河北省衡水中学 2022 届上学期高三年级五调考试

数　学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。共 4 页，总分 150 分，考试时间 120 分钟。

第Ⅰ卷（选择题　共 60 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x \mid |x-2|<1\}$，$B=\{x \mid \log_2 x<1\}$，则 $A\cap B=$

A．(0，2)　　B．(0，3)　　C．(1，2)　　D$(-\infty，3)$

2．6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去 1 个场馆，甲场馆安排 1 名，乙场馆安排 2 名，丙场馆安排 3 名，则不同的安排方法共有

A．120 种　　B．90 种　　C．60 种　　D．30 种

3．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等，M 为 A_1C_1 的中点，则异面直线 AM 与 BC_1 所成角的余弦值为

A．$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

4．已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则 $|QF|=$

A．$\dfrac{7}{2}$　　B．3　　C．$\dfrac{5}{2}$　　D．2

5．已知圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$，点 P 在直线 $y=x+3$ 上，线段 AB 为圆 C 的直径，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为

A．2　　B．$\dfrac{5}{2}$　　C．3　　D．$\dfrac{7}{2}$

6．如图所示的“数字塔”有以下规律：每一层最左与最右的数字均为 2，除此之外每个数字均为其两肩的数字之积，则该“数字塔”前 10 层的所有数字之积最接近（参考数据：lg2≈0.3）

2

2　2

2　4　2

2　8　8　2

2　16　64　16　2

……

A．10300　　B．10400　　C．10500　　D．10600

7．已知函数 $f(x)$ 是偶函数，且对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，设 $a=f\left(\dfrac{3}{2}\right),b=f(\log_3 7)$，$c=f(-0.8^3)$，则

A．$b<a<c$　　B．$c<a<b$　　C．$c<b<a$　　D．$a<c<b$

8. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点、右焦点分别为 A，F，过点 A 的直线 l 与 C 的一条渐近线交于点 Q，直线 QF 与 C 的一个交点为 B，若 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{FB}$，且 $\overrightarrow{BQ}=3\overrightarrow{FQ}$，则 C 的离心率为

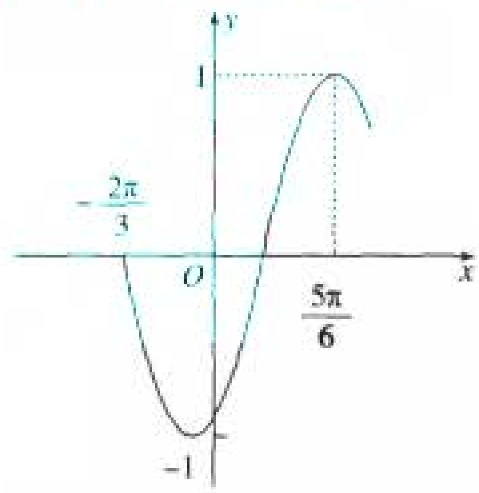
A. 2　　B. $\sqrt{5}-1$　　C. $\dfrac{2+\sqrt{5}}{3}$　　D. $2+\sqrt{5}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 若公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{17}=S_{18}$，则下列各式的值为 0 的是

A. a_{17}　　B. S_{35}　　C. $a_{17}-a_{19}$　　D. $S_{19}-S_{16}$

10. 函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\pi<\varphi<0)$ 的部分图象如图所示，则下列说法正确的是



A. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到一个奇函数的图象

B. $f(x)$ 的图象的一条对称轴为直线 $x=-\dfrac{\pi}{6}$

C. $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{17\pi}{6},\dfrac{23\pi}{6}\right]$ 上单调递增

D. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{4\pi}{3},0\right)$ 对称

11. 黄金分割是一种数学上的比例，是自然的数美．黄金分割具有严格的比例性、艺术性、和谐性，蕴藏着丰富的美学价值．应用时一般取 0.618．将离心率为黄金比 $1\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的倒数，即 $e_0=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的双曲线称为黄金双曲线，若 a，b，c 分别是实半轴、虚半轴、半焦距的长，则对黄金双曲线，下列说法正确的有

