房山区 2021-2022 学年度第一学期期末学业水平调研高二数学

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）设 $A(3,2,1)$，$B(1,0,5)$，则 AB 的中点 M 的坐标为

（A）$(-2,-2,4)$　（B）$(-1,-1,2)$　（C）$(2,1,3)$　（D）$(4,2,6)$

（2）直线 l：$\sqrt{3}x-y+2=0$ 的倾斜角为

（A）$30°$　（B）$60°$　（C）$120°$　（D）$150°$

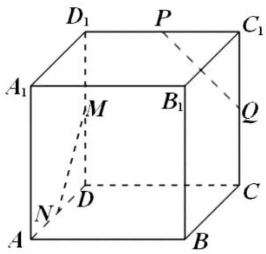
（3）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N,P,Q 分别为 DD_1,AD,C_1D_1,C_1C 的中点，则异面直线 MN 与 PQ 所成的角大小等于

（A）$30°$

（B）$45°$

（C）$60°$

（D）$90°$



（4）若平面 $\alpha\perp\beta$，平面 α 的法向量为 $\vec{n}=(2,1,-4)$，则平面 β 的法向量可以是

（A）(2,0,1)　（B）(-2,-1,4)　（C）(1,2,-1)　（D）$(1,\frac{1}{2},-2)$

（5）“$1<m<3$”是“方程 $\dfrac{x^2}{3-m}+\dfrac{y^2}{m-1}=1$ 表示椭圆”的

（A）充分不必要条件　（B）必要不充分条件（C）充要条件　（D）既不充分也不必要条件

（6）圆心为 $(-2,3)$ 且与 y 轴相切的圆的方程为

（A）$(x-2)^2+(y+3)^2=9$　（B）$(x+2)^2+(y-3)^2=9$

（C）$(x-2)^2+(y+3)^2=4$　（D）$(x+2)^2+(y-3)^2=4$

（7）已知 A 为抛物线 C：$y^2=2px\,(p>0)$ 上一点，点 A 到抛物线 C 的焦点 F 的距离为 8，到 y 轴的距离为 6，则 p 的值为

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

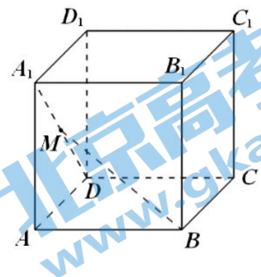
（8）已知半径为 1 的动圆 P 经过坐标原点，则圆心 P 到直线 $mx+y-2=0\,(m\in\mathrm{R})$ 的距离的最大值为

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

（9）已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 为椭圆 C 上一点，O 为坐标原点，若 $\triangle POF_2$ 为等边三角形，则椭圆 C 的离心率为

（A）$\sqrt{3}-1$　（B）$\sqrt{3}+1$　（C）$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　（D）$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

(10）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 A_1D 的中点，则



（A）直线 MB 与直线 B_1D_1 相交，直线 $MB\subset$ 平面 ABC_1

（B）直线 MB 与直线 D_1C 平行，直线 $MB\perp$ 平面 A_1C_1D

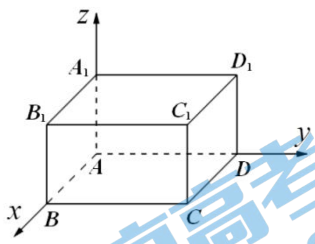
（C）直线 MB 与直线 AC 异面，直线 $MB\perp$ 平面 ADC_1B_1

（D）直线 MB 与直线 A_1D 垂直，直线 $MB//$ 平面 B_1D_1C

第二部分（非选择题 共 100 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(11）如图长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，若 $\overrightarrow{AC_1}=(2,2,1)$，则 $\overrightarrow{B_1D}$ 的坐标为__________.

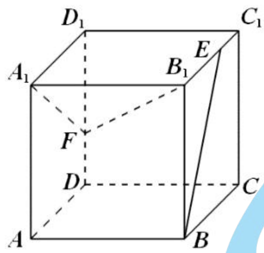


(12）已知二次函数 $y=2x^2$ 的图象是一条抛物线，则其准线方程为__________.

(13）若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，则其渐近线方程为__________.

(14）《九章算术》是我国古代数学名著，其中提到的“阳马”是指底面为矩形，有一侧棱垂直于底面的四棱锥．在阳马 $P-ABCD$ 的表面三角形中，直角三角形的个数为__________.

