高三数学考试参考答案

1. D 【解析】本题考查集合间的基本关系，考查数学运算的核心素养.

若 $2a+3=5$，则 $a=1$，此时 $a^2=1$，不满足互异性；若 $a^2=2a+3$，则解得 $a=3$ 或 $a=-1$，显然，$a=3$ 符合题意，而当 $a=-1$ 时，$a^2=1$，不满足互异性.

2. B 【解析】本题考查常用逻辑用语，考查逻辑推理的核心素养.

全称量词命题的否定为存在量词命题，故原命题的否定为 $\exists x\in(0,1)$，$\sin x\leqslant -x^2+2x-1$.

3. C 【解析】本题考查函数的图象与性质，考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

因为 $f(-x)=(e^{\log_2|-x|}-e^{-\log_2|-x|})\cdot\sin(-x)=-(e^{\log_2|x|}-e^{-\log_2|x|})\cdot\sin x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，A，B 错误. 又当 $0<x<1$ 时，$\log_2|x|<0<-\log_2|x|$，所以 $e^{\log_2|x|}<e^{-\log_2|x|}$，$\sin x>0$，从而 $f(x)=(e^{\log_2|x|}-e^{-\log_2|x|})\cdot\sin x<0$，C 正确，D 错误.

4. B 【解析】本题考查常用逻辑用语，考查逻辑推理的核心素养.

由 $x^2-9\leqslant 0$，得 $-3\leqslant x\leqslant 3$，由 $\log_{0.5}(x-1)>-1$，得 $1<x<3$，所以 p 是 q 的必要不充分条件.

5. A 【解析】本题考查异面直线所成的角，考查直观想象的核心素养.

设 $AD=CD=2$，则 $AA_1=4$，易知 $AD_1\,/\!/\,BC_1$，所以异面直线 D_1E 与 BC_1 所成的角为 $\angle AD_1E$. 经计算可知 $D_1E=\sqrt{17}$，$AD_1=2\sqrt{5}$，$AE=\sqrt{5}$，所以 $\cos\angle AD_1E=\dfrac{17+20-5}{2\sqrt{17}\times 2\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{85}}{85}$.

6. B 【解析】本题考查函数的应用，考查数学建模的核心素养.

设该挖掘机的声音强度为 x_1，普通室内谈话的声音强度为 x_2，由题意知 $\begin{cases}10\lg\dfrac{x_1}{A_0}=90,\\10\lg\dfrac{x_2}{A_0}=50,\end{cases}$ 化简得 $\begin{cases}\dfrac{x_1}{A_0}=10^9,\\\dfrac{x_2}{A_0}=10^5,\end{cases}$ 所以 $\dfrac{x_1}{x_2}=10^4$.

7. D 【解析】本题考查旋转体的体积与侧面积，考查直观想象的核心素养.

设圆锥 PO_1，PO 的底面圆半径分别为 r，R，它们的母线长分别为 l，L，因为 $\dfrac{V_{PO_1}}{V_{PO}}=(\dfrac{r}{R})^3=\dfrac{1}{8}$，所以 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{2}$，从而 $\dfrac{l}{L}=\dfrac{1}{2}$，即 $R=2r$，$L=2l$. 所以 $\dfrac{S_{PO_1侧}}{S_{OO_1侧}}=\dfrac{\pi rl}{\pi\cdot 2r\cdot 2l-\pi rl}=\dfrac{1}{3}$.

8. C 【解析】本题考查导数在研究函数中的应用，考查逻辑推理的核心素养.

$\forall x\geqslant 0$，$f(x)\leqslant 0$ 等价于 $\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\leqslant ax$. 记 $g(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}-ax$，即 $g(x)\leqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上

恒成立. $g'(x)=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}-a=-3(\dfrac{1}{2+\cos x}-\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{1}{3}-a$.