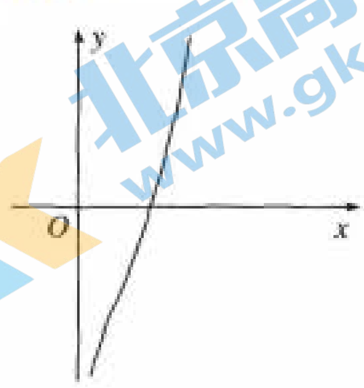
A. 当焦点在 x 轴时，其标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a^2}=1$

B. 若双曲线的弦 EF 的中点为 M，则 $k_{EF}\cdot k_{OM}=-e_0$

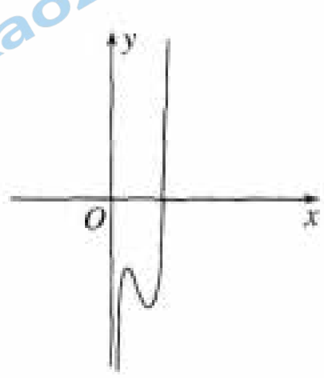
C. a,b,c 成等比数列

D. 双曲线的右顶点 $A(a，0)$，上顶点 $B(0，b)$ 和左焦点 F（$-c$，0）构成的△ABF 是直角三角形

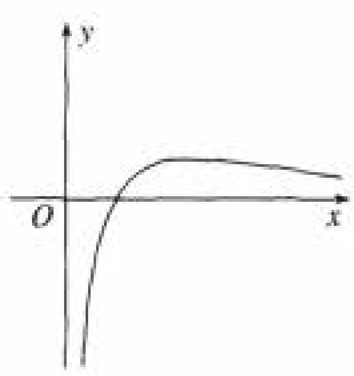
12. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{kx}\cdot\ln x$（$k$ 为常数）的部分图象大致为



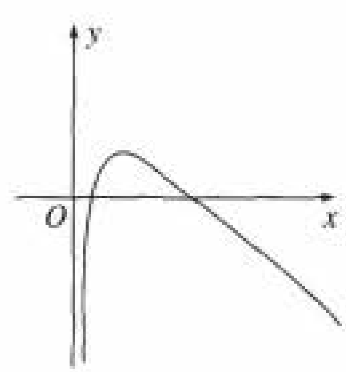
A



B



C



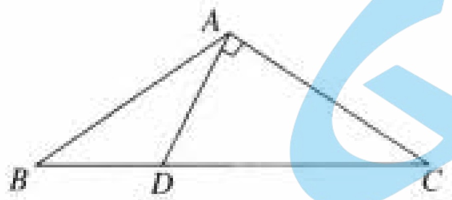
D

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若正实数 a，b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\sqrt{ab}$，则 ab 的最小值是____________.

14．如图，在$\triangle ABC$ 中，$\cos C=\sqrt{3}\sin B$，点 D 在边 BC 上，$AD\perp AC$，$AD=2$，则 AB 的长为____________.



15．某班上午有五节课，分别安排语文、数学、英语、物理、化学各一节课，要求语文与化学相邻，数学与物理不相邻，且数学课不排第一节，则不同排课法的种数是____________.

16．将两个一模一样的正三棱锥共底面倒扣在一起，已知正三棱锥的侧棱长为 2，若该组合体有外接球，则正三棱锥的底面边长为__________，该组合体的外接球的体积为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

已知函数 $f(x)=2\cos\frac{\omega}{2}x\sin\left(\frac{\omega}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\omega>0$，____________.

(1)求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域；

(2)若 $f\left(\frac{\theta}{2}\right)=-\frac{3}{5}$，$\theta\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，求 $\sin\theta$ 的值.

请从①若 $|f(x)_1-f(x_2)|=2$，$|x_1-x_2|$的最小值为 $\frac{\pi}{2}$；② $f(x)$ 图象的两条相邻对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$；③若 $f(x_1)=f(x_2)=0$，$|x_1-x_2|$的最小值为 $\frac{\pi}{2}$ 这三个条件中任选一个，补充在上面问题的条件中并作答.

