请用蓝色或黑色墨水钢笔或圆珠笔填写下列考号及姓名项：

学　校

班　级

姓　名

装 订 线（装订线内不要答题）

三省三校2019——2020（上）第一次内考卷

理科数学

本试卷共4页，23题。全卷满分150分，考试时间120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本卷命题范围：集合与常用逻辑、函数与导数、三角函数及解三角形、平面向量、数列、不等式＋选考内容。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 已知集合 $A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{x|y=\sqrt{(x+1)(3-x)}\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-1,2)$　　B. $[-1,2]$　　C. $(-2,-1)$　　D. $(2,3)$

2. 设 p：$\frac{x-3}{x}<0$，q：$(x-a)(x-a+2)\leqslant 0$，若 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是

A. $(-1,0)$　　B. $[2,3]$　　C. $(2,3)$　　D. $[-1,0]$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，$\boldsymbol{c}=(4,3)$，若 $(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$，则实数 $\lambda=$

A. $\frac{1}{5}$　　B. 5　　C. 4　　D. $\frac{1}{4}$

4. 若 θ 是三角形的一个内角，且 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$，则 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=$

A. $\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{5}$　　C. $\frac{7}{5}$　　D. $-\frac{7}{5}$

5. 曲线 $f(x)=x^2+x\ln x$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-ay-1=0$ 平行，则 $a=$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

6. 等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，公比为 q，若 $a_1+a_2+a_3=2, S_6=9S_3$，则 $S_9=$

A. 50　　B. 100　　C. 146　　D. 128

7. 已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，设 $a=f(\log_3 0.1), b=f(3^{-0.2}), c=f(3^{1.1})$，则

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

8. 关于函数 $f(x)=x+\sin x$，下列说法错误的是

A. $f(x)$是奇函数　　B. $f(x)$是周期函数

C. $f(x)$有零点　　D. $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

9. 已知偶函数 $f(x)$的图象经过点$(-1,-3)$，且当 $0\leqslant a<b$ 时，不等式$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 恒成立，则使得 $f(x-2)+3<0$ 成立的 x 的取值范围为

A. $(3,+\infty)$　　B. $(1,3)$

C. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$　　D. $[1,3]$

10. 已知实数 x,y 满足不等式组$\begin{cases}x+y\leqslant 2,\\ x-y\geqslant 1,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$目标函数 $z=\frac{y+1}{x+3}$的最大值是

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{5}{9}$　　D. $\frac{1}{3}$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边为 a,b,c，若$\triangle ABC$ 的面积为$-\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$，$b=2\sqrt{3}$，则 $a+c$的最大值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{7}{2}x-x\ln x, x>0\\ -x^2, x\leqslant 0\end{cases}$，令函数 $g(x)=f(x)-\frac{3}{2}x-a$，若函数 $g(x)$有两个不同零点，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{9}{16},\mathrm{e}\right)$　　B. $(-\infty,0)$

C. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{9}{16},\mathrm{e}\right)$　　D. $(-\infty,0)\cup\left[\frac{9}{16},\mathrm{e}\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 $y=f(x)$是偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=3^x-1$，则 $f\left(\log_3\frac{1}{2}\right)=$________.

14. 若关于 x 的不等式 $x^2-5x+a^2+a<0$ 的解集是$(2,3)$，则 $a=$________.

15. 设 D 为$\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{CD}$，若$\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\mu}{4}\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu=$________.

16. 下列命题中：

①已知函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $[0,1]$，则函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[1,3]$；

②若集合 $A=\{x|x^2+kx+4=0\}$ 中只有一个元素，则 $k=\pm4$；

③函数 $y=\dfrac{1}{1-2x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数；

④方程 $2^{|x|}=\log_2(x+2)+1$ 的实根的个数是 1.

所有正确命题的序号是________（请将所有正确命题的序号都填上）.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22～23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）

已知命题 p：$\forall x\in[-2,-1]$，不等式 $a<\dfrac{2}{x}-x$ 恒成立；命题 q：函数 $\forall x\in[1,+\infty)$，$\dfrac{1}{x}-x\leqslant 4a^2-1$.

