西城区高三模拟测试

数学（理科）

2018.5

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、　选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．若集合 $A=\{x\,|\,0<x<1\}$，$B=\{x\,|\,x^2-2x<0\}$，则下列结论中正确的是

（A）$A\cap B=\varnothing$　　　（B）$A\cup B=\mathbf{R}$

（C）$A\subseteq B$　　　（D）$B\subseteq A$

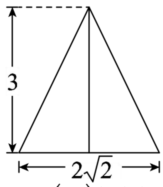
2．若复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})\cdot z=1$，则 $z=$

（A）$\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$　　（B）$-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$　　（C）$-\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$　　（D）$\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}$

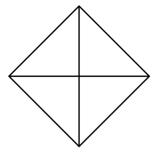
3．下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,1)$ 上单调递减的是

（A）$y=\frac{1}{x}$　　（B）$y=x^2$　　（C）$y=2^{|x|}$　　（D）$y=\cos x$

4．某正四棱锥的正（主）视图和俯视图如图所示，该正四棱锥的侧面积是



正（主）视图


俯视图

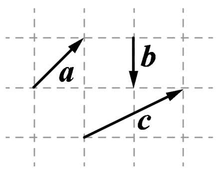
（A）12

（B）$4\sqrt{10}$

（C）$12\sqrt{2}$

（D）$8\sqrt{5}$

5．向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在正方形网格中的位置如图所示．若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则实数 $\lambda=$



（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）2

6．已知点 $A(0,0)$，$B(2,0)$．若椭圆 $W:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{m}=1$ 上存在点 C，使得△ABC 为等边三角形，则椭圆 W 的离心率是

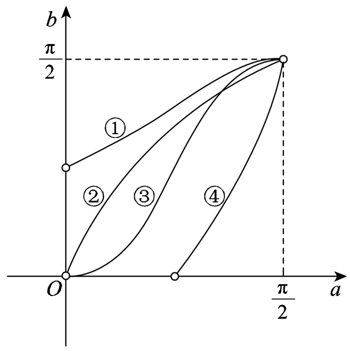
（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7．函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+a$．则“$a\geqslant 0$”是“$\exists x_0\in[-1,1]$，使 $f(x_0)\geqslant 0$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

8．在直角坐标系 xOy 中，对于点 (x,y)，定义变换 σ：将点 (x,y) 变换为点 (a,b)，使得 $\begin{cases}x=\tan a,\\ y=\tan b,\end{cases}$ 其中 $a,b\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$．这样变换 σ 就将坐标系 xOy 内的曲线变换为坐标系 aOb 内的曲线．则四个函数 $y_1=2x\ (x>0)$，$y_2=x^2\ (x>0)$，$y_3=e^x\ (x>0)$，$y_4=\ln x\ (x>1)$ 在坐标系 xOy 内的图象，变换为坐标系 aOb 内的四条曲线（如图）依次是



（A）②，③，①，④　　（B）③，②，④，①

（C）②，③，④，①　　（D）③，②，①，④

第II卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），则圆 C 的面积为____；圆心 C 到直线 $l:3x-4y=0$ 的距离为____．

10．$(x^2+\frac{1}{x})^4$ 的展开式中 x^2 的系数是____．

11．在△ABC 中，$a=3$，$b=2$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，则 $\cos 2B=$____．

12．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $a_1=1$，$S_2>S_3$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以是____．

13．设不等式组 $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x+y \geqslant 3, \\ 2x+y \leqslant 5 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D．若直线 $ax-y=0$ 上存在区域 D 上的点，则实数 a 的取值范围是____．