18．（12 分）

已知首项为 1 的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_n+3S_n=3S_{n+1}+a_na_{n+1}+1$.

(1)证明：数列$\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$为等差数列；

(2)记数列$\{(a_{3n-2}+1)(a_{3n+1}+1)\}$的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

19．(12 分)

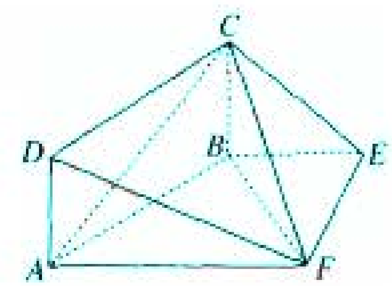
双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 l 过 F_2 且与双曲线交于 A，B 两点．

(1)若 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$，ΔF_1AB 是等边三角形，求双曲线的渐近线方程；

(2)设 $b=\sqrt{3}$，若 l 的斜率存在，且 $(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B})\cdot\overrightarrow{AB}=0$，求 l 的斜率．

20．(12 分)

如图，已知矩形 $ABCD$ 和梯形 $ABEF$ 所在的平面垂直，且 $BE\,//\,AF$，$\angle BEF=90^\circ$，$\angle BAF=30^\circ$，$BF=2$，$AF=4$．



(1)证明：$BF\perp AC$；

(2)若直线 AC 与平面 $ABEF$ 所成的角为 30°，求钝二面角 $D-CF-E$ 的余弦值．

21．(12 分)

设 P 为圆 $C_1:x^2+y^2=2$ 上的动点，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 Q．点 M 满足 $\sqrt{2}\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{PQ}$．

(1)求 M 点的轨迹 C_2 的方程；

(2)过直线 $x=2$ 上的点 T 作圆 C_1 的两条切线，设切点分别为 A，B，若直线 AB 与(1)中的曲线 C_2 交于 C，D 两点．分别记 ΔTAB，ΔTCD 的面积为 S_1，S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围．

22．(12 分)

已知函数 $f(x)=nx-x^n$，$x\in R$，其中 $n\in\mathbb{N}^*$，$n\geq 2$．

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$，证明：对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\leq g(x)$；

(3)若关于 x 的方程 $f(x)=a$ (a 为实数)有两个正实数根 x_1，x_2，证明：$|x_2-x_1|<\frac{a}{1-n}+2$．

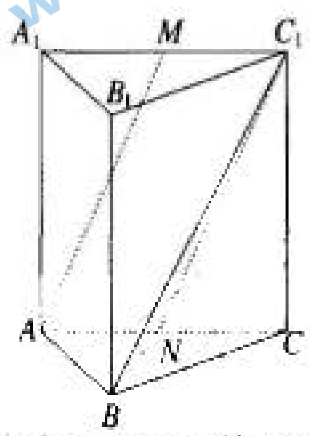
数学参考答案

一、选择题

1. C 【解析】由题意得 $A=(1,3)$，$B=(0,2)$，所以 $A\cap B=(1,2)$.

2. C 【解析】首先从 6 名同学中选 1 名去甲场馆，有 C_6^1 种选法；然后从其余 5 名同学中选 2 名去乙场馆，有 C_5^2 种选法；最后剩下的 3 名同学去丙场馆. 故不同的安排方法共有 $C_6^1C_5^2=6\times10=60$(种).

3. D 【解析】如图，取 AC 的中点 N，连接 C_1N，BN，则 $AM/\!/C_1N$，所以异面直线 AM 与 BC_1 所成角就是直线 BC_1 与 C_1N 所成角. 设直三棱柱的各棱长均为 2，则 $C_1N=\sqrt{5}$，$BC_1=2\sqrt{2}$，$BN=\sqrt{3}$. 设直线 BC_1 与 C_1N 所成的角为 θ，在 $\triangle BNC_1$ 中，由余弦定理可得 $\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，即异面直线 AM 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.



