广东省普通高中2022届高三9月阶段性质量检测

数　学

2021.9

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
3. 本卷命题范围：集合、常用逻辑、函数与导数。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设命题 p：$\forall x>2, x^2<e^x$，则命题 p 的否定为

A. $\exists x>2, x^2<e^x$　　B. $\exists x>2, x^2\geq e^x$

C. $\forall x>2, x^2\geq e^x$　　D. $\forall x>2, x^2>e^x$

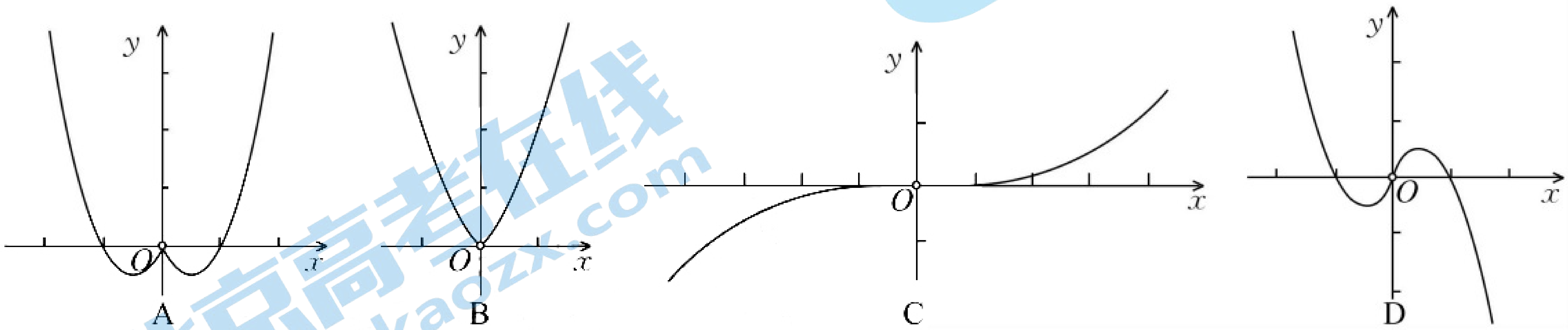
2. 已知集合 $A=\left\{x \left| 2^x>\frac{1}{4}, x\in \mathbf{Z}\right.\right\}$，$B=\{a, 2a\}$，若 $B\subseteq A$，则 a 的值可能是

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}} x, x\geq 3,\\ 2^x, x<3,\end{cases}$ 则 $f(f(81))=$

A. 16　　B. $-\log_3 4$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\log_3 4$

4. 函数 $f(x)=(x^2+|x|)\cdot \ln|x|$ 的图象大致是



5. 已知函数 $f(x)=ax^2+x+c$，有下列四个命题：

p_1：$x=-1$ 是 $f(x)$ 的零点；　　p_2：$x=2$ 是 $f(x)$ 的零点；

p_3：$f(x)$ 的两个零点之和为3；　　p_4：$f(x)$ 有两个同号零点.

如果只有一个假命题，则该命题是

A. p_1　　B. p_2　　C. p_3　　D. p_4

6. 若函数 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x$ 在$[1,4]$上存在单调递减区间，则实数 a 的取值范围为

A. $\left[-\frac{7}{16},+\infty\right)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $\left(-\frac{7}{16},+\infty\right)$

7. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$在$[0,10]$上有 1 和 3 两个零点，且 $y=f(x+2)$与 $y=f(x+7)$都是偶函数，则函数 $y=f(x)$在$[0,2\ 013]$上的零点个数为

A. 404　　B. 804

C. 806　　D. 402

8. 已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$，且 $\ln a=a-1$，$b\ln b=1$，$ce^c=1$，则 a,b,c 的大小关系是

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$

C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 p：关于 x 的不等式 $mx^2-3mx+4>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则下列结论正确的是

A. p 的必要不充分条件是 $-1\leqslant m<2$　　B. p 的充分不必要条件是 $m=\frac{2\ 021}{2\ 020}$

C. $0<m<\frac{16}{9}$是 p 的充要条件　　D. $|m|\leqslant 2$ 是 p 的既不充分也不必要条件

10. 已知函数 $y=2a+\left|\frac{(1-2a)x+3+2a}{x-1}\right|$（$a$ 是常数）在$[2,5]$上的最大值是 5，则 a 的值可能是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 已知函数 $f(x)=x+\sin x-x\cos x$ 的定义域为$[-2\pi,2\pi)$，则

A. $f(x)$为奇函数

B. $f(x)$在$[0,\pi)$上单调递增

C. $f(x)$恰有 4 个极大值点

D. $f(x)$有且仅有 4 个极值点

12. 已知函数 $f(x)=x^2+mx+n(m,n\in\mathbf{R})$，关于 x 的不等式 $x<f(x)$的解集为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，则

A. $m=-1,n=1$

B. 设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $g(x)$的最小值一定为 $g(1)=1$

C. 不等式 $f(x)<f(f(x))$的解集为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

D. 若 $h(x)=\begin{cases}\frac{3}{4},x\leqslant\frac{1}{2}\\ f(x),x>\frac{1}{2}\end{cases}$，且 $h(x)<h(2x+2)$，则 x 的取值范围是$\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知曲线 $f(x)=x^3+b$ 在 $x=a(a>0)$处的切线方程为 $3x-y+2=0$，则 $b=$________.

14. 若函数 $f(x)$满足 $f(x)-x=2f(2-x)$，则 $f(3)=$________.

15. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$在 $x=1$ 处取得极值 10，则 $f(2)$的值为________.

16. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上无零点的偶函数，若 $f(\pi^0)=0$，且 $f'(x)g(x)>f(x)g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上恒成立，则 $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ 的解集是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

设 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的数列，$a_1=3$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+4a_{n+1}+4a_n}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $b_n=\frac{n(n+1)}{S_{n+1}S_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

18.（本小题满分 12 分）

某班体育课组织篮球投篮考核，考核分为定点投篮与三步篮两个项目. 每个学生在每个项目投篮 5 次，以规范动作投中 3 次为考核合格，定点投篮考核合格得 4 分，否则得 0 分；三步篮考核合格得 6 分，否则得 0 分. 现将该班学生分为两组，一组先进行定点投篮考核，一组先进行三步篮考核，若先考核的项目不合格，则无需进行下一个项目，直接判定为考核不合格；若先考核的项目合格，则进入下一个项目进行考核，无论第二个项目考核是否合格都结束考核. 已知小明定点投篮考核合格的概率为 0.8，三步篮考核合格的概率为 0.7，且每个项目考核合格的概率与考核次序无关.

(1)若小明先进行定点投篮考核，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

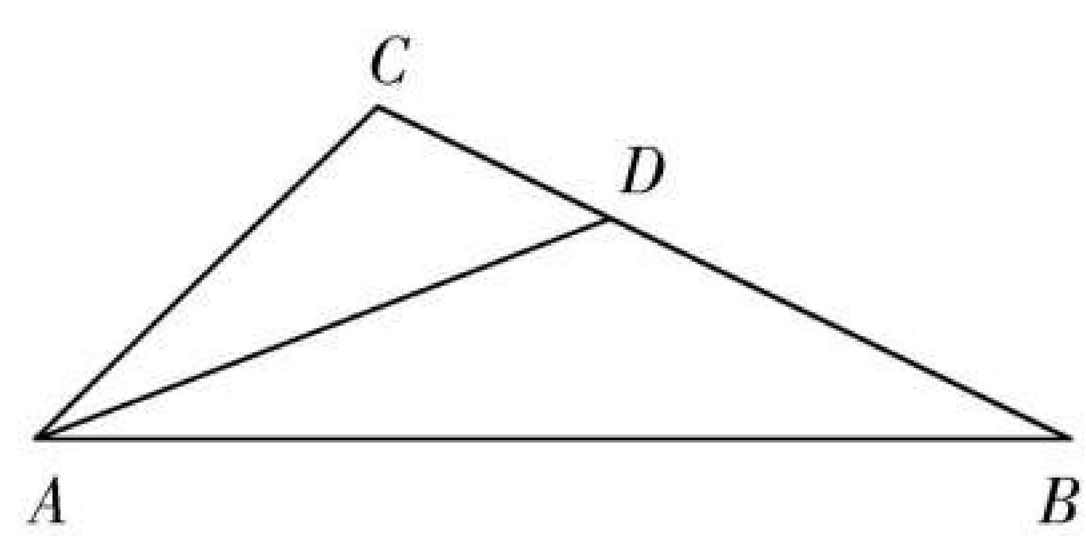
(2)为使累计得分的期望最大，小明应选择先进行哪个项目的考核？并说明理由.