14．地铁某换乘站设有编号为 A，B，C，D，E 的五个安全出口．若同时开放其中的两个安全出口，疏散 1000 名乘客所需的时间如下：

安全出口编号	A，B	B，C	C，D	D，E	A，E
疏散乘客时间（s）	120	220	160	140	200

则疏散乘客最快的一个安全出口的编号是____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

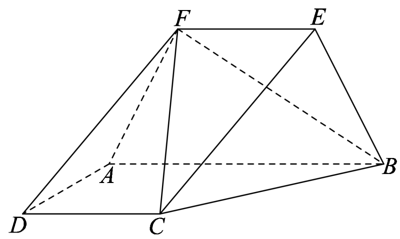
已知函数 $f(x)=(1+\tan x)\cdot\sin 2x$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的定义域；

（Ⅱ）若 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $f(\alpha)=2$，求 α 的值．

16．（本小题满分 14 分）

如图，梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直，$AB // CD // EF$，$AB\perp AD$．$CD=DA=AF=FE=2$，$AB=4$．



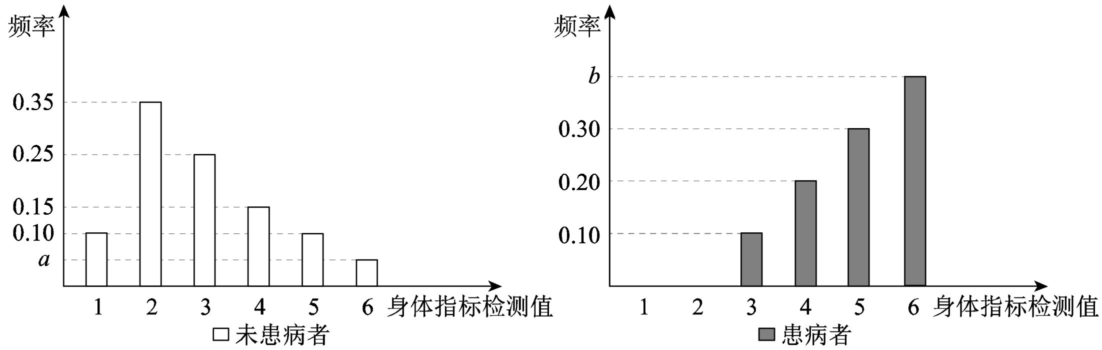
（Ⅰ）求证：$DF //$ 平面 BCE；

（Ⅱ）求二面角 $C-BF-A$ 的余弦值；

（Ⅲ）线段 CE 上是否存在点 G，使得 $AG\perp$平面 BCF？请说明理由．

17.（本小题满分 13 分）

在某地区，某项职业的从业者共约 8.5 万人，其中约 3.4 万人患有某种职业病．为了解这种职业病与某项身体指标（检测值为不超过 6 的正整数）间的关系，依据是否患有职业病，使用分层抽样的方法随机抽取了 100 名从业者，记录他们该项身体指标的检测值，整理得到如下统计图：



（Ⅰ）求样本中患病者的人数和图中 a，b 的值；

（Ⅱ）在该指标检测值为 4 的样本中随机选取 2 人，求这 2 人中有患病者的概率；

（III）某研究机构提出，可以选取常数 $X_0=n+0.5\ (n\in\mathbf{N}^*)$，若一名从业者该项身体指标检测值大于 X_0，则判断其患有这种职业病；若检测值小于 X_0，则判断其未患有这种职业病．从样本中随机选择一名从业者，按照这种方式判断其是否患有职业病．写出使得判断错误的概率最小的 X_0 的值及相应的概率（只需写出结论）．

18.（本小题满分 14 分）

已知直线 $l:y=kx+1$ 与抛物线 $C:y^2=4x$ 相切于点 P．

（Ⅰ）求直线 l 的方程及点 P 的坐标；

（Ⅱ）设 Q 在抛物线 C 上，A 为 PQ 的中点．过 A 作 y 轴的垂线，分别交抛物线 C 和直线 l 于 M，N．记△PMN 的面积为 S_1，△QAM 的面积为 S_2，证明：$S_1=S_2$．

19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-ax$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线经过点 $(2,-1)$.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）设 $b>1$，求 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{1}{b},b]$ 上的最大值和最小值.