4. B 【解析】不妨设点 P 在 x 轴上方，Q 到直线 l 的距离为 d，则 $|QF|=d$. 因为 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，所以 $|PQ|=3d$，则直线 PF 的斜率为 $-\dfrac{2\sqrt{2}d}{d}=-2\sqrt{2}$. 因为 $F(2,0)$，所以直线 PF 的方程为 $y=-2\sqrt{2}(x-2)$，与 $y^2=8x$ 联立可得 $x=1$ 或 4，由题意得点 $Q(1,2\sqrt{2})$，所以 $|QF|=1+2=3$.

5. B 【解析】由题意得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{CA})=|\overrightarrow{PC}|^2-|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2-2$，因为点 P 在直线 $y=x+3$ 上，$C(1,1)$，所以 $|\overrightarrow{PC}|$ 的最小值为点 C 到直线 $y=x+3$ 的距离，即 $d=\dfrac{3}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PC}|^2-2\geqslant\dfrac{9}{2}-2=\dfrac{5}{2}$.

6. A 【解析】将数字塔中的数写成幂的形式，可发现其指数恰好构成“杨辉三角”，前 10 层的指数之和为 $1+2+2^2+\cdots+2^9=2^{10}-1=1\ 023$，所以原数字塔中前 10 层所有数字之积为 $2^{1\ 023}=10^{1\ 023\lg2}\approx10^{300}$.

7. B 【解析】因为对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数. 又函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减. 又 $\dfrac{3}{2}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\log_3\sqrt{27}<\log_3 7=\log_3\sqrt{49}$，$-1<-0.8^3<0$，所以 $f(\log_3 7)>f\left(\dfrac{3}{2}\right)>f(-0.8^3)$，即 $c<a<b$.

8. C 【解析】由已知得 $A(a,0)$，设 $F(c,0)$，由 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{FB}$，得 $\overrightarrow{AQ}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})=\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，所以 $l\perp x$ 轴，即 $l:x=a$，不妨设点 Q 在第一象限，则 $Q(a,b)$. 设 $B(x_0,y_0)$，由 $\overrightarrow{BQ}=3\overrightarrow{FQ}$，得 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FQ}$，则 $(c-x_0,-y_0)=2(a-c,b)$，所以 $\begin{cases}x_0=3c-2a,\\y_0=-2b,\end{cases}$ 即 $B(3c-2a,-2b)$. 因为点 $B(x_0,y_0)$ 在双曲线 C 上，所以 $\dfrac{(3c-2a)^2}{a^2}-\dfrac{(-2b)^2}{b^2}=1$，整理得 $9c^2-12ac-a^2=0$，所以 $9e^2-12e-1=0$，解得 $e=\dfrac{2+\sqrt{5}}{3}$ 或 $e=\dfrac{2-\sqrt{5}}{3}$(舍去).

二、选择题

9. BD 【解析】因为 $S_{17}=S_{18}$，所以 $a_{18}=S_{18}-S_{17}=0$. 因为公差 $d\neq0$，所以 $a_{17}=a_{18}-d=-d\neq0$，故 A 错误；$S_{35}=\dfrac{35(a_1+a_{35})}{2}=\dfrac{35\times2a_{18}}{2}=35a_{18}=0$，故 B 正确；$a_{17}-a_{19}=-2d\neq0$，故 C 错误；$S_{19}-S_{16}=a_{17}+a_{18}+a_{19}=3a_{18}=0$，故 D 正确.

10. ABD 【解析】由图知，函数 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\dfrac{3}{4}T=\dfrac{5\pi}{6}-\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{3\pi}{2}$，解得 $T=2\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=1$. 将点 $\left(\dfrac{5\pi}{6},1\right)$ 代入函数 $f(x)$ 的解析式，即 $1=\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}+\varphi\right)$，解得 $\varphi=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $-\pi<\varphi<0$，所以 $\varphi=-\dfrac{5\pi}{6}$，则 $f(x)=\cos\left(x-\dfrac{5\pi}{6}\right)$. 对于 A，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到 $g(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin x$ 的图象，此时 $g(x)=\sin x$ 为奇函数，故 A 正确；对于 B，当 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-1$，此时直线 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴，故 B 正确；对于 C，令 $-\pi+2k\pi\leqslant x-\dfrac{5\pi}{6}\leqslant2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$，所以