当$\dfrac{1}{3}-a\leqslant 0$,即 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$时,$g'(x)\leqslant 0$,$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,所以当 $x\geqslant 0$ 时,$g(x)\leqslant g(0)=0$,即 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立;

当 $0<a<\dfrac{1}{3}$时,记 $h(x)=\dfrac{\sin x}{3}-ax$,则 $h'(x)=\dfrac{\cos x}{3}-a$,存在 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,使得 $h'(x_0)=0$,当 $x\in(0,x_0)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,所以 $h(x)>h(0)=0$,即$\dfrac{\sin x}{3}>ax$,所以当 $x\in(0,x_0)$时,$\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\geqslant\dfrac{\sin x}{3}>ax$,即 $f(x)>0$,不符合题意;

当 $a\leqslant 0$ 时,$f(\dfrac{\pi}{2})=1-\pi a>0$,不符合题意.

综上,a 的取值范围是$[\dfrac{1}{3},+\infty)$.

9. BCD 【解析】本题考查复数的运算与几何意义,考查数学运算的核心素养.

由题可得 $z=\dfrac{-1}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{-(2-\mathrm{i})}{4-\mathrm{i}^2}=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$,即 z 在复平面内对应的点的坐标为$(-\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5})$,与点$(\dfrac{2}{5},-\dfrac{1}{5})$关于原点对称,A 错误,C 正确;$\bar{z}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$,B 正确;$|z|=\sqrt{(-\dfrac{2}{5})^2+(\dfrac{1}{5})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,D 正确.

10. BC 【解析】本题考查三角函数的图象与性质,考查直观想象与数学运算的核心素养.

因为$\begin{cases}A+b=3,\\-A+b=-1,\end{cases}$所以$\begin{cases}A=2,\\b=1.\end{cases}$又$\dfrac{1}{4}T=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}$,所以 $T=\pi$,则 $\omega=2$,故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+1$. 将点$(\dfrac{\pi}{3},1)$的坐标代入 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+1$,得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$,则 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+1$,B 正确;若 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1$,则 $f(\dfrac{\pi}{3})=2$,A 错误;而 $1-2\cos(2x+\dfrac{5\pi}{6})=1-2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2})=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})+1$,C 正确;若 $f(x)=1-2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})$,则 $f(0)=0$,D 错误.

11. ABC 【解析】本题考查不等式,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

因为 $mn\leqslant(\dfrac{m+n}{2})^2$,所以 $\log_3 m+\log_3 n=\log_3(mn)\leqslant\log_3(\dfrac{m+n}{2})^2=2-\log_3 4$,当且仅当 $m=n$ 时,等号成立,A 正确;易知 $\mathrm{e}^m+\mathrm{e}^n\geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}^m\mathrm{e}^n}$,即 $\mathrm{e}^m+\mathrm{e}^n\geqslant 2\mathrm{e}^{\frac{m}{2}}\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}$,所以 $\mathrm{e}^m\geqslant 2\mathrm{e}^{\frac{m}{2}}\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}-\mathrm{e}^n$,$\dfrac{\mathrm{e}^m}{\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}}\geqslant 2\mathrm{e}^{\frac{m}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}>2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{2}{2}}>0$,故 $\ln\dfrac{\mathrm{e}^m}{\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}}\geqslant\ln(2\mathrm{e}^{\frac{m}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{n}{2}})$,B 正确;

因为$\dfrac{2}{2m-1}+\dfrac{1}{n-1}=\dfrac{2}{2m-1}+\dfrac{2}{2n-2}$,$m+n=3$,所以 $2m-1+2n-2=3$,$\dfrac{2}{2m-1}+\dfrac{1}{n-1}=$

$\frac{1}{3}(\frac{2}{2m-1}+\frac{2}{2n-2})(2m-1+2n-2)=\frac{1}{3}(4+\frac{4n-4}{2m-1}+\frac{4m-2}{2n-2})$，因为 $\frac{4n-4}{2m-1}+\frac{4m-2}{2n-2}\geqslant 2\sqrt{4}=4$，所以 $\frac{1}{3}(4+\frac{4n-4}{2m-1}+\frac{4m-2}{2n-2})\geqslant\frac{8}{3}$，当且仅当 $m=\frac{5}{4}$，$n=\frac{7}{4}$ 时，等号成立，C 正确；$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=9-2mn<9$，D 错误.