20.（本小题满分 13 分）

数列 A_n： $a_1, a_2, \cdots, a_n\ (n\geqslant 2)$ 的各项均为整数，满足： $a_i\geqslant -1\ (i=1,2,\cdots,n)$，且 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$，其中 $a_1\neq 0$.

（Ⅰ）若 $n=3$，写出所有满足条件的数列 A_3；

（Ⅱ）求 a_1 的值；

（Ⅲ）证明：$a_1+a_2+\cdots+a_n>0$.

西城区高三模拟测试

数学（理科）参考答案及评分标准

2018.5

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1．C　　2．A　　3．D　　4．B

5．D　　6．C　　7．A　　8．A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．π，$\frac{6}{5}$　　10．6　　11．$\frac{1}{3}$

12．$-n+2$（答案不唯一）　　13．$[\frac{1}{2},3]$　　14．D

注：第 9 题第一空 3 分，第二空 2 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $y=\tan x$ 的定义域是 $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$. ………………… 4 分

（Ⅱ）$f(x)=(1+\tan x)\cdot\sin 2x$

$=(1+\frac{\sin x}{\cos x})\cdot\sin 2x$ ………………… 5 分

$=\sin 2x+2\sin^2 x$ ………………… 6 分

$=\sin 2x-\cos 2x+1$ ………………… 7 分

$=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+1$. ………………… 8 分

由 $f(\alpha)=2$，得 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………… 9 分

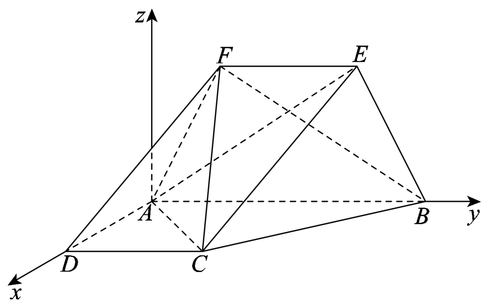
因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{4}<2\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$， …………………10 分

所以 $2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$，或 $2\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$. …………………11 分

解得 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，或$\alpha=\frac{\pi}{2}$（舍去）. ··················13 分

16.（本小题满分 14 分）

解:（Ⅰ）因为 $CD // EF$，且$CD=EF$，



所以 四边形$CDFE$为平行四边形，

所以 $DF // CE$. ······ 2 分

因为 $DF \not\subset$平面BCE，······ 3 分

所以 $DF //$ 平面BCE. ······ 4 分

（Ⅱ）在平面$ABEF$内，过A作$Az \perp AB$.

因为 平面$ABCD \perp$平面$ABEF$，平面$ABCD \cap$ 平面$ABEF = AB$，

又 $Az \subset$平面$ABEF$，$Az \perp AB$，

所以 $Az \perp$平面$ABCD$，

所以 $AD \perp AB$，$AD \perp Az$，$Az \perp AB$.

如图建立空间直角坐标系$A-xyz$. ·················· 5 分

由题意得，$A(0,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(2,2,0)$，$E(0,3,\sqrt{3})$，$F(0,1,\sqrt{3})$.

所以 $\overrightarrow{BC}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{BF}=(0,-3,\sqrt{3})$.

设平面BCF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2y=0,\\ -3y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令$y=1$，则$x=1$，$z=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,\sqrt{3})$. ·················· 7 分

平面ABF的一个法向量为 $\boldsymbol{v}=(1,0,0)$，·················· 8 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{v}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以 二面角$C-BF-A$的余弦值$\frac{\sqrt{5}}{5}$. ··················10 分

（Ⅲ）线段CE上不存在点G，使得$AG \perp$平面BCF，理由如下： ··················11 分

解法一：设平面ACE的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x_1+2y_1=0, \\ 3y_1+\sqrt{3}z_1=0. \end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $x_1=-1$，$z_1=-\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=(-1,1,-\sqrt{3})$． ··················13 分

因为 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$，

所以 平面 ACE 与平面 BCF 不可能垂直，

从而线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG\perp$平面 BCF． ··················14 分