(1)若命题 p 为真，求 a 的取值范围；

(2)若命题 $p\land q$ 是真命题，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\dfrac{x}{4}+1$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间；

(2)求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值，并求出取得最值时 x 的值.

19.（本小题满分 12 分）

已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(1-x)$，$f(2)=0$，且 0 为函数 $g(x)=f(x)-2$ 的零点.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)当 $x\in[0,1]$ 时，不等式 $f(x)<-x+m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

20.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$是等差数列,$a_2=3$,$a_5=6$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $2b_n-S_n=2$.

(1)求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式;

(2)记 $c_n=\dfrac{a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}\cdot b_n}$,求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}ax^2+(1+a)x-\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=0$ 时,求函数 $f(x)$的最小值;

(2)当 $a>0$ 时,求函数 $f(x)$的单调区间;

(3)当 $a=0$ 时,设函数 $g(x)=xf(x)$,若存在区间$[m,n]\subseteq\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$,使得函数 $g(x)$在$[m,n]$上的值域为$[k(m+2)-2,k(n+2)-2]$,求实数 k 的最大值.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 两题中任选一题做答.注意:只能做所选定的题目.如果多做,则按所做的第一题计分,做答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22.[选修 4-4:坐标系与参数方程](本小题满分 10 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为:$\begin{cases}x=1+\sqrt{5}\cos\alpha,\\ y=\sqrt{5}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$.

(1)求 C_1 的极坐标方程;

(2)若直线 C_2 与曲线 C_1 相交于 M,N 两点,求$|MN|$.

23.[选修 4-5:不等式选讲](本小题满分 10 分)

已知 $f(x)=|x+1|+|ax+1|$.

(1)当 $a=-1$ 时,求不等式 $f(x)\geqslant3$ 的解集;

(2)若 $x\geqslant1$ 时,不等式 $f(x)\geqslant x+2$ 恒成立,求 a 的取值范围.

装

订

线

(装订线内不要答题)

东北师大附中
哈师大附中 2020届高三第一次联合模拟考试
辽宁省实验中学

理科数学参考答案与解析

1. B　由题意得，$A=(-2,2)$，$\because B$ 中，$(x+1)(3-x)\geqslant 0$，$\therefore B=[-1,3]$，$\therefore A\cap B=[-1,2]$，故选 B.

2. C　由不等式 $\frac{x-3}{x}<0$，解得 $0<x<3$，由 $(x-a)(x-a+2)\leqslant 0$ 得 $a-2\leqslant x\leqslant a$，$p$ 是 q 的必要不充分条件，可知 $\begin{cases}a-2<0,\\a<3,\end{cases}$ 所以 $2<m<3$，故实数 m 的取值范围是 $(2,3)$. 故选 C.

3. A　$\because \boldsymbol{a}=(3,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,1)$，$\therefore \lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3\lambda-2,2\lambda+1)$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=(1,1)$，又 $(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$，$\therefore (3\lambda-2)\times 1+(2\lambda+1)\times 1=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{5}$. 故选 A.

4. C　$\because \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$，$\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，又 $\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\therefore \sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta+\sin\theta=\frac{7}{5}$，故选 C.

5. A　因为 $f(x)=x^2+x\ln x$，所以 $f'(x)=2x+\ln x+1$，因此，曲线 $f(x)=x^2+x\ln x$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 $k=f'(1)=2+1=3$，又该切线与直线 $x-ay-1=0$ 平行，所以 $\frac{1}{a}=3$，$\therefore a=\frac{1}{3}$. 故选 A.