(15）如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，E，F 分别是棱 B_1C_1，DD_1 上的点，如果 $BE\perp$ 平面 A_1B_1F，则 C_1E 与 D_1F 长度之和为__________.



(16）心脏线，也称心形线，是一个圆上的固定一点在该圆绕着与其相切且半径相同的另外一个圆周滚动时所形成的轨迹，因其形状像心形而得名．心脏线的平面直角坐标方程可以表示为 $x^2+y^2+ay=a\sqrt{x^2+y^2}$，$a>0$，则关于这条曲线的下列说法：

①曲线关于 x 轴对称；

②当 $a=1$ 时，曲线上有 4 个整点（横纵坐标均为整数的点）；

③ a 越大，曲线围成的封闭图形的面积越大；

④与圆 $(x+a)^2+y^2=a^2$ 始终有两个交点.

其中，所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 5 小题，共 70 分。 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 14 分）

在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别为 $A(2,-2)$， $B(6,6)$， $C(0,6)$.

（I）设线段 AB 的中点为 M，求中线 CM 所在直线的方程；

（II）求边 AB 上的高所在直线的方程.

（18）（本小题 14 分）

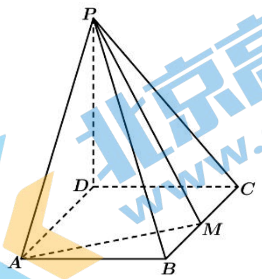
已知圆 M： $x^2+y^2-2x=0$ 与圆 N： $x^2+y^2-8x+a=0$ 外切.

（I）求实数 a 的值；

（II）若直线 $x-y-2=0$ 与圆 M 交于 A， B 两点，求弦 AB 的长.

（19）（本小题 14 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DC=1$，$AD=2$，M 为 BC 的中点.



（I）求证：$AD\perp PC$；

（II）求平面 PAM 与平面 PCD 所成的角的余弦值.

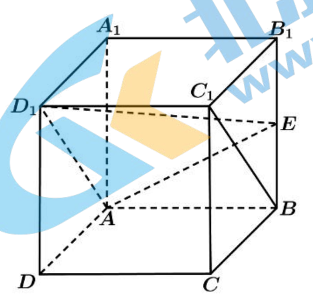
（20）（本小题 14 分）

如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 E 为 BB_1 的中点.

（I）求证：$BC_1 //$ 平面 AD_1E；

（II）求点 C_1 到平面 AD_1E 的距离；

（III）判断 B_1C_1 的中点 M 是否在平面 AD_1E 上？说明理由.



（21）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 上任意一点到两个焦点 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$ 的距离的和为 4. 经过点 $D(1,0)$ 且不经过点 $M(1,1)$ 的直线与椭圆 C 交于 P，Q 两点，直线 MQ 与直线 $x=4$ 交于点 E，直线 PE 与直线 MD 交于点 N.

（I）求椭圆 C 的标准方程，并写出左、右顶点的坐标；

（II）求证：$\triangle EMN$ 的面积为定值.

房山区 2021-2022 学年度第一学期（中学）期末考试参考答案

高二数学

第一部分选择题（每小题 5 分，共 50 分）

一、在下列各题的四个选项中，只有一项是符合题意的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	C	A	B	D	D	C	A	D

第二部分 非选择题（共 50 分）

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

（11）$(-2,2,-1)$

（12）$y=-\frac{1}{8}$

（13）$y=\pm 2x$

（14）4

（15）1

（16）②，③，④（含①得 0 分，部分得 3 分，全对得 5 分）

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

（17）（本小题 14 分）7+7

解：(I) 解：由题意，$\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别为 $A(2,-2)$，$B(6,6)$，$C(0,6)$，

设 AB 中点坐标为 (x_0,y_0)，由中点公式可得 $x_0=\frac{2+6}{2}=4$，$y_0=\frac{-2+6}{2}=2$，------3 分