解法二：线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG\perp$平面 BCF，理由如下： ············11 分

假设线段 CE 上存在点 G，使得 $AG\perp$平面 BCF，

设 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CE}$，其中 $\lambda\in[0,1]$．

设 $G(x_2, y_2, z_2)$，则有 $(x_2-2, y_2-2, z_2)=(-2\lambda,\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

所以 $x_2=2-2\lambda$，$y_2=2+\lambda$，$z_2=\sqrt{3}\lambda$，从而 $G(2-2\lambda, 2+\lambda, \sqrt{3}\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{AG}=(2-2\lambda,2+\lambda,\sqrt{3}\lambda)$． ··················13 分

因为 $AG\perp$平面 BCF，所以 $AG /\!/ \boldsymbol{n}$．

所以有 $\dfrac{2-2\lambda}{1}=\dfrac{2+\lambda}{1}=\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3}}$，

因为 上述方程组无解，所以假设不成立．

所以 线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG\perp$平面 BCF． ··················14 分

17．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）根据分层抽样原则，容量为 100 的样本中，患病者的人数为 $100\times\dfrac{3.4}{8.5}=40$ 人． ··· 2 分

$a=1-0.10-0.35-0.25-0.15-0.10=0.05$，

$b=1-0.10-0.20-0.30=0.40$． ·················· 4 分

（Ⅱ）指标检测数据为 4 的样本中，

有患病者 $40\times0.20=8$ 人，未患病者 $60\times0.15=9$ 人． ·················· 6 分

设事件 A 为“从中随机选择 2 人，其中有患病者”．

则 $P(\overline{\mathrm{A}})=\dfrac{\mathrm{C}_9^2}{\mathrm{C}_{17}^2}=\dfrac{9}{34}$， ………………… 8 分

所以 $P(\mathrm{A})=1-P(\overline{\mathrm{A}})=\dfrac{25}{34}$． ………………… 9 分

（III）使得判断错误的概率最小的 $X_0=4.5$． …………………11 分

当 $X_0=4.5$ 时，判断错误的概率为 $\dfrac{21}{100}$． …………………13 分

18．（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$． ① ………………… 2 分

依题意，有 $k\neq 0$，且 $\varDelta=(2k-4)^2-4k^2=0$．

解得 $k=1$． ………………… 3 分

所以直线 l 的方程为 $y=x+1$． ………………… 4 分

将 $k=1$ 代入①，解得 $x=1$，

所以点 P 的坐标为 $(1,2)$． ………………… 5 分

（Ⅱ）设 $Q(m,n)$， 则 $n^2=4m$，所以 $A(\dfrac{m+1}{2},\dfrac{n+2}{2})$． ………………… 7 分

依题意，将直线 $y=\dfrac{n+2}{2}$ 分别代入抛物线 C 与直线 l，

得 $M(\dfrac{(n+2)^2}{16},\dfrac{n+2}{2})$， $N(\dfrac{n}{2},\dfrac{n+2}{2})$． ………………… 8 分

因为 $|MN|=\left|\dfrac{(n+2)^2}{16}-\dfrac{n}{2}\right|=\left|\dfrac{n^2-4n+4}{16}\right|=\left|\dfrac{4m-4n+4}{16}\right|=\left|\dfrac{m-n+1}{4}\right|$， ……… 10 分

$$|AM|=\left|\frac{m+1}{2}-\frac{(n+2)^2}{16}\right|=\left|\frac{(8m+8)-(n^2+4n+4)}{16}\right|$$

$$=\left|\frac{(8m+8)-(4m+4n+4)}{16}\right|=\left|\frac{m-n+1}{4}\right|,$$ …………………12 分

所以 $|AM|=|MN|$． …………………13 分

又 A 为 PQ 中点，所以 P，Q 两点到直线 AN 的距离相等，

所以 $S_1=S_2$． …………………14 分

19.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$，　　………………… 2 分

所以 $f'(1)=1-a$.