$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，当$k=1$时，$f(x)$的单调递增区间为$\left[\frac{11\pi}{6},\frac{17\pi}{6}\right]$，当$k=2$时，$f(x)$的单调递增区间为$\left[\frac{23\pi}{6},\frac{29\pi}{6}\right]$，所以$f(x)$在区间$\left[\frac{17\pi}{6},\frac{23\pi}{6}\right]$上单调递减，故C错误；对于D，当$x=\frac{4\pi}{3}$时，$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$，故D正确.

11. ACD 【解析】对于A，若双曲线为黄金双曲线，则离心率为$e_0=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，又因为$e_0^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}$，所以$b^2=a^2(e_0^2-1)=a^2\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2-1\right]=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a^2$，所以黄金双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}a^2}=1$，故A正确；对于B，由A可知，黄金双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{e_0a^2}=1$，设$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，线段$EF$的中点$M(x_0,y_0)$，则$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{e_0a^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{e_0a^2}=1$，两式相减得$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-y_2^2}{e_0a^2}=0$，所以$\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot(x_1-x_2)-\frac{y_1+y_2}{2}\cdot\frac{1}{e_0a^2}\cdot(y_1-y_2)=0$，即$x_0\cdot\frac{1}{a^2}-y_0\cdot\frac{1}{e_0a^2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$，即$\frac{1}{a^2}-\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{1}{e_0a^2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$，所以$\frac{1}{a^2}-k_{OM}\cdot\frac{1}{e_0a^2}\cdot k_{EF}=0$，所以$k_{OM}\cdot k_{EF}=e_0$，故B错误；对于C，因为$b^2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a^2$，$ac=a\cdot ae_0=a^2e_0=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a^2$，所以$b^2=ac$，所以$a,b,c$成等比数列，故C正确；对于D，$k_{AB}=-\frac{b}{a}$，$k_{BF}=\frac{b}{c}$，所以$k_{AB}\cdot k_{BF}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c}=-\frac{b^2}{ac}=-1$，即$AB\perp BF$，故D正确.

12. ABC 【解析】显然$f(x)$有唯一零点$x=1$，故D错误；$f'(x)=\frac{e^{kx}}{x}(kx\ln x+1)$，$x>0$，设$g(x)=x\ln x$，则$g'(x)=\ln x+1$，所以$g(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在区间$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，所以$g(x)\in\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$，且当$x$趋近于0时，$g(x)$趋近于0，当$x$趋近于$+\infty$时，$g(x)$趋近于$+\infty$，所以当$0\leqslant k\leqslant e$时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$单调递增，故选项A可能；当$k>e$时，$f'(x)$存在两个零点$0<x_1<\frac{1}{e}<x_2<1$，$f(x)$在区间$(0,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上单调递增，在区间$(x_1,x_2)$上单调递减，故选项B可能；当$k<0$时，$f'(x)$存在唯一零点$x_0>1$，$f(x)$在区间$(0,x_0)$上单调递增，在区间$(x_0,+\infty)$上单调递减，故选项C可能.

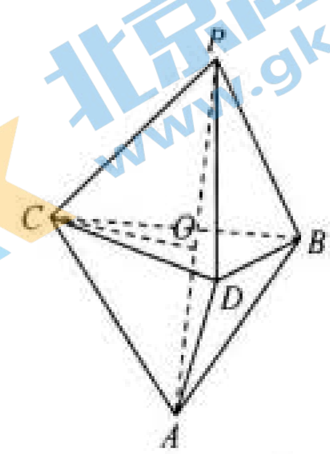
三、填空题

13. $2\sqrt{2}$ 【解析】由$\sqrt{ab}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{2}{ab}}$，得$ab\geqslant2\sqrt{2}$，当且仅当$b=2a$，即$a=2^{\frac{1}{4}}$，$b=2^{\frac{5}{4}}$时等号成立.