即 AB 中点 M 的坐标为 $(4,2)$，又由斜率公式，可得 $k_{MC}=\frac{6-2}{0-4}=-1$，------3 分

所以中线 CM 所在直线的方程为 $y-6=-(x-0)$，即 $x+y-6=0$.------1 分

（II）解：由 $A(2,-2)$，$B(6,6)$，可得 $k_{AB}=\frac{6-(-2)}{6-2}=2$，------3 分

所以 AB 上的高所在直线的斜率为 $k=-\frac{1}{2}$，------3 分

则 AB 上的高所在直线的方程为 $y-6=-\frac{1}{2}(x-0)$，即 $x+2y-12=0$.------1 分

（18）（本小题 14 分）8+6

解：（I）圆 M：$(x-1)^2+y^2=1$，圆心 $M(1,0)$，半径 $r_1=1$，------2 分

圆 N：$x^2+y^2-8x+a=0$，圆心 $N(4,0)$，半径 $r_2=\sqrt{16-a}\,(a<16)$；------2 分

因为圆 M 与圆 N 相外切，所以 $|MN|=r_1+r_2$，即 $3=1+\sqrt{16-a}$，------2 分

解得 $a=12$.------2 分

（II）由（1）可知，圆 M：$(x-1)^2+y^2=1$，圆心 $M(1,0)$，半径 $r_1=1$，.

所以圆心 M 到直线 $x-y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，------3 分

即$|AB|=2\sqrt{r_1^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，故弦 AB 的长为$\sqrt{2}$.------3 分

（19）（本小题 14 分）4+10

解：

（Ⅰ）证明：$\because PD\perp$底面$ABCD$，$\therefore PD\perp AD$，------1 分　　或向量坐标

$\because ABCD$是矩形，$\therefore AD\perp CD$，------1 分　　或向量坐标

$\because PD\cap CD=D$，

$\therefore$ $AD\perp$平面PDC，　------1 分　　或点积 0

$\because PC\subset$平面PDC，

$\therefore AD\perp PC$．　------1 分

（Ⅱ）解：以点D为坐标原点，DA、DC、DP所在直线分别为x、y、z轴建立如图所示的空间直角坐标系$D-xyz$，　------1 分

$\because PD=DC=1$，$AD=2$，M 为BC的中点.

$\therefore D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$M(1,1,0)$，$P(0,0,1)$，

$\therefore \overrightarrow{PA}=(2,0,-1)$，$\overrightarrow{PM}=(1,1,-1)$，　------2 分

设平面PAM 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

$$\therefore\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}2x-z=0,\\ x+y-z=0,\end{cases}$$ ------1 分

令 $z=2$，则$x=1$，$y=1$

$\therefore \vec{n}=(1,1,2)$　------1 分

$\because$平面PCD的法向量为$\vec{m}=(1,0,0)$，　------2 分

$$\therefore\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1\times1+0\times1+0\times2}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+2^2}},$$ ------2 分

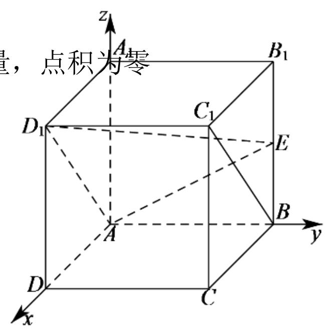
$\therefore$平面PAM 与平面PCD所成的角的余弦值$\frac{\sqrt{6}}{6}$.　------1 分

（20）（本小题 14 分）4+6+4

解：

（Ⅰ）正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB//C_1D_1$且$AB=C_1D_1$，

所以，四边形ABC_1D_1为平行四边形，$\therefore BC_1//AD_1$，　------2 分　　或向量，点积为零



$\because BC_1\not\subset$平面AD_1E，$AD_1\subset$平面AD_1E，　------1 分

$\therefore BC_1//$平面AD_1E；　------1 分

（Ⅱ）以点 A 为坐标原点，AD、AB、AA_1所在直线分别为x、y、z轴建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$，

------1 分

则 $A(0,0,0)$、$A_1(0,0,2)$、$D_1(2,0,2)$、$E(0,2,1)$，$\overrightarrow{AD_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，

设平面 AD_1E 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2x+2z=0\\ 2y+z=0\end{cases}$，------1 分

令 $z=-2$，则 $x=2$，$y=1$，则 $\vec{n}=(2,1,-2)$．　　------1 分

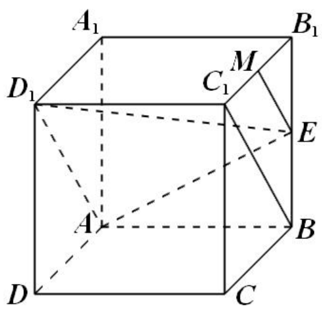
$\overrightarrow{C_1D_1}=(0,-2,0)$，　　------1 分

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{C_1D_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|(0,-2,0)\cdot(2,1,-2)\right|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{2}{3}.$$
------2 分

因此，点 C_1 到平面 AD_1E 的距离为 $\frac{2}{3}$．

（III）**方法一：**

如图，连结 ME．



$\because M$，E 分别是 B_1C_1，B_1B 的中点，

$\therefore ME // BC_1$．　　------1 分

由（Ⅰ）可知，$BC_1 // AD_1$，------1 分

$\therefore ME // AD_1$．　　------1 分

$\therefore M,E,A,D_1$ 共面．即点 M 在平面 AD_1E 上．---

方法二：

$M(1,2,2)$，所以 $\overrightarrow{AM}=(1,2,2)$．　　------1 分

又因为平面 AD_1E 的法向量为 $\vec{n}=(2,1,-2)$，------1 分

所以点 M 到平面 AD_1E 的距离：

$$d=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|2+2-4|}{3}=0$$
------1 分

$\therefore$ 点 M 在平面 AD_1E 上．　　------1 分

方法三：

$\overrightarrow{AM}=(1,2,2)$，------1 分

平面 AD_1E 的法向量为 $\vec{n}=(2,1,-2)$------1 分

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=2+2-4=0$．

$\therefore \overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$．　　------1 分

又 $\because A\in$ 平面 AD_1E，$\therefore$ 点 M 在平面 AD_1E 上．------1 分

（21）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）依题意得，$c=\sqrt{3}$，----------------1 分

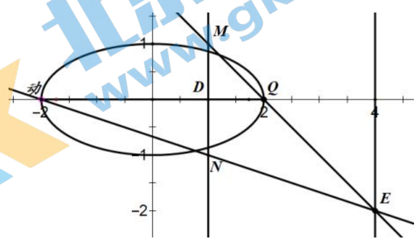
$2a=4$，$a=2$，----------------1 分

$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$

椭圆 C 的方程为 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ ----------------1 分

左、右顶点的坐标分别为 $(-2,0)$，$(2,0)$ -----------------1 分

（Ⅱ）①当 P，Q 两点的坐标分别为 $(-2,0)$，$(2,0)$ 时，



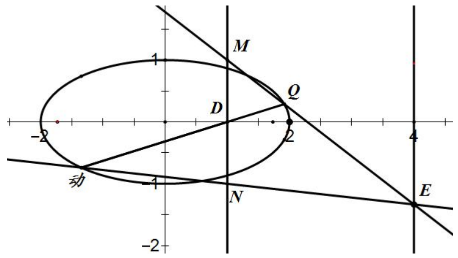
直线 MQ 的方程为 $y=-x+2$，点 $E(4,-2)$，

直线 PE 的方程为 $y=-\dfrac{1}{3}(x+2)$，

直线 PE 与直线 MD：$x=1$ 交于点 $N(1,-1)$． --------------1 分

$\triangle EMN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\cdot MN\cdot|4-1|=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$． -----------------1 分

②依题意可设 PQ 的方程为 $y=k(x-1)$，



代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $(4k^2+1)x^2-8k^2x+4(k^2-1)=0$ -----------------1 分

$\Delta=(-8k^2)^2-4(4k^2+1)4(k^2-1)>0$

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{4(k^2-1)}{4k^2+1}$． ------------------2 分

直线 MQ 的方程为 $y-1=\dfrac{y_2-1}{x_2-1}(x-1)$，

令 $x=4$ 得点 $E(4,\dfrac{3(y_2-1)}{x_2-1}+1)$， -----------------1 分

下面证明 $N(1,-1)$，$P(x_1,y_1)$，$E(4,\dfrac{3(y_2-1)}{x_2-1}+1)$ 三点在一条直线上

$\because x_1\neq 1$，$y_1=k(x_1-1)$，$y_2=k(x_2-1)$

$\therefore k_{PN}-k_{EN}=\dfrac{y_1+1}{x_1-1}-\dfrac{\dfrac{3(y_2-1)}{x_2-1}+2}{4-1}=\dfrac{k(x_1-1)+1}{x_1-1}-\dfrac{k(x_2-1)-1}{x_2-1}-\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}-\dfrac{2}{3}$ $\quad=\dfrac{x_1+x_2-2}{(x_1-1)(x_2-1)}-\dfrac{2}{3}$

$$=\frac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}-\frac{2}{3}=\frac{\frac{8k^2}{4k^2+1}-2}{\frac{4(k^2-1)}{4k^2+1}-(\frac{8k^2}{4k^2+1})+1}-\frac{2}{3}=0$$

----------------2 分

$\triangle EMN$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot MN\cdot|4-1|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$ 是定值. ----------------2 分