12. ACD 【解析】本题考查数学文化与数列的求和，考查数学抽象与数学运算的核心素养.

对于 A，因为 $F_{n+2}-F_{n+1}=F_n$，所以 $F_3-F_2=F_1$，$F_4-F_3=F_2$，$F_5-F_4=F_3$，…，$F_{2026}-F_{2025}=F_{2024}$，上式两边分别相加得 $F_{2026}-F_2=\sum_{i=1}^{2024}F_i$，又 $F_1=F_2=1$，所以 $\sum_{i=1}^{2024}F_i=F_{2026}-1$，A 正确.

对于 B，因为 $F_{n+1}=F_{n+2}-F_n$，所以 $F_{n+1}^2=F_{n+2}F_{n+1}-F_{n+1}F_n$，所以 $F_2^2=F_3F_2-F_2F_1$，$F_3^2=F_4F_3-F_3F_2$，$F_4^2=F_5F_4-F_4F_3$，…，$F_{2024}^2=F_{2025}F_{2024}-F_{2024}F_{2023}$，上式两边分别相加得 $F_2^2+F_3^2+\cdots+F_{2024}^2=F_{2025}F_{2024}-1$，所以 $\sum_{i=1}^{2024}F_i^2=F_{2024}F_{2025}$，B 错误.

对于 C，由题意知 $G_1=1$，$G_2=1$，$G_3=2$，$G_4=0$，$G_5=2$，$G_6=2$，$G_7=1$，$G_8=0$，$G_9=1$，$G_{10}=1$，…，所以数列 $\{G_n\}$ 是最小正周期为 8 的数列，故 $G_{2024}=G_8=0$，C 正确.

对于 D，$\sum_{i=1}^{2024}G_i=253\times(1+1+2+0+2+2+1+0)=2277$，D 正确.

13. 3 【解析】本题考查平面向量的夹角与模，考查数学运算的核心素养.

因为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-2|\boldsymbol{b}|\times\frac{1}{2}=-2$，所以 $|\boldsymbol{b}|=3$.

14. -3 【解析】本题考查三角恒等变换，考查数学运算的核心素养.

因为 $\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=-\frac{1}{2}$，所以 $\tan\theta=-3$.

15. 4 【解析】本题考查等比数列的性质与求和，考查数学运算的核心素养.

设公比为 q，因为 $a_5=a_4+6a_3$，所以 $q^2-q-6=0$，解得 $q=3$. 又由 $S_3=13$，即 $a_1+3a_1+9a_1=13$，解得 $a_1=1$，所以 $S_n=\frac{3^n-1}{2}$. 由 $\frac{3^n-1}{2}<41$，得 $3^n<83$，所以 n 的最大值为 4.

16. 2024 【解析】本题考查抽象函数，考查数学抽象与逻辑推理的核心素养.

由 $f(8-x)=f(x-4)$ 可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，从而 $f(4)=f(0)=1$. 又 $f(x)+f(x+4)=f(21)$，令 $x=0$，得 $f(21)=f(0)+f(4)=2$，则 $f(1)+f(5)=f(2)+f(6)=f(3)+f(7)=f(4)+f(8)=2$. 由 $f(x)+f(x+4)=2$，得 $f(x+4)+f(x+8)=2$，可推出 $f(x+8)=f(x)$，故 $f(x)$ 的最小正周期为 8，则 $f(21)=f(5)=2$，$f(1)=0$. 因为 $2025=8\times253+1$，所以 $\sum_{k=1}^{2025}f(k)=253[f(1)+f(2)+\cdots+f(8)]+f(1)=2024$.

17. 解：(1)因为 $\cos A=\frac{2c-a}{2b}$，所以 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2c-a}{2b}$，…………………………………… 2 分

整理得 $a^2+c^2-b^2=ac$，

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，…………………………………………………………………… 4 分

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c=3$，$b=\sqrt{13}$，

所以 $13=a^2+9-3a$，即 $a^2-3a-4=0$， ………………………………………………… 7 分

解得 $a=4$. ………………………………………………………………………………………… 9 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. ……………………………… 10 分

评分细则：

第一问另解：

因为 $\cos A=\frac{2c-a}{2b}$，所以 $2b\cos A=2c-a$. ……………………………………………… 1 分

由正弦定理得 $2\cos A\sin B=2\sin(A+B)-\sin A$，

整理得 $2\sin A\cos B-\sin A=0$. ………………………………………………………………… 3 分

因为 $\sin A>0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 4 分

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 5 分

18. 解：(1)因为 $f(x)=x^2-3x+\ln x$，所以 $f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$. ……… 2 分