依题意，有 $\dfrac{f(1)-(-1)}{1-2}=1-a$，

即 $\dfrac{-a+1}{1-2}=1-a$，　　………………… 4 分

解得 $a=1$.　　………………… 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f'(x)=\dfrac{1-x^2-\ln x}{x^2}$.

当 $0<x<1$ 时，$1-x^2>0$，$-\ln x>0$，所以 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增；

当 $x>1$ 时，$1-x^2<0$，$-\ln x<0$，所以 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.　　………………… 8 分

因为 $0<\dfrac{1}{b}<1<b$，　所以 $f(x)$ 最大值为 $f(1)=-1$.　　………………… 9 分

设 $h(b)=f(b)-f(\dfrac{1}{b})=(b+\dfrac{1}{b})\ln b-b+\dfrac{1}{b}$，其中 $b>1$.　　…………………10 分

则 $h'(b)=(1-\dfrac{1}{b^2})\ln b>0$，

故 $h(b)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.　　…………………11 分

所以 $h(b)>h(1)=0$，　即 $f(b)>f(\dfrac{1}{b})$，　　…………………12 分

故 $f(x)$ 最小值为 $f(\dfrac{1}{b})=-b\ln b-\dfrac{1}{b}$.　　…………………13 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）满足条件的数列 A_3 为：$-1,-1,6$；$-1,0,4$；$-1,1,2$；$-1,2,0$.　　………………… 3 分

（Ⅱ）$a_1=-1$.　　………………… 4 分

否则，假设 $a_1\neq -1$，因为 $a_1\neq 0$，所以 $a_1\geqslant 1$. 又 $a_2,a_3,\cdots,a_n\geqslant -1$，因此有

$a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n$

$\geqslant 2^{n-1}+(-1)\cdot 2^{n-2}+(-1)\cdot 2^{n-3}+\cdots+(-1)\cdot 2+(-1)$

$=2^{n-1}-2^{n-2}-2^{n-3}-\cdots-2-1=1$，

这与 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$ 矛盾！

所以 $a_1=-1$． ……………… 8 分

（III）先证明如下结论：$\forall k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，必有 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_k\cdot 2^{n-k}\leqslant 0$．

否则，令 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_k\cdot 2^{n-k}>0$，

注意左式是 2^{n-k} 的整数倍，因此 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_k\cdot 2^{n-k}\geqslant 2^{n-k}$．

所以有：

$$
\begin{aligned}
&a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n\\
&\geqslant 2^{n-k}+(-1)\cdot 2^{n-k-1}+(-1)\cdot 2^{n-k-2}+\cdots+(-1)\cdot 2+(-1)\\
&=2^{n-k}-2^{n-k-1}-2^{n-k-2}-\cdots-2-1\\
&=1,
\end{aligned}
$$

这与 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$ 矛盾！

所以 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_k\cdot 2^{n-k}\leqslant 0$． ………………10 分

因此有：

$$
\begin{aligned}
&a_1<0,\\
&a_1\cdot 2+a_2\leqslant 0,\\
&a_1\cdot 4+a_2\cdot 2+a_3\leqslant 0,\\
&\cdots\\
&a_1\cdot 2^{k-1}+a_2\cdot 2^{k-2}+\cdots+a_{k-1}\cdot 2+a_k\leqslant 0,\\
&\cdots\\
&a_1\cdot 2^{n-2}+a_2\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-2}\cdot 2+a_{n-1}\leqslant 0.
\end{aligned}
$$

将上述 $n-1$ 个不等式相加得 $a_1\cdot(2^{n-1}-1)+a_2\cdot(2^{n-2}-1)+\cdots+a_{n-1}\cdot(2-1)<0$， ①

又 $a_1\cdot 2^{n-1}+a_2\cdot 2^{n-2}+a_3\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_{n-1}\cdot 2+a_n=0$， ②

两式相减即得 $a_1+a_2+\cdots+a_n>0$． ………………13 分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao