机密★启用前

试卷类型 A

山东名校考试联盟
2023 年 12 月高三年级阶段性检测
数 学 试 题

本试卷共 4 页，22 题，全卷满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x\leqslant\sqrt{5}\}$，$B=\{x\mid y=\lg(x-1)\}$，则 $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=$

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$，则 $z^{2023}=$

A. i　　B. -1　　C. $-\mathrm{i}$　　D. 1

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,1)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

A. $(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5})$　　B. $(\frac{8\sqrt{5}}{5},\frac{6\sqrt{5}}{5})$　　C. $(\frac{2}{5},\frac{4}{5})$　　D. $(\frac{8}{5},\frac{6}{5})$

4. 已知函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0,\end{cases}$ 则“$\operatorname{sgn}(\ln x)\times\operatorname{sgn}(x+1)=1$”是“$x>1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 盖碗是由茶碗、茶盖、茶船三件套组成，盖碗又称“三才碗”，蕴含了古代哲人讲的“天盖之，地载之，人育之”的道理. 如图是乾隆时期的山水人物方盖碗的茶盖和茶碗，近似看作两个正四棱台的组合体，其中茶碗上底面的边长为 6 cm，下底面边长为 3 cm，高为 5.4 cm，则 1 L（1000 cm^3）茶水至少可以喝(不足一碗算一碗)

A. 7 碗　　B. 8 碗　　C. 9 碗　　D. 10 碗

6. 已知实数 x,y 满足 $x>y>0$，且 $3x-y=2$，则 $\frac{2}{x+y}+\frac{1}{x-y}$ 的最小值为

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax, x\leqslant 0,\\ \dfrac{\ln x}{x}, x>0,\end{cases}$ 则函数 $g(x)=2\sqrt{e}f(f(x))-1$ 的零点个数为

A. 0 或 3　　B. 0 或 1　　C. 1 或 2　　D. 2 或 3

8. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内不存在最值，且在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 上，满足 $f(x)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 恒成立，则 ω 的取值范围是

A. $(0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{5}{6}]$　　B. $(0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$

C. $(0,\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{3},\frac{5}{6}]$　　D. $(0,\frac{1}{6}]\cup[\frac{1}{3},1]$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列条件能推出 $a>b$ 的是

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，且 $ab<0$　　B. $ac>bc$，且 $c>0$

C. $\frac{c}{a-c}>\frac{c}{b-c}$，且 $c<0$　　D. $\frac{b+c}{a+c}>\frac{b}{a}$，且 $a>0,b>0$

10. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $a_n^2-3a_na_{n-1}+2a_{n-1}^2=0(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则该数列前 5 项和可能是

A. 5　　B. 10　　C. 29　　D. 31

11. 对于任意非零实数 x,y，函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，$f(1)=1$，则下列结论正确的是

A. $f(\frac{1}{2})=2$　　B. $\sum\limits_{i=1}^{2023}f(\frac{1}{2^i})=2^{2023}-2$

C. $f(x)$ 为奇函数　　D. $f(x)$ 在定义域内单调递减

12. 已知正四面体 O-ABC 的棱长为 2，下列说法正确的是

A. 正四面体 O-ABC 的外接球体积为 $\sqrt{6}\pi$

B. 若点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，且 $x+y+z=1$，则 $|\overrightarrow{OP}|$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

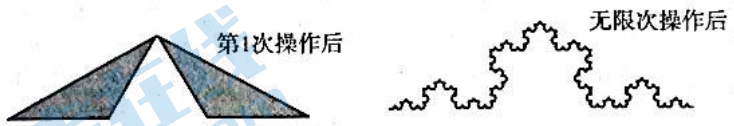
C. 若正四面体 Q-DEF 在正四面体 O-ABC 的内部，且可以任意转动，则正四面体 Q-DEF 的体积可能为 $\frac{\sqrt{2}}{27}$

D. 若正四面体 O-ABC 的四个顶点分别在四个互相平行的平面内，且每相邻平行平面间的距离均相等，则此距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=2$，则 $\sin 2\alpha$ 的值为________.

14. 如图所示，将一个顶角为 120°的等腰三角形（含边界和内部）的底边三等分，挖去由两个等分点和上顶点构成的等边三角形，得到与原三角形相似的两个全等三角形，再对余下的所有三角形重复这一操作. 如果这个操作过程无限继续下去……，最后挖剩下的就是一条“雪花”状的科克曲线（Koch curve）. 已知最初等腰三角形的面积为 3，则经过 5 次操作之后所得图形的面积为________.



（第 14 题图）

15. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形，点 M 为平面 ABC 内的一点，则 $\overrightarrow{MA}\cdot(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$ 的最小值为________.

16. 已知函数 $f(x)=(x^2+a)\cos x$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，则 a 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2+a_6=16, S_5=30$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

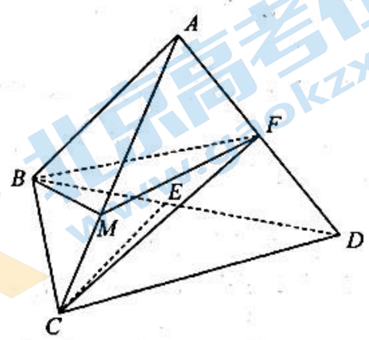
(2)求证：$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<1$.

18.（12 分）

如图，在正三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，$BC=2\sqrt{2}$，$AB=2$，E，F 分别是 BD，AD 中点，M 是 AC 上一点，且满足 $AM=2MC$.

(1)证明：$CE \parallel$ 平面 BMF；

(2)求点 D 到平面 CEF 的距离.



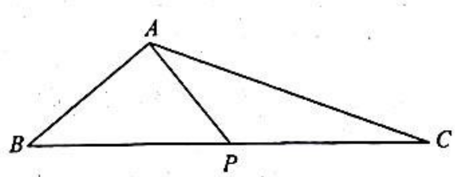
（第 18 题图）

19.（12 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，点 P 在边 BC 上，且 $AP\perp AB$，$AP=2$.

(1)若 $PC=\sqrt{13}$，求 PB；

(2)求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.



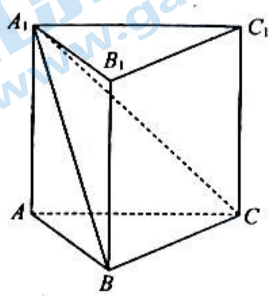
（第 19 题图）

20.（12 分）

如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=2$，侧面 ABB_1A_1 是正方形，且平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1.

（1）求证：$AB\perp BC$；

（2）当 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$，在线段 A_1C 上是否存在点 E，使平面 ABE 与平面 BCE 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$？说明理由.



（第 20 题图）

21.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$na_{n+1}=(2n+2)a_n+(n^2+n)2^{n+1}$.

（1）证明：数列 $\left\{\frac{a_n}{n\cdot 2^n}\right\}$ 是等差数列；

（2）设 $b_n=\frac{a_n}{n}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和 S_{100}.

22.（12 分）

定义函数 $f_n(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

（1）求曲线 $y=f_n(x)$ 在 $x=-2$ 处的切线斜率；

（2）若 $f_2(x)-2\geqslant ke^x$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 k 的取值范围；

（3）讨论函数 $f_n(x)$ 的零点个数，并判断 $f_n(x)$ 是否有最小值. 若 $f_n(x)$ 有最小值 m，证明：$m>1-\ln 2$；若 $f_n(x)$ 没有最小值，说明理由.

（注：$e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数）