令 $f'(x)<0$，解得 $\frac{1}{2}<x<1$，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$， …………………… 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{2},1]$ 上单调递减. ………………………………… 4 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 $f(\frac{1}{2})=-\frac{5}{4}-\ln 2$. ………………………………… 5 分

(2) $g(x)=x^2-6x+4\ln x$，它的定义域是 $(0,+\infty)$，且 $g'(x)=2x-6+\frac{4}{x}=\frac{2(x-2)(x-1)}{x}$， ………………………………………………………………………………… 7 分

当 $x\in(0,1)\cup(2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(1,2)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………… 9 分

因为方程 $g(x)=2m-1$ 有 3 个不同的根，$g(1)=-5$，$g(2)=4\ln 2-8$，……………… 10 分

所以 $4\ln 2-8<2m-1<-5$，解得 $2\ln 2-\frac{7}{2}<m<-2$，即 m 的取值范围为 $(2\ln 2-\frac{7}{2},-2)$. ……………………………………………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出 $f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$，得 2 分，正确写出单调区间，累计得 4 分，第一问都正确，累计得 5 分.

【2】第二问，写出 $g'(x)=2x-6+\frac{4}{x}=\frac{2(x-2)(x-1)}{x}$，累计得 7 分，正确写出单调区间，累计得 9 分，正确计算出两个极值，累计得 10 分，直至求出正确答案，累计得 12 分.

【3】采用其他方法，参照本评分标准依步骤给分.

19. 解：(1)当 $n=1$ 时，$a_1=2a_1-2$，解得 $a_1=2$. …………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=2a_n-2$，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$，

两式相减得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$， …………………………………… 3 分

所以$\{a_n\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，故 $a_n=2^n$. …………………………………… 4 分

设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d，由 $b_3+b_4+b_5=21$，可得 $b_4=7$， …………………………………… 5 分

又 $b_6=11$，所以 $7+2d=11$，解得 $d=2$，故 $b_n=2n-1$. …………………………………… 6 分

(2)令 $c_n=\frac{b_n}{a_n}$，则由(1)可知 $c_n=\frac{2n-1}{2^n}$， …………………………………… 7 分

则 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，② …………………………………… 8 分

①−②，得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$， …………………………………… 11 分

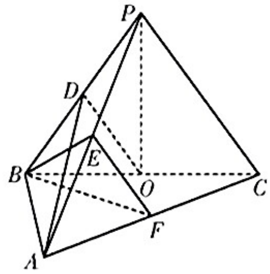
所以 $T_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$. …………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出 $a_1=2$，得 1 分，写出 $a_n=2^n$，累计得 4 分，写出 $b_4=7$，累计得 5 分，求出 $b_n=2n-1$，累计得 6 分.

【2】第二问，求出 $c_n=\frac{2n-1}{2^n}$，累计得 7 分，求出$\frac{1}{2}T_n=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$，累计得 11 分，直到给出正确结论得 12 分.

20. (1)证明：因为$\triangle PBC$ 为等边三角形，D，O 分别是 BP、BC 的中点，且 $BC=2\sqrt{2}$，所以 $DO=BD=\sqrt{2}$， …………………………………… 1 分



所以 $AD=\sqrt{3}DO=\sqrt{6}$. …………………… 2 分

又 $AB=2$，所以 $AB^2+BD^2=AD^2$，即 $AB\perp BD$. …………… 4 分

因为 $AB\perp BC$，$BC\cap BD=B$，所以 $AB\perp$平面 PBC.

又 $AB\subset$平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$平面 PBC. …………… 5 分

(2)解：连接 PO，由已知可得 $PO\perp BC$，

又由(1)可知平面 $PBC\perp$平面 ABC，

所以 $PO\perp$平面 ABC. …………………………………… 6 分

因为 F 为 AC 的中点，所以点 C 到平面 BEF 的距离等于点 A 到平面 BEF 的距离.