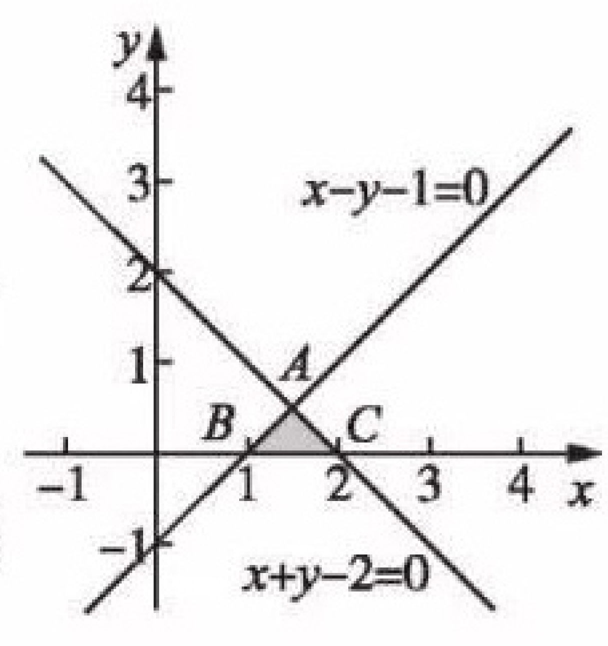
6. C　由题意得 $\because S_3=a_1+a_2+a_3=2$，$S_6=9S_3=18$，$\therefore S_6-S_3=18-2=16$，根据等比数列的性质可知，$S_3$，$S_6-S_3$，$S_9-S_6$ 构成等比数列，故 $(S_6-S_3)^2=S_3(S_9-S_6)$，$\therefore S_9-S_6=128$，故 $S_9=S_6+128=146$，故选 C.

7. D　$\because f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，$\therefore f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，$\therefore f(x)+f(-x)=0$，$\therefore f(-x)=-f(x)$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore$ 当 $x>0$ 时，易得 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 为增函数，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$\because \log_3 0.1<0$，$0<3^{0.2}<1$，$3^{1.1}>3$，$\therefore f(3^{1.1})>f(3^{0.2})>f(\log_3 0.1)$，$\therefore c>b>a$，故选 D.

8. B　$f(-x)=-x-\sin x=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数，故 A 正确；根据周期的定义，可知它一定不是周期函数，故 B 错误；因为 $f(0)=0+\sin 0=0$，$f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上有零点，故 C 正确；由于 $f'(x)=1+\cos x\geqslant 0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，故 D 正确. 故选 B.

9. C　根据题意，$f(x)$ 为偶函数，且经过点 $(-1,-3)$，则点 $(1,-3)$ 也在函数图象上，当 $0\leqslant a<b$ 时，不等式 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为减函数，因为 $f(x-2)+3<0$，所以 $f(x-2)<-3\Rightarrow f(|x-2|)<f(1)\Rightarrow|x-2|>1$，解得 $x<1$ 或 $x>3$，选 C.

10. D　不等式组 $\begin{cases}x+y\leqslant 2,\\x-y\geqslant 1,\\y\geqslant 0\end{cases}$ 所表示的平面区域如图所示：

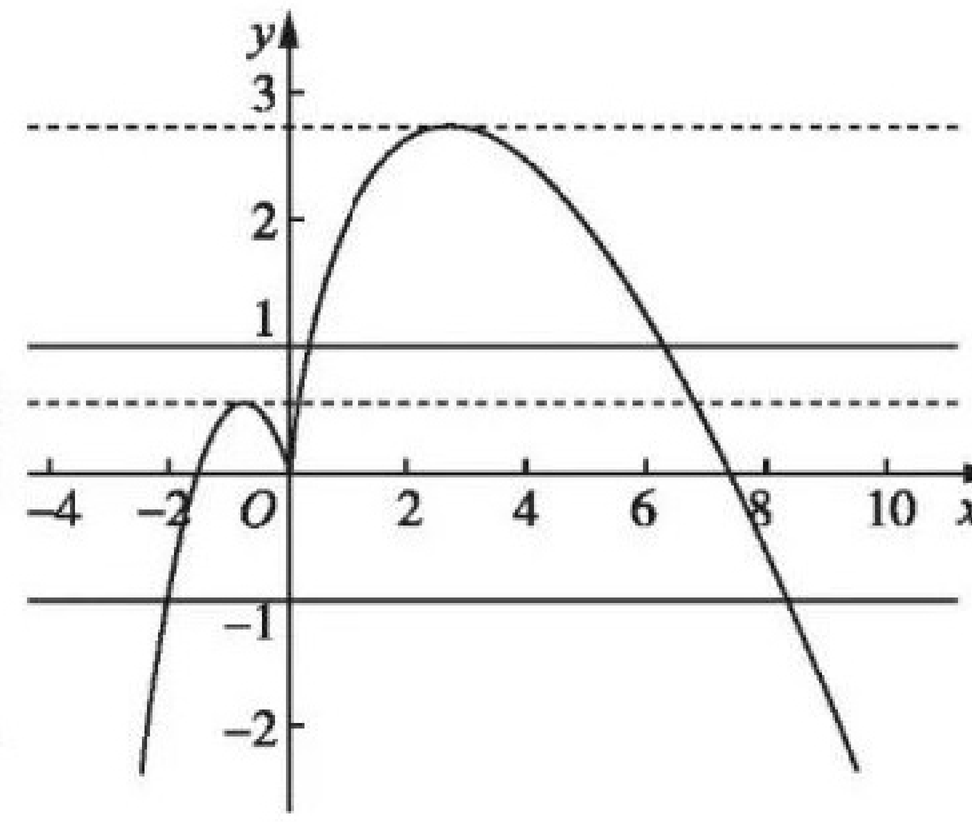


$z=\frac{y+1}{x+3}$ 表示过可行域内的点 (x,y) 与点 $M(-3,-1)$ 的直线的斜率的最大值，由 $\begin{cases}x+y-2=0\\x-y-1=0\end{cases}$，解得 $A\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，这时 $k_{MA}=\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{\frac{3}{2}-(-3)}=\frac{1}{3}$，故目标函数 $z=\frac{y+1}{x+3}$ 的最大值是 $\frac{1}{3}$，故选 D.

11. D　$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$，$\therefore \frac{1}{2}ac\sin B=-\frac{\sqrt{3}}{2}ac\cos B$，$\tan B=-\sqrt{3}$，$B=\frac{2\pi}{3}$.

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-ac\geqslant(a+c)^2-\frac{(a+c)^2}{4}=\frac{3}{4}(a+c)^2$，$b=2\sqrt{3}$ 代入，得 $\frac{3}{4}(a+c)^2\leqslant(2\sqrt{3})^2$，$\therefore (a+c)^2\leqslant 16$，即 $a+c\leqslant 4$，当且仅当 $a=c$ 时，“=”成立，故 $a+c$ 的最大值为 4. 故选 D.

12. C　令 $F(x)=f(x)-\frac{3}{2}x=\begin{cases}2x-x\ln x, x>0,\\ -x^2-\frac{3}{2}x, x\leqslant 0,\end{cases}$



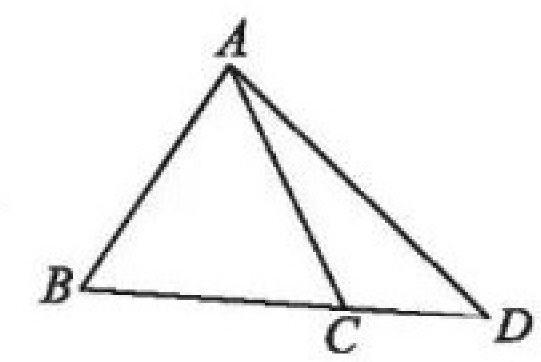
当 $x>0$ 时，函数 $F'(x)=2-(lnx+1)=1-\ln x$，
由 $F'(x)>0$ 得 $1-\ln x>0$ 得 $\ln x<1$，得 $0<x<\mathrm{e}$，
由 $F'(x)<0$ 得 $1-\ln x<0$ 得 $\ln x>1$，得 $x>\mathrm{e}$，当 x 值趋向于正无穷大时，y 值也趋向于负无穷大，即当 $x=\mathrm{e}$时，函数 $F(x)$ 取得极大值，
极大值为 $F(\mathrm{e})=2\mathrm{e}-\mathrm{e}\ln \mathrm{e}=2\mathrm{e}-\mathrm{e}=\mathrm{e}$，
当 $x\leqslant 0$ 时，$F(x)=-x^2-\frac{3}{2}x=-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{16}$，是二次函数，
在轴处取得最大值$\frac{9}{16}$，作出函数 $F(x)$的图象如图：

要使 $F(x)=a$(a 为常数)有两个不相等的实根，则 $a<0$ 或$\frac{9}{16}<a<e$，即若函数 $g(x)$有两个不同零点，实数 a 的取值范围是$(-\infty,0)\cup\left(\frac{9}{16},\mathrm{e}\right)$，故选 C.

13. -1　$\because f(x)$是偶函数，$\therefore f\left(\log_3\frac{1}{2}\right)=f(-\log_3 2)=f(\log_3 2)=3^{\log_3 2}-1=2-1=1$.

14. -3 或 2　因为 $x^2-5x+a^2+a<0$ 的解集是$(2,3)$，所以 2，3 是方程 $x^2-5x+a^2+a=0$ 的根，故满足 $a^2+a=2\times3=6$，可得 $a=-3$ 或 2.

15. $\frac{9}{2}$　如图所示，由$\overrightarrow{BC}=4\,\overrightarrow{CD}$，可知，$B$、$C$、$D$ 三点在同一直线上，图形如右：



根据题意及图形，可得：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$，$\because\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\mu}{4}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\begin{cases}\frac{\lambda}{2}=-\frac{1}{4},\\ \frac{\mu}{4}=\frac{5}{4},\end{cases}$，解得：$\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2},\\ \mu=5,\end{cases}$，则 $\lambda+\mu=\left(-\frac{1}{2}\right)+5=\frac{9}{2}$.

16. ②③　对于①，因为函数 $y=f(2x+1)$的定义域为$[0,1]$，所以 $0\leqslant 2x+1\leqslant 1$，解得$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$，故 $y=f(x)$的定义域应该是$\left[-\frac{1}{2},0\right]$，故①错误；对于②，$\Delta=k^2-16=0$，故 $k=\pm4$，故②正确；对于③，画出 $y=\frac{1}{1-2x}$的图象或利用定义可判定 $y=\frac{1}{1-2x}$在$(-\infty,0)$上是增函数；对于④，在同一坐标系中作出 $y=2^{|x|}$，$y=\log_2(x+2)+1$ 的图象，由图可知有两个交点. 故方程的实根的个数为 2，故④错误，故填②③.

17. 解：(1)p 为真，即 $\forall x\in[-2,-1]$，不等式 $a<\frac{2}{x}-x$ 恒成立；

只需 $x\in[-2,-1]$，$a<\left(\frac{2}{x}-x\right)_{\min}$ 即可，

由函数 $y=\frac{2}{x}-x$ 在$[-2,-1]$递减，可得 y 的最小值为-1，可得 $a<-1$. ………………………… 6 分

(2)若 q 为真命题，则$\left(\frac{1}{x}-x\right)_{\max}\leqslant 4a^2-1$，即 $4a^2-1\geqslant 0$，故 $a\leqslant-\frac{1}{2}$或 $a\geqslant\frac{1}{2}$；

因为命题 $p\wedge q$ 是真命题，所以 p，q 均为真命题，故 a 满足$\begin{cases}a<-1,\\ a\leqslant-\frac{1}{2}\text{或 }a\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$可得 $a<-1$，

则可知参数 t 的范围是$(-\infty,-1)$. ………………………………………………… 12 分

18. 解：(1)因为 $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\frac{x}{4}+1=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{x}{2}$，

