}$ 有两个不相等的实数根, 则 a 的取值范围是()

- A. $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ B. $0 \leq a < \frac{1}{2}$ C. $0 \leq a < 1$ D. $-\frac{1}{2} < a \leq 0$

二、填空题

9. 已知函数 $y = f(x)$ 的导函数有且仅有两个零点, 其图象如图所示, 则函数 $y = f(x)$ 在 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 处取得极值.



10. 2^{-3} , 3^2 , $\log_2 5$ 三个数中最大的数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{13}{14}$, $7a = 3b$, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}$.

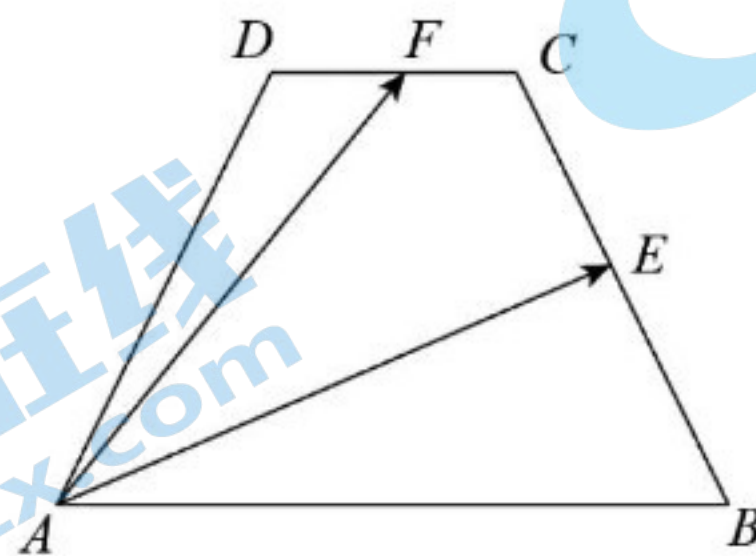
12. 去年某地的月平均气温 y ($^{\circ}\text{C}$) 与月份 x (月) 近似地满足函数 $y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{6}x + \varphi\right)$ (a, b 为常数,

$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 其中三个月份的月平均气温如表所示:

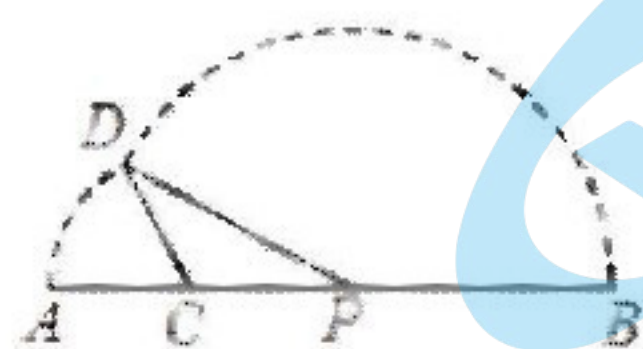
x	5	8	11
y	13	31	13

则该地 2 月份的月平均气温约为 $\underline{\hspace{2cm}}$ $^{\circ}\text{C}$, $\varphi = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $\underline{\hspace{2cm}}$ 已知 $AB \parallel DC$, $AB = 2$, $BC = 1$, $\angle ABC = 60^{\circ}$, 点 E 和点 F 分别在线段 BC 和 CD 上, 且 $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



14. 如图, 线段 $AB=8$, 点 C 在线段 AB 上, 且 $AC=2$, P 为线段 CB 上一动点, 点 A 绕点 C 旋转后与点 B 绕点 P 旋转后重合于点 D . 设 $CP=x$, $\triangle CPD$ 的面积为 $f(x)$, 则 $f(x)$ 的定义域为 _____, $f'(x)$ 的零点是 _____.



三、解答题

15. 已知函数 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $(0, \frac{1}{2})$, 最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$, 且最小值为 -1 .

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $x \in [\frac{\pi}{6}, m]$, $f(x)$ 的值域是 $[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$, 求 m 的取值范围.

16. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n , 若数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是首项为 9, 公差为 -1 的等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 若 $b_n = |a_n|$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和记为 T_n , 求 $T_4 + T_{15}$ 的值.

17. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\sin(A+C) = \frac{8}{17}$, 且角 B 为锐角.

- (1) 求 $\cos B$ 的值;
- (2) 若 $a+c=6$, $\triangle ABC$ 的面积为 2, 求边长 b .

18. 已知函数 $f(x) = \frac{ax-1}{e^x}$.

- (1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (2) 当 $a < 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值.

19. 已知函数 $f(x) = x^3 - 9x$, 函数 $g(x) = 3x^2 + a$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在它们的交点处且有公共切线, 求 a 的值;
- (2) 若存在实数 b 使不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集为 $(-\infty, b)$, 求实数 a 的取值范围.

20. 设满足以下两个条件的有穷数列 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n ($n=2, 3, 4, \dots$) 阶“期待数列”：

① $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 0$ ；

② $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| = 1$ ；

(1) 分别写出一个单调递增的 3 阶和 4 阶“期待数列”；

(2) 若某 2013 阶“期待数列”是等差数列，求该数列的通项公式；

(3) 记 n 阶“期待数列”的前 k 项和为 S_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$)，试证： $|S_k| \leq \frac{1}{2}$.