2024 年度高三寒假新结构适应性测试模拟试卷（二）

数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1．已知 $z-2\bar{z}=1+6\mathrm{i}$，则 z 的虚部为(　　)

A． -6　　B． $-6\mathrm{i}$

C．2　　D．$2\mathrm{i}$

2．已知集合 S，T 满足 $S\cup(\complement_{\mathbf{R}}T)=\mathbf{R}$，$S=\{0,1,2,4\}$，则 T 可能是(　　)

A．$\{0,1,2,4\}$　　B．$\{0,1,2,3\}$

C．$\{1,2,3,4\}$　　D．$\{0,1,2,4,5\}$

3．从小到大排列的数据 1，2，3，x，4，5，6，7，8，y，9，10 的第三四分位数为(　　)

A．3　　B．$\dfrac{3+x}{2}$

C．8　　D．$\dfrac{8+y}{2}$

4．已知函数 $f(x)=nx+\ln x(n\in\mathbf{N}^*)$的图象在点$\left(\frac{1}{n},f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$处的切线的斜率为 a_n，则数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 S_n 为(　　)

A．$\dfrac{n}{4(n+1)}$　　B．$\dfrac{1}{n+1}$

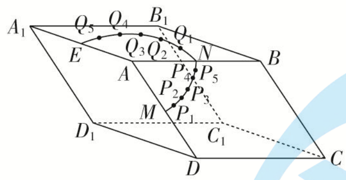
C．$\dfrac{3n^2+5n}{2(n+1)(n+2)}$　　D．$\dfrac{3n^2+5n}{8(n+1)(n+2)}$

5．已知直线 l：$4x-2y-7=0$ 与双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的两条渐近线分别交于点 A，B(不重合)，AB 的垂直平分线过点(3，0)，则双曲线 C 的离心率为(　　)

A．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

C．$\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

6．在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，所有棱长为 4，$\angle DAB=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle BAA_1=\dfrac{2\pi}{3}$，以 A 为圆心，2 为半径分别在平面 $ABCD$ 和平面 ABB_1A_1 内作弧$\overset{\frown}{MN}$，$\overset{\frown}{NE}$，点 M，N，E 分别在 AD，AB，AA_1 上，并将两弧各六等分，等分点依次为 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 以及 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4，Q_5，如图，一只蚂蚁欲从点 P_2 出发，沿平行六面体表面爬行至 Q_4，则其爬行的最短距离为(　　)



A．$\dfrac{4\pi}{3}$　　B．$2\sqrt{3}$

C．2　　D．$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

7．在我国古代，杨辉三角(如图 1)是解决很多数学问题的有力工具，从图 1 中可以归纳出等式：$C_1^1+C_2^1+C_3^1+…+C_n^1=C_{n+1}^2$，类比上述结论，借助杨辉三角解决下述问题：如图 2，该“刍童垛”共 2021 层，底层如图 3，一边 2023 个圆球，另一边 2022 个圆球，向上逐层每边减少 1 个圆球，顶层堆 6 个圆球，则此“刍童

垛”中圆球的总数为(　　)

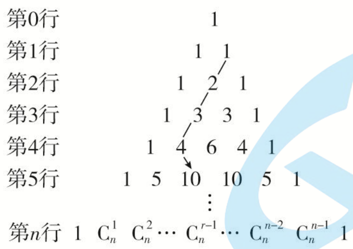


图 1 杨辉三角

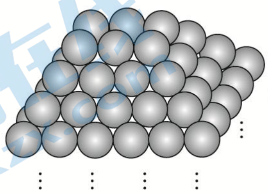


图 2 刍童垛

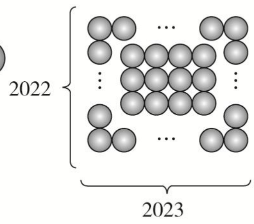


图 3 刍童垛底层

A．$2C_{2023}^3-2$　　　　B．$2C_{2024}^3-2$

C．C_{2024}^4-2　　　　D．C_{2023}^4-2

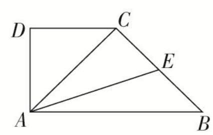
8．定义在正整数上的函数满足 $f(k+2)=\sqrt{3}f(k+1)-f(k)(k\in\mathbf{N}^*)$，则 $f(65)=$ (　　)