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

所以函数 $f(x)$的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\frac{5\pi}{6}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{3}+4k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{5\pi}{6}+4k\pi,\frac{11\pi}{3}+4k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. …………………………………… 6 分

(2)因为 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$

所以当 $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时 $x=\frac{\pi}{3}$. …………………………………… 12 分

19. 解：(1)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，

由题意可知，$f(x)=f(1-x)$，得到 $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$，即得到 $a=-b$，

又因为 0 是函数 $g(x)=f(x)-2$ 的零点，即 0 是方程 $ax^2+bx+c-2=0$ 的根，

即满足 $c-2=0$，得 $c=2$，又 $\because f(2)=0$，$\therefore 4a+2b+c=0\Rightarrow 4a+2b+2=0$

$\because\begin{cases}a=-b,\\4a+2b+2=0,\end{cases}\therefore\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}\therefore f(x)=-x^2+x+2$. …………………………………… 6 分

(2)当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)<-x+m$ 恒成立，即 $m>-x^2+2x+2$ 恒成立；

令 $h(x)=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3,x\in[0,1]$，

则 $h(x)_{\max}=g(1)=3$，$\therefore m>3$. …………………………………… 12 分

20. 解：(1)由已知得 $\begin{cases}a_1+d=3\\a_1+4d=6\end{cases}$，解得 $a_1=2,d=1$，所以 $a_n=n+1$ …………………………………… 2 分

当 $n=1$ 时，$2b_1-b_1=2$，$\therefore b_1=2$ ① …………………………………… 3 分

$\begin{cases}2b_n-S_n=2\\\text{当 }n\geqslant2\text{ 时},2b_{n-1}-S_{n-1}=2\end{cases}$，当 $n\geqslant2$ 时，$b_n=2b_{n-1}$ ② …………………………………… 5 分

由①，②得 $b_n=2^n$ …………………………………… 6 分

(2)由 (1)知，所以 $c_n=\frac{n+3}{2^n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ …………………………………… 8 分

$\Rightarrow c_n=\frac{1}{2^{n-1}\cdot(n+1)}-\frac{1}{2^n\cdot(n+2)}$ …………………………………… 10 分

$\Rightarrow T_n=\left(\frac{1}{2^0\cdot2}-\frac{1}{2^1\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2^1\cdot3}-\frac{1}{2^2\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{2^2\cdot4}-\frac{1}{2^3\cdot5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}\cdot(n+1)}-\frac{1}{2^n\cdot(n+2)}\right)$

$\therefore T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n\cdot(n+2)}$. …………………………………… 12 分

21. 解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=x-\ln x(x>0)$，这时的导数 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$，

令 $f'(x)=0$，即 $1-\frac{1}{x}=0$，解得 $x=1$，令 $f'(x)>0$ 得到 $x>1$，令 $f'(x)<0$ 得到 $0<x<1$，

故函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增；故函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 时取到最小值，

故 $f(x)\min=f(1)=1$； …………………………………… 4 分

(2)当 $a>0$ 时，函数 $f(x)=-\frac{1}{2}ax^2+(1+a)x-\ln x$ 导数为

$f'(x)=-ax+1+a-\frac{1}{x}=-\frac{(x-1)(ax-1)}{x}$，

若 $a=1$ 时，$f'(x)\leqslant0$，$f(x)$ 单调递减

若 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<1$，当 $x>1$ 或 $0<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，当 $\frac{1}{a}<x<1$ 时，$f'(x)>0$，

即函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，在区间 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 上单调递增.

若 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，当 $x>\frac{1}{a}$ 或 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $1<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增.

