北京市朝阳区 2020~2021 学年度第一学期期末质量检测

高一数学试卷

2021.1

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 50 分）和非选择题（共 100 分）两部分

第一部分（选择题　共 50 分）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

（1）已知集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-1,0\}$　　（B）$\{0,1\}$

（C）$\{-1,0,1\}$　　（D）$\{-1,0,1,2\}$

（2）命题“$\forall x>0$，$\sin x\le 1$”的否定是

（A）$\forall x>0$，$\sin x>1$　　（B）$\forall x\le 0$，$\sin x>1$

（C）$\exists x>0$，$\sin x>1$　　（D）$\exists x\le 0$，$\sin x>1$

（3）下列函数中，既是奇函数又在区间$(0,1)$上单调递增的是

（A）$y=\sin x$　　（B）$y=\sqrt{x}$

（C）$y=-x^3$　　（D）$y=\lg x$

（4）函数 $f(x)=x^3-x-7$ 的零点所在的区间是

（A）$(0,1)$　　（B）$(1,2)$

（C）$(2,3)$　　（D）$(3,4)$

（5）已知函数 $f(x)=x^2+\cos x$．若 $x_1+x_2=0$，则

（A）$f(x_1)<f(x_2)$　　（B）$f(x_1)>f(x_2)$

（C）$f(x_1)+f(x_2)=0$　　（D）$f(x_1)-f(x_2)=0$

（6）已知 $a=0.5$ ，$b=0.5^{0.6}$，$c=\log_{0.6}0.5$，则

（A） $a<b<c$　　（B） $b<a<c$

（C） $c<a<b$　　（D） $c<b<a$

（7）已知函数 $y=f(x)$ 可表示为

x	$0<x<2$	$2\le x<4$	$4\le x<6$	$6\le x\le 8$
y	1	2	3	4

则下列公众号：北京初高中数学结论正确的是

（A） $f(f(4))=3$　　（B） $f(x)$ 的值域是 $\{1,2,3,4\}$

（C） $f(x)$ 的值域是 $[1,4]$　　（D） $f(x)$ 在区间 $[4,8]$ 上单调递增

（8）在有声世界，声强级是表示声强度相对大小的指标．声强级 y（单位：dB）与声强度 I（单位：$\mathrm{W/m^2}$）之间的关系为 $y=10\lg\dfrac{I}{I_0}$，其中基准值 $I_0=10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$．若声强级为 60 dB时的声强度为 I_{60}，声强级为 90 dB时的声强度为 I_{90}，则 $\dfrac{I_{90}}{I_{60}}$ 的值为

（A） 10　　（B） 30　　（C） 100　　（D） 1000

（9）已知 α ，β 均为第一象限角，则“$\alpha<\beta$”是“$\sin\alpha<\sin\beta$”的

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（10）设函数 $f(x)=4|\sin\dfrac{\pi x}{2}|$，若存在实数 x_1，x_2，…，x_n，满足当 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_3)|+\cdots+|f(x_{n-1})-f(x_n)|=2021$，则正整数 n 的最小值为

（A） 505　　（B） 506　　（C） 507　　（D） 508

第二部分（非选择题　共 100 分）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）函数 $f(x)=\sqrt{x}+\lg(x-1)$ 的定义域为______.

（12）已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=2$，则 xy 的最大值为______.

（13）在平面直角坐标系中，角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $P(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$，则 $\tan\alpha=$______.

（14）若函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，则常数 φ 的一个取值为______.

（15）设 $a<b<0$，给出下列四个结论：

① $a+b<ab$；

② $2a<3b$；

③ $2^a<2^b$；

④ $a|a|<b|b|$.

其中所有正确结论的序号是______.

（16）已知函数 $f(x)=\frac{2^x+m}{2^x+1}$.

① 当 $m=0$ 时，$f(x)$ 的值域为______；

② 若对于任意 a，b，$c\in\mathbf{R}$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 的值总可作为某一个三角形的三边长，则实数 m 的取值范围是______.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

（17）（本小题 13 分）

已知全集$U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$， $B=\{x\mid 1<2^x<16\}$．

（Ⅰ）求 $(\complement_U A)\cap B$；

（Ⅱ）设非空集合 $D=\{x\mid a<x<2a+3,\ a\in\mathbf{R}\}$，若 $D\subseteq \complement_U A$，求实数 a 的取值范围.

（18）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\ (A>0,\ \omega>0,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 只能同时满足下列四个条件中的三个：① 最小正周期为 2π；② 最大值为 2；③ $f(0)=-1$；④ $f(-\frac{\pi}{3})=0$．

（Ⅰ）请指出 $f(x)$ 同时满足的三个条件，并说明理由；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的公众号：北京初高中数学解析式；

（Ⅲ）求 $f(x)$ 的单调递增区间.