A．$f(1)$　　　　B．$f(3)$

C．$f(5)$　　　　D．$f(7)$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9.如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$AD\perp AB$，$AB=2AD=2CD=2$，E 是 BC 的中点，则(　　)



A．$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=-\dfrac{1}{2}$　　　　B．$\overrightarrow{EB}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C．$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　　　　D．$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

10．已知圆 C_1：$x^2+y^2=9$ 与圆 C_2：$(x-3)^2+(y-4)^2=16$，下列说法正确的

是(　　)

A．C_1与C_2的公切线恰有 4 条

B．C_1与C_2公共弦的方程为 $3x+4y-9=0$

C．C_1与C_2公共弦的弦长为$\frac{12}{5}$

D．若 P，Q 分别是圆 C_1，C_2 上的动点，则$|PQ|_{max}=12$

11．甲、乙两队进行比赛，若双方实力随时间的变化遵循兰彻斯特模型：

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{(e^{x}+e^{-x})X_0}{2}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot\dfrac{(e^{x}-e^{-x})Y_0}{2}, \\ y(t)=\dfrac{(e^{x}+e^{-x})Y_0}{2}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot\dfrac{(e^{x}-e^{-x})X_0}{2}, \\ x=\sqrt{ab}\ t, \end{cases}$$

其中正实数 X_0，Y_0 分别为甲、乙两方初始实力，t 为比赛时间；$x(t)$，$y(t)$分别为甲、乙两方 t 时刻的实力；正实数 a，b 分别为甲对乙、乙对甲的比赛效果系数．规定当甲、乙两方任何一方实力为 0 时比赛结束，另一方获得比赛胜利，并记比赛持续时长为 T.则下列结论正确的是(　　)

A．若 $X_0>Y_0$ 且 $a=b$，则 $x(t)>y(t)(0\le t\le T)$

B．若 $X_0>Y_0$ 且 $a=b$，则 $T=\frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{X_0+Y_0}{X_0-Y_0}}$

C．若$\frac{X_0}{Y_0}>\frac{b}{a}$，则甲方比赛胜利

D．若$\frac{X_0}{Y_0}>\sqrt{\frac{b}{a}}$，则甲方比赛胜利

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，点 A 在 y 轴上，线段 AF 的延长线交 C 于点 B，若$|AF|=|FB|=6$，则 $p=$________．

13．一个袋子中有 $n(n\in\mathbf{N}^*)$个红球和 5 个白球，每次从袋子中随机摸出 2 个球．若“摸出的两个球颜色不相同”发生的概率记为 $P(n)$，则 $P(n)$的最大值为________．

14．已知在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且满足 $\cos A(b-a\cos C)=\sqrt{3}c\cos C-a\sin A\sin C$，$b^2+a^2=c^2+6$，则△$ABC$ 的面积为________．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $2(b^2-a^2)+c^2=0$.

(1)求$\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}$的值；

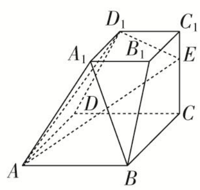
(2)求 $A-B$ 的最大值．

16．数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=\dfrac{n(1+a_n)}{2}$，a_1，a_2，a_5 依次成等比数列(公比不等于 1)．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\dfrac{(-1)^{n+1}n}{a_na_{n+1}}$，$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

17.如图，四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的下底面和上底面分别是边长为 4 和 2 的正方形，侧棱 CC_1 上点 E 满足$\dfrac{C_1E}{C_1C}=\dfrac{1}{3}$.



(1)证明：A_1B∥平面 AD_1E；

(2)若 $CC_1\perp$平面 $ABCD$，且 $CC_1=3$，求直线 BB_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦

值.

18．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，A 为 C 的上顶点，过 A 的直线 l 与 C 交于另一点 B，与 x 轴交于点 D，点 O 为坐标原点.

(1)若$|AB|=\frac{\sqrt{15}}{2}$，求 l 的方程；

(2)已知 P 为 AB 的中点，y 轴上是否存在定点 Q，使得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{DQ}=0$？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，说明理由.

19．已知函数 $f(x)=\sin^2x+ax^2$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 不等式 $\sin(2\cos x)+a^2x^2\geq af(x)$恒成立, 求实数 a 的取值范围.