综上，若 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 的减区间为 $(0,+\infty)$，无增区间

若 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 的减区间为 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$(1,+\infty)$，增区间为 $\left(\frac{1}{a},1\right)$

若 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的减区间为 $(0,1)$，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，增区间为 $\left(1,\frac{1}{a}\right)$ …………………………………… 8 分

(3)当 $a=0$ 时,设函数 $g(x)=xf(x)=x^2-x\ln x$

令 $g'(x)=2x-\ln x-1, g''(x)=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}(x>0)$

当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$g''(x)\geqslant0$,$g'(x)$ 为增函数,$g'(x)\geqslant g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln 2>0$,$g(x)$ 为增函数,$g(x)$ 在区间 $[m,n]\subseteq\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上递增,$\because g(x)$ 在 $[m,n]$ 上的值域是 $[k(m+2)-2,k(n+2)-2]$,

所以 $g(x)=k(x+2)-2$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上至少有两个不同的正根 $m,n\left(m>n\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$,

$k=\dfrac{g(x)+2}{x+2}$,令 $F(x)=\dfrac{x^2-x\ln x+2}{x+2}$,

求导得,$F'(x)=\dfrac{x^2+3x-2\ln x-4}{(x+2)^2}$

令 $G(x)=x^2+3x-2\ln x-4\left(x\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$

则 $G'(x)=2x+3-\dfrac{2}{x}=\dfrac{(2x-1)(x+2)}{x}\left(x\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$

所以 $G(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 递增,$G\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$,$G(1)=0$,

当 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$,$G(x)<0$,$\therefore F'(x)<0$,当 $x\in[1,+\infty)$,$G(x)>0$,$\therefore F'(x)>0$,

所以 $F(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上递减,在 $[1,+\infty)$ 上递增,

$\therefore F(1)<k\leqslant F\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$\therefore k\in\left(1,\dfrac{9+\ln 4}{10}\right]$,

$\therefore k$ 的最大值为 $\dfrac{9+\ln 4}{10}$. …………………………………………………………………… 12 分

22. 解:(1)曲线 C_1 的参数方程为:$\begin{cases}x=1+\sqrt{5}\cos\alpha,\\y=\sqrt{5}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),

转换为直角坐标方程为:$(x-1)^2+y^2=5$,

转换为极坐标方程为:$\rho^2-2\rho\cos\theta-4=0$. ……………………………………………………… 5 分

(2)直线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$. 转换为参数方程为:$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数).

把直线的参数方程代入 $(x-1)^2+y^2=5$,

得到:$t^2-\sqrt{2}t-4=0$,(t_1 和 t_2 为 M、N 对应的参数),

故:$t_1+t_2=\sqrt{2}$,$t_1\cdot t_2=-4$.

所以:$|MN|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=3\sqrt{2}$. ……………………………………… 10 分

23. 解:(1)当 $a=-1$ 时,不等式 $f(x)\geqslant3$ 可化简为 $|x+1|+|x-1|\geqslant3$. ………………………… 1 分

当 $x<-1$ 时,$-x-1+1-x\geqslant3$,解得 $x\leqslant-\dfrac{3}{2}$,所以 $x\leqslant-\dfrac{3}{2}$; ……………………………… 2 分

当 $-1\leqslant x<1$ 时,$x+1+1-x\geqslant3$,无解; ……………………………………………………… 3 分

当 $x\geqslant1$ 时,$x+1+x-1\geqslant3$,解得 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$,所以 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$. ……………………………………… 4 分

综上,不等式 $f(x)\geqslant3$ 的解集为 $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. ……………………………………… 5 分

(2)当 $x\geqslant1$ 时,不等式 $f(x)\geqslant x+2$ 可化简为 $|ax+1|\geqslant1$. …………………………………… 6 分

由不等式的性质得 $ax+1\leqslant-1$ 或 $ax+1\geqslant1$,

即 $ax\leqslant-2$ 或 $ax\geqslant0$. …………………………………………………………………………… 7 分

当 $x\geqslant1$ 时,不等式 $f(x)\geqslant x+3$ 恒成立转化为 $a\leqslant-\dfrac{2}{x}$ 或 $a\geqslant0$ 恒成立; ……………………… 8 分

则 $a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant0$.

综上,所求 a 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$. …………………………………………… 10 分