（19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=2\sin^2 x+\cos(2x-\frac{\pi}{3})-1$．

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值；

（Ⅱ）若 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，求 $f(x)$ 的最大值和最小值；

（Ⅲ）将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $m\,(m>0)$ 个单位长度，所得公众号：北京初高中数学函数图象与函数 $y=\cos 2x$ 的图象重合，求实数 m 的最小值.

（20）（本小题 15 分）

设函数 $f(x)=x^2+\frac{m}{x}(m\in\mathbf{R})$，且 $f(2)=12$.

（Ⅰ）求实数 m 的值；

（Ⅱ）判断 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上的单调性，并用函数单调性的定义证明你的结论；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $f(x)=a$ 恰有三个实数解，写出实数 a 的取值范围（不必证明）.

（21）（本小题 15 分）

“函数 $\varphi(x)$ 的图象关于点 (m,n) 对称”的充要条件是“对于函数 $\varphi(x)$ 定义域内的任意 x，都有 $\varphi(x)+\varphi(2m-x)=2n$”．若公众号：北京初高中数学函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2-ax+a+1$.

（Ⅰ）求 $f(0)+f(2)$ 的值；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=\frac{4x}{2-x}$.

（i）证明函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(2,-4)$ 对称；

（ii）若对任意 $x_1\in[0,2]$，总存在 $x_2\in[-\frac{2}{3},1]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，求实数 a 的取值范围.

北京市朝阳区2020~2021学年度第一学期期末质量检测

高一数学参考答案

2021.1

一、选择题（共10小题，每小题5分，共50分）公众号：北京初高中数学

（1）B　（2）C　（3）A　（4）C　（5）D

（6）A　（7）B　（8）D　（9）D　（10）C

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）公众号：北京初高中数学

（11）$\{x|x>1\}$　（12）1　（13）$\frac{1}{2}$

（14）$\frac{\pi}{3}$（答案不唯一）　（15）①③④　（16）$(0,1)$；$[\frac{1}{2},2]$

三、解答题（共5小题，共70分）

（17）（共13分）

解：（Ⅰ）因为 $A=\{x\,|\,x^2-2x-3<0\}$， $B=\{x|1<2^x<16\}$，

所以 $A=\{x\,|-1<x<3\}$， $B=\{x\,|\,0<x<4\}$．

所以 $\complement_U A=\{x|x\leq -1$，或 $x\geq 3\}$．

所以 $(\complement_U A)\cap B=\{x\,|\,3\leq x<4\}$．　………………… 6

分

（Ⅱ）因为 $\complement_U A=\{x|x\leq -1$，或 $x\geq 3\}$，

由题意得 $\begin{cases}a<2a+3,\\2a+3\leq -1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<2a+3,\\a\geq 3,\end{cases}$

解得 $-3<a\leq -2$ 或 $a\geq 3$．

所以实数 a 的取值范围是 $(-3,-2]\cup[3,+\infty)$．　………………… 13分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 只能满足条件①，②，④. 公众号：北京初高中数学理由如下：

若函数 $f(x)$ 满足条件③，

则 $f(0)=A\sin\varphi=-1$.

这与 $A>0$，$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 矛盾，故 $f(x)$ 不能满足条件③.

所以函数 $f(x)$ 只能满足条件①，②，④. ………………… 3 分

（Ⅱ）由条件①，得 $\frac{2\pi}{|\omega|}=2\pi$，

又 $\omega>0$，所以 $\omega=1$.

由条件②，得 $|A|=2$，

又 $A>0$，所以 $A=2$.

由条件④，得 $f(-\frac{\pi}{3})=2\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=0$，

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$. ………………… 7 分

（Ⅲ）由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\le x\le 2k\pi+\frac{\pi}{6}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}]\ (k\in\mathbf{Z})$. ………………… 13 分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）$f(\frac{\pi}{6})=2\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})-1=\frac{1}{2}$. ………………… 3 分

（Ⅱ）$f(x)=2\sin^2 x+\cos(2x-\frac{\pi}{3})-1$

$=-\cos 2x+\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$.

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取最大值1；

当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 取最小值 $-\frac{1}{2}$. ………………… 10 分

（III）因为将 $f(x)$ 的图象向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度，得到

$g(x)=\sin(2x+2m-\frac{\pi}{6})$ 的图象，

又函数 $g(x)$ 的图象与 $y=\cos 2x$ 的图象重合，

所以 $2m-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$.

解得 $m=\frac{\pi}{3}+k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$.

又 $m>0$，

所以 m 的最小值是 $\frac{\pi}{3}$. ………………… 14 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=x^2+\frac{m}{x}$，且 $f(2)=12$，

所以 $f(2)=4+\frac{m}{2}=12$.