在直角△ABC 中，可知 $BF=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{8+2^2}}{2}=\sqrt{3}$， …………………………………… 7 分

在直角△ABP 中，可知 $BE=\frac{AP}{2}=\frac{\sqrt{8+2^2}}{2}=\sqrt{3}$， …………………………………… 8 分

因为 EF 是△ACP 的中位线，所以 $EF=\frac{PC}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，△$BEF$ 的面积 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. …………………………………… 9 分

设点 A 到平面 BEF 的距离为 d，则三棱锥 $A-BEF$ 的体积 $V_{A-BEF}=\frac{\sqrt{5}}{6}d$. ………… 10 分

又△ABF 的面积 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$，点 E 到平面 ABF 的距离为 $\frac{OP}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以三棱锥 $E-ABF$ 的体积 $V_{E-ABF}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………… 11 分

由 $\frac{\sqrt{5}}{6}d=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $d=\frac{2\sqrt{15}}{5}$，即点 C 到平面 BEF 的距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. ………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问中，求出 $AD=\sqrt{3}DO=\sqrt{6}$，得 2 分，证出 $AB\perp BD$，累计得 4 分，证出平面 $ABC\perp$ 平面 PBC，累计得 5 分.

【2】第二问中，证出 $PO\perp$ 平面 ABC，累计得 6 分，计算出 $S_{\triangle BEF}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，累计得 9 分，计算出 $V_{E-ABF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，累计得 11 分，直至正确求出点 C 到平面 BEF 的距离，累计得 12 分.

21. 解：(1)依题意可得调整后研发人员的年人均投入为 $(1+\frac{2x}{1000})a$ 万元， ………………… 1 分

则 $(1000-x)(1+\frac{2x}{1000})a\geqslant1000a$. 因为 $a>0$，所以 $\frac{2}{1000}x^2-x\leqslant0$，解得 $0\leqslant x\leqslant500$， …………………………………………………………………………………… 3 分

因为 $x\in\mathbf{N}$ 且 $100\leqslant x\leqslant500$，所以 $100\leqslant x\leqslant500$，故 $500\leqslant1000-x\leqslant900$，

即要使这 $(1000-x)$ 名研发人员的年总投入不低于调整前 1000 名技术人员的年总投入，则调整后的研发人员的人数最少为 500. …………………………………………………… 5 分

(2)由条件①研发人员的年总投入始终不低于技术人员的年总投入，得 $(1000-x)(1+\frac{2x}{1000})a\geqslant x(m-\frac{3x}{1000})a$， …………………………………………………… 6 分

上式两边同除以 ax，得 $(\frac{1000}{x}-1)(1+\frac{2x}{1000})\geqslant m-\frac{3x}{1000}$，整理得 $m\leqslant\frac{1000}{x}+\frac{x}{1000}+1$. …………………………………………………………………………………… 7 分

由条件②技术人员年人均投入不减少，得 $a(m-\frac{3x}{1000})\geqslant a$，解得 $m\geqslant\frac{3x}{1000}+1$. ………… 8 分

假设存在这样的实数 m，使得技术人员在已知范围内调整后，满足以上两个条件，

即 $\frac{3x}{1000}+1\leqslant m\leqslant\frac{1000}{x}+\frac{x}{1000}+1(100\leqslant x\leqslant 500)$ 恒成立. ………………………… 9 分

设 $f(x)=\frac{1000}{x}+\frac{x}{1000}+1=\frac{1}{1000}(x+\frac{1000^2}{x})+1$，易知 $f(x)$ 在 $(0,1000]$ 上单调递减，

因为 $x\in\mathbf{N}$ 且 $100\leqslant x\leqslant 500$，所以 $f(x)$ 在 $[100,500]$ 上单调递减，则 $f(x)_{\min}=\frac{1000}{500}+\frac{500}{1000}+1=3.5$，当 $x=500$ 时，等号成立，所以 $m\leqslant 3.5$. ………………………………………… 10 分

又因为 $100\leqslant x\leqslant 500$，当 $x=500$ 时，$(\frac{3x}{1000}+1)_{\max}=2.5$，所以 $m\geqslant 2.5$，……………… 11 分

所以 $2.5\leqslant m\leqslant 3.5$，即存在这样的 m 满足条件，m 的取值范围为 $[2.5,3.5]$. ………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出调整后研发人员的年人均投入为 $(1+\frac{2x}{1000})a$ 万元，得 1 分，写出 $0\leqslant x\leqslant 500$，累计得 3 分，写出调整后的研发人员的人数最少为 500，累计得 5 分.

【2】第二问，求出 $(1000-x)(1+\frac{2x}{1000})a\geqslant x(m-\frac{3x}{1000})a$，累计得 6 分，求出 $m\geqslant\frac{3x}{1000}+1$，累计得 8 分，写出 $\frac{3x}{1000}+1\leqslant m\leqslant\frac{1000}{x}+\frac{x}{1000}+1(100\leqslant x\leqslant 500)$ 恒成立，累计得 9 分，直到给出正确结论得 12 分.

22. 解：(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{4x-1}-4\ln(2x)$，所以 $f'(x)=4e^{4x-1}-\frac{4}{x}$， ………………… 2 分

$f'(\frac{1}{2})=4e-8$，$f(\frac{1}{2})=e$，所以切线方程为 $y-e=(4e-8)(x-\frac{1}{2})$，

即 $y=(4e-8)x-e+4$. ………………………………………………………………… 4 分

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f(x)\geqslant a+a\ln(2a)$，即 $e^{4x-1}-4a\ln(2x)-a-a\ln(2a)\geqslant 0$.

……………………………………………………………………………………………… 5 分

设 $g(x)=e^{4x-1}-4a\ln(2x)-a-a\ln(2a)$，则 $g'(x)=4e^{4x-1}-\frac{4a}{x}$. ……………………… 6 分

因为 $a>0$，所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，当 $x\to 0$ 时，$g'(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g'(x)\to+\infty$，所以存在唯一的 $x_0>0$，使 $g'(x_0)=4e^{4x_0-1}-\frac{4a}{x_0}=0$，

且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$.

由 $g'(x_0)=4e^{4x_0-1}-\frac{4a}{x_0}=0$，得 $a=x_0e^{4x_0-1}$，则 $\ln(2a)=\ln(2x_0)+4x_0-1$. ………… 8 分

所以 $g(x)_{\min}=e^{4x_0-1}-4a\ln(2x_0)-a-a\ln(2a)=e^{4x_0-1}-x_0e^{4x_0-1}[4\ln(2x_0)+1+\ln(2a)]=e^{4x_0-1}[1-5x_0\ln(2x_0)-4x_0^2]\geqslant 0$. ……………………………………………………… 9 分

因为 $1-5x_0\ln(2x_0)-4x_0^2=x_0[\frac{1}{x_0}-5\ln(2x_0)-4x_0]\geqslant 0$,所以 $\frac{1}{x_0}-5\ln(2x_0)-4x_0\geqslant 0$. ……………………………………………………………………………… 10 分

设 $h(x)=\frac{1}{x}-5\ln(2x)-4x$,易知它在 $(0,+\infty)$ 上为减函数,注意到 $h(\frac{1}{2})=0$,所以 $0<x_0\leqslant\frac{1}{2}$. 又 $a=x_0e^{4x_0-1}$,设 $u(x)=xe^{4x-1}(0<x\leqslant\frac{1}{2})$,则 $u'(x)=(4x+1)e^{4x-1}>0$, …… 11 分

可知 $u(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2}]$ 上单调递增,则 $a\in(0,\frac{e}{2}]$,即实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{e}{2}]$. …… 12 分

评分细则:

【1】第一问,写出 $f'(x)=4e^{4x-1}-\frac{4}{x}$,得 2 分,正确求出曲线 $y=f(x)$ 的切线方程,累计得 4 分.

【2】第二问,写出 $g'(x)=4e^{4x-1}-\frac{4a}{x}$,累计得 6 分,推导出 $\ln(2a)=\ln(2x_0)+4x_0-1$,累计得 8 分,推出 $e^{4x_0-1}[1-5x_0\ln(2x_0)-4x_0^2]\geqslant 0$,累计得 9 分. 证出 $u'(x)=(4x+1)e^{4x-1}>0$,累计得 11 分,求出实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{e}{2}]$,累计得 12 分.

【3】采用其他方法,参照本评分标准依步骤给分.