14. $2\sqrt{3}$ 【解析】因为$AD\perp AC$，所以$\sin\angle ADB=\sin\angle ADC=\cos C$. 又$\cos C=\sqrt{3}\sin B$，所以$\frac{\sin\angle ADB}{\sin B}=\sqrt{3}$，在$\triangle ABD$中，由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin B}$. 因为$AD=2$，所以$AB=AD\cdot\frac{\sin\angle ADB}{\sin B}=2\sqrt{3}$.

15. 16 【解析】①要求语文与化学相邻，把语文与化学看成一个整体，内部排列，共有$A_2^2=2$(种)情况；②将①中的整体与英语进行全排列，共有$A_2^2=2$(种)情况，排好后形成3个空位；③因为数学课不排第一节，所以有两个位置可选，在数学选择一个位置后，安排物理，有两个位置可选，共有$2\times2=4$(种)情况. 所以不同排课法的种数为$2\times2\times4=16$(种).

16. $\sqrt{6}$ $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ 【解析】如图，连接PA交底面BCD于点O，则点O就是该组合体的外接球的球心. 设三棱锥的底面边长为a，则$CO=PO=R=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，得$\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}a=2$，所以$a=\sqrt{6}$，$R=\sqrt{2}$，所以$V=\frac{4}{3}\pi\cdot(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.



四、解答题

17. 解：(1) $f(x)=2\cos\frac{\omega}{2}x\sin\left(\frac{\omega}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos\frac{\omega}{2}x\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\omega}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\omega}{2}x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$. (3分)

从条件①②③任选一个作为条件，均可以得到$f(x)$的半周期为$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，故$\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$，解得$\omega=2$.

所以$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. (5分)

由 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$，得 $-\frac{2\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 0$，

所以 $f(x)\in[-1,0]$，

即 $f(x)$ 的值域为 $[-1,0]$. (6 分)

(2)由已知，得 $f\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{5}$，

因为 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，则 $\theta-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\theta=\sin\left[\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-3+4\sqrt{3}}{10}$. (12 分)

18. (1)**证明**：依题意得 $a_n=3a_{n+1}+a_na_{n+1}+1$，

则 $a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+3}$，两边都加 1 可得 $a_{n+1}+1=\frac{2(a_n+1)}{a_n+3}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{a_n+3}{2(a_n+1)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{a_n+1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_n+1}$，则 $\frac{1}{a_{n+1}+1}-\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{2}$.

又 $\frac{1}{a_1+1}=\frac{1}{2}$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列. (5 分)

(2)**解**：由(1)可知 $\frac{1}{a_n+1}=\frac{n}{2}$，所以 $a_n+1=\frac{2}{n}$，

则 $(a_{3n-2}+1)(a_{3n+1}+1)=\frac{2}{3n-2}\cdot\frac{2}{3n+1}=\frac{4}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$，

所以 $T_n=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{4n}{3n+1}$. (12 分)

19. **解**：(1)设 $A(x_A,y_A)$，由题意得 $F_2(c,0)$，$c=\sqrt{1+b^2}$，$y_A^2=b^2(c^2-1)=b^4$. (2 分)

因为 $\triangle F_1AB$ 是等边三角形，所以 $2c=\sqrt{3}|y_A|$，

即 $4(1+b^2)=3b^4$，解得 $b^2=2$.

故双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$. (5 分)

(2)由已知，双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l：$y=k(x-2)$，$k\neq 0$.

由 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-2),\end{cases}$ 得 $(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2+3=0$.

(7 分)

因为 l 与双曲线交于两点，所以 $k^2-3\neq 0$，且 $\Delta=36(1+k^2)>0$，$x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-3}$. (8 分)

设 AB 的中点为 $M(x_M,y_M)$. 由 $(\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B})\cdot\overrightarrow{AB}=0$，得 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，

所以 $F_1M\perp AB$，故 $k_{F_1M}\cdot k=-1$，

又 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k^2}{k^2-3}$，$y_M=k(x_M-2)=\frac{6k}{k^2-3}$，

则 $k_{F_1M}=\frac{3k}{2k^2-3}$，所以 $\frac{3k}{2k^2-3}\cdot k=-1$，

解得 $k^2=\frac{3}{5}$，

所以 l 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$. (12 分)

20. (1)**证明**：在 $\triangle ABF$ 中，由正弦定理得 $\frac{BF}{\sin\angle BAF}=\frac{AF}{\sin\angle ABF}$，所以 $\sin\angle ABF=\frac{AF\cdot\sin\angle BAF}{BF}=1$，

所以 $\angle ABF=90^\circ$，即 $BF\perp AB$. (2 分)

又因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，$BF\subset$ 平面 $ABEF$， (4 分)

所以 $BF\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BF\perp AC$. (5 分)

(2)**解**：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $CB\perp AB$.

又因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，$CB\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $CB\perp$ 平面 $ABEF$，

所以直线 AC 与平面 $ABEF$ 所成的角为 $\angle CAB$，

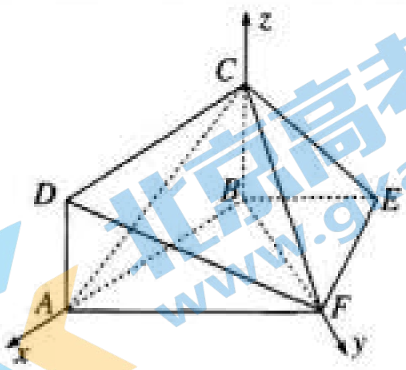
即 $\angle CAB=30^\circ$.

因为 $AB=\sqrt{AF^2-BF^2}=2\sqrt{3}$，

所以 $CB=AB\tan 30^\circ=2$.

易得 $\triangle ABF\backsim\triangle FEB$，所以 $BE=1$，$EF=\sqrt{3}$. (7 分)

以 B 为原点，BA，BF，BC 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示空间直角坐标系，



则 $D(2\sqrt{3},0,2)$，$C(0,0,2)$，$F(0,2,0)$，$E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$， (8 分)

所以 $\overrightarrow{DC}=(-2\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{DF}=(-2\sqrt{3},2,-2)$，

$\overrightarrow{CE}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-2\right)$，$\overrightarrow{CF}=(0,2,-2)$.

设平面 DCF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\sqrt{3}x=0,\\ -2\sqrt{3}x+2y-2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，

得 $x=0$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,1)$. (9 分)

设平面 CFE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b-2c=0,\\ 2b-2c=0,\end{cases}$

令 $b=1$，得 $c=1, a=-\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}_2=(-\sqrt{3},1,1)$.

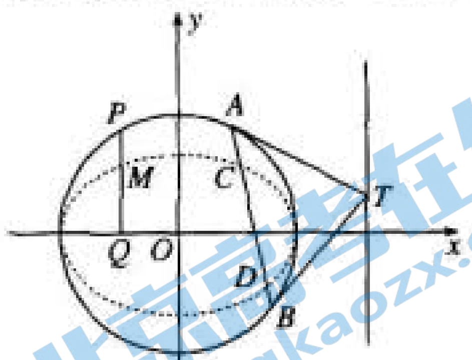
所以 $\cos\langle \boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$， (11 分)

故钝二面角 D-CF-E 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. (12 分)

21. 解：(1)设点 $M(x,y)$，由 $\sqrt{2}\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{PQ}$ 得 $P(x,\sqrt{2}y)$，因为点 P 在圆 $C_1:x^2+y^2=2$ 上，

所以 $x^2+2y^2=2$，即点 M 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. (4 分)

(2)如图，设点 $T(2,t)$，$A(x_1',y_1')$，$B(x_2',y_2')$，则直线 AT，BT 的方程分别为 $x_1'x+y_1'y=2$，$x_2'x+y_2'y=2$，



又点 $T(2,t)$ 在直线 AT，BT 上，则 $2x_1'+ty_1'=2$ ①，

$2x_2'+ty_2'=2$ ②，由①②知直线 AB 的方程为 $2x+ty=2$，则圆心 O 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{4+t^2}}$，则

$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{\dfrac{2t^2+4}{t^2+4}}$. (6 分)

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}2x+ty=2,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(t^2+8)y^2-4ty-4=0$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{4t}{t^2+8}$，$y_1y_2=\dfrac{-4}{t^2+8}$，

所以 $|CD|=\sqrt{1+\dfrac{t^2}{4}}\,|y_1-y_2|=\dfrac{2\sqrt{t^2+4}\cdot\sqrt{2t^2+8}}{t^2+8}$，

所以 $\dfrac{|AB|}{|CD|}=\dfrac{(t^2+8)\sqrt{t^2+2}}{(t^2+4)\sqrt{t^2+4}}$. (8 分)

设 $t^2+4=s$，则 $s\geqslant 4$，故 $\dfrac{|AB|}{|CD|}=\sqrt{\dfrac{s^3+6s^2-32}{s^3}}=\sqrt{1+\dfrac{6}{s}-\dfrac{32}{s^3}}$.

设 $\dfrac{1}{s}=m$，$m\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$，则 $\dfrac{|AB|}{|CD|}=\sqrt{1+6m-32m^3}$.

设 $f(m)=1+6m-32m^3$，$f'(m)=6-96m^2$，令 $f'(m)=0$，得 $m=\dfrac{1}{4}$，所以 $f(m)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$ 上单调递增，所以 $f(m)\in(1,2]$，所以 $\dfrac{|AB|}{|CD|}$ 的取值范围为 $(1,\sqrt{2}]$，即 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的取值范围为 $(1,\sqrt{2}]$. (12 分)

22. (1)解：由 $f(x)=nx-x^n$，可得 $f'(x)=n(1-x^{n-1})$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$.

下面分两种情况讨论：

①当 n 为奇数时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-1$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，在区间 $(-1,1)$ 上单调递增. (4 分)

②当 n 为偶数时，

令 $f'(x)>0$，得 $x<1$，此时函数 $f(x)$ 单调递增；

令 $f'(x)<0$，得 $x>1$，此时函数 $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

综上，当 n 为奇数时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，在区间 $(-1,1)$ 上单调递增；当 n 为偶数时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减. (4 分)

(2)证明：设点 P 的坐标为 $(x_0,0)$，则 $x_0=n^{\frac{1}{n-1}}$，$f'(x_0)=n-n^2$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)$，即 $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)$，令 $F(x)=f(x)-g(x)$，

即 $F(x)=f(x)-f'(x_0)(x-x_0)$，则 $F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$.

因为 $f'(x)=-nx^{n-1}+n$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $F'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又因为 $F'(x_0)=0$，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$F'(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递增，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

所以对任意的正实数 x 都有 $F(x)\leqslant F(x_0)=0$，

即对任意的正实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$. (8 分)

(3)证明：不妨设 $x_1\leqslant x_2$，由(2)知 $g(x)=(n-n^2)(x-x_0)$，

设方程 $g(x)=a$ 的根为 x_2'，可得 $x_2'=\dfrac{a}{n-n^2}+x_0$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

又由(2)知 $g(x_2)\geqslant f(x_2)=a=g(x_2')$，则 $x_2\leqslant x_2'$.

类似地，设曲线 $y=f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=h(x)$，可得 $h(x)=nx$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)-h(x)=-x^n<0$，即对任意 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)<h(x)$.

设方程 $h(x)=a$ 的根为 x_1'，可得 $x_1'=\dfrac{a}{n}$，

因为 $h(x)=nx$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $h(x_1')=a=f(x_1)<h(x_1)$，

所以 $x_1'<x_1$，由此可得 $x_2-x_1<x_2'-x_1'=\dfrac{a}{1-n}+x_0$.

因为 $n\geqslant 2$，所以 $2^{n-1}=(1+1)^{n-1}\geqslant 1+C_{n-1}^{1}=1+n-1=n$，

故 $2\geqslant n^{\frac{1}{n-1}}=x_0$，所以 $|x_2-x_1|<\dfrac{a}{1-n}+2$. (12 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ” 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。