解得 $m=16$. ………………… 3 分

（Ⅱ）$f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增．证明如下：

由（Ⅰ）可知 $f(x)=x^2+\frac{16}{x}$.

$\forall x_1,x_2\in(2,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，有

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{16}{x_1}-x_2^2-\frac{16}{x_2}=(x_1-x_2)(x_1+x_2-\frac{16}{x_1x_2})$.

由 $x_1,x_2\in(2,+\infty)$，得 $x_1+x_2>4$， $x_1x_2>4$．

所以 $-4<-\dfrac{16}{x_1x_2}<0$．

于是 $x_1+x_2-\dfrac{16}{x_1x_2}>0$．

又由 $x_1<x_2$，得 $x_1-x_2<0$．

所以 $(x_1-x_2)(x_1+x_2-\dfrac{16}{x_1x_2})<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$．

所以 $f(x)=x^2+\dfrac{16}{x}$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增． ………………… 12 分

（Ⅲ）实数 a 的取值范围是 $(12,+\infty)$． ………………… 15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）公众号：北京初高中数学因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称，

所以 $f(x)+f(2\times1-x)=2\times2$．

所以 $f(0)+f(2)=4$． ………………… 4 分

（Ⅱ）(i) 因为 $g(x)=\dfrac{4x}{2-x}$， $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，

所以 $g(4-x)=\dfrac{4(4-x)}{x-2}$．

所以 $g(x)+g(4-x)=\dfrac{4x}{2-x}+\dfrac{4(4-x)}{x-2}=\dfrac{8(2-x)}{x-2}=-8$．

即对任意 $x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$，都有 $g(x)+g(4-x)=-8$ 成立．

故 $g(x)$ 的图象关于点 $(2,-4)$ 对称； ………………… 9 分

(ii) 因为 $g(x)=\dfrac{4x}{2-x}=\dfrac{8}{2-x}-4$，所以 $g(x)$ 在区间 $[-\dfrac{2}{3},1]$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在区间 $[-\dfrac{2}{3},1]$ 上的值域为 $[-1,4]$．

记 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的值域为集合 B，

由对任意 $x_1\in[0,2]$，总存在 $x_2\in[-\dfrac{2}{3},1]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，

知 $B\subseteq[-1,4]$．

① 当$\frac{a}{2}\le 0$，即$a\le 0$时，函数$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，

由对称性知，$f(x)$在$[1,2]$上单调递增，

所以$f(x)$在$[0,2]$上单调递增.

由$f(0)=a+1$，$f(0)+f(2)=4$，得$f(2)=3-a$，所以$B=[a+1,3-a]$.

由$B\subseteq[-1,4]$，有$\begin{cases}a+1\ge -1\\3-a\le 4\end{cases}$，结合$a\le 0$，得$-1\le a\le 0$.

② 当$0<\frac{a}{2}<1$，即$0<a<2$时，$f(x)$在$[0,\frac{a}{2}]$上单调递减，在$[\frac{a}{2},1]$上单调递增，

由对称性知，$f(x)$在$[1,2-\frac{a}{2}]$上单调递增，在$[2-\frac{a}{2},2]$上单调递减，

所以$f(x)$在$[0,\frac{a}{2}]$上单调递减，在$[\frac{a}{2},2-\frac{a}{2}]$上单调递增，在$[2-\frac{a}{2},2]$上单调递减.

结合对称性，$B=[f(2),f(0)]$或$B=[f(\frac{a}{2}),f(2-\frac{a}{2})]$.

因为$0<a<2$，

所以$f(0)=a+1\in(1,3)$，由$f(0)+f(2)=4$，得$f(2)=3-a\in(1,3)$；

$f(\frac{a}{2})=-\frac{a^2}{4}+a+1\in(1,2)$，由$f(\frac{a}{2})+f(2-\frac{a}{2})=4$，得$f(2-\frac{a}{2})\in(2,3)$.

所以当$0<a<2$时，$B\subseteq[-1,4]$，满足题意.

③ 当$\frac{a}{2}\ge 1$，即$a\ge 2$时，函数$f(x)$在$[0,1]$上单调递减，

由对称性知，$f(x)$在$[1,2]$上单调递减，

所以$f(x)$在$[0,2]$上单调递减.

由$f(0)=a+1$，$f(0)+f(2)=4$，得$f(2)=3-a$，所以$B=[3-a,a+1]$.

由$B\subseteq[-1,4]$，有$\begin{cases}3-a\ge -1\\a+1\le 4\end{cases}$，结合$a\ge 2$，得$2\le a\le 3$.

综上，实数a的取值范围为$[-1,3]$. ………………… 15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。