19.（本小题满分 12 分）

已知△ABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $3(b-a\cos C)=2c$.

(1)求 $\cos A$；

(2)若 $c=2b$，点 D 在边 BC 上，且 $BD=2DC$，$AD=\sqrt{10}$，求 c.

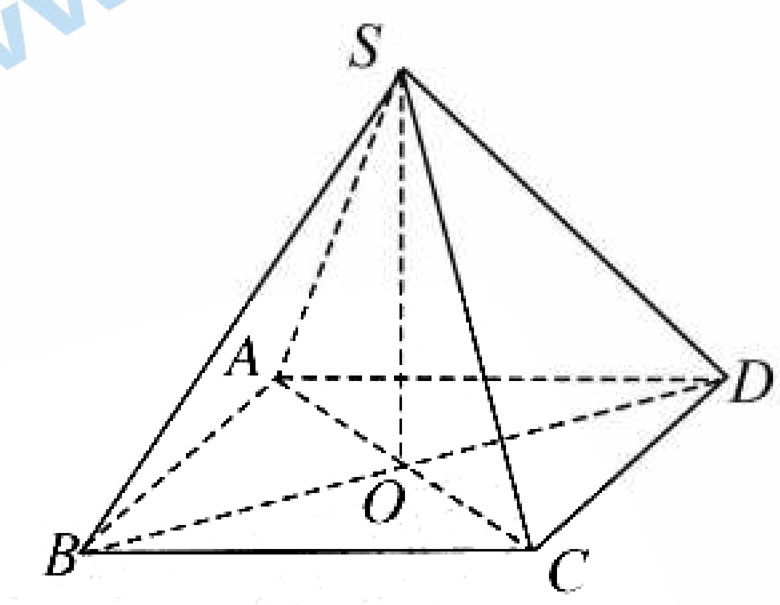


20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 是正方形，且顶点 S 到 A,B,C,D 的距离相等，AC 与 BD 交于点 O，连接 SO.

(1)求证：$SO\perp CD$；

(2)若 $SA=AB$，求平面 SAB 与平面 SCD 所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2，双曲线 C 的右顶点 A 在圆 $O:x^2+y^2=2$ 上，且$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=-2$.

(1)求双曲线 C 的标准方程；

(2)动直线 l 与双曲线 C 恰有 1 个公共点，且与双曲线 C 的两条渐近线分别交于点 M、N，问 $\triangle OMN$（O 为坐标原点）的面积是否为定值？若为定值，求出该定值；若不为定值，试说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

函数 $f(x)=-x^2+ax+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)试讨论函数 $g(x)=f(x)+\frac{3}{2}x^2$ 的极值点的个数；

(2)若 $f(x)\leqslant e^x$ 在定义域内恒成立，证明：

①$a\leqslant e+1$；

②$xe^x+x^3-(e+1)x^2-2x+e>0$.

广东省普通高中 2022 届高三 9 月阶段性质量检测·数学
参考答案、提示及评分细则

1. B　全称命题的否定是特称命题，所以命题 p 的否定为 $\exists x>2, x^2\geqslant e^x$，故选 B.

2. D　因为 $A=\left\{x\,|\,2^x>\frac{1}{4}, x\in\mathbf{Z}\right\}=\{x\,|\,x>-2, x\in\mathbf{Z}\}$，若 $a=-1$，则 $2a=-2\notin A$；若 $a=0$，则 $2a=a$，不满足元素的互异性；若 $a=\frac{1}{2}$，则 $a\notin A$；若 $a=1$，$B=\{1,2\}\subseteq A$，故选 D.

3. C　因为函数 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x, x\geqslant 3,\\ 2^x, x<3,\end{cases}$ 所以 $f(81)=f(3^4)=\log_{\frac{1}{3}}3^4=-\log_3 3^4=-4$，所以 $f(f(81))=f(-4)=2^{-4}=\frac{1}{16}$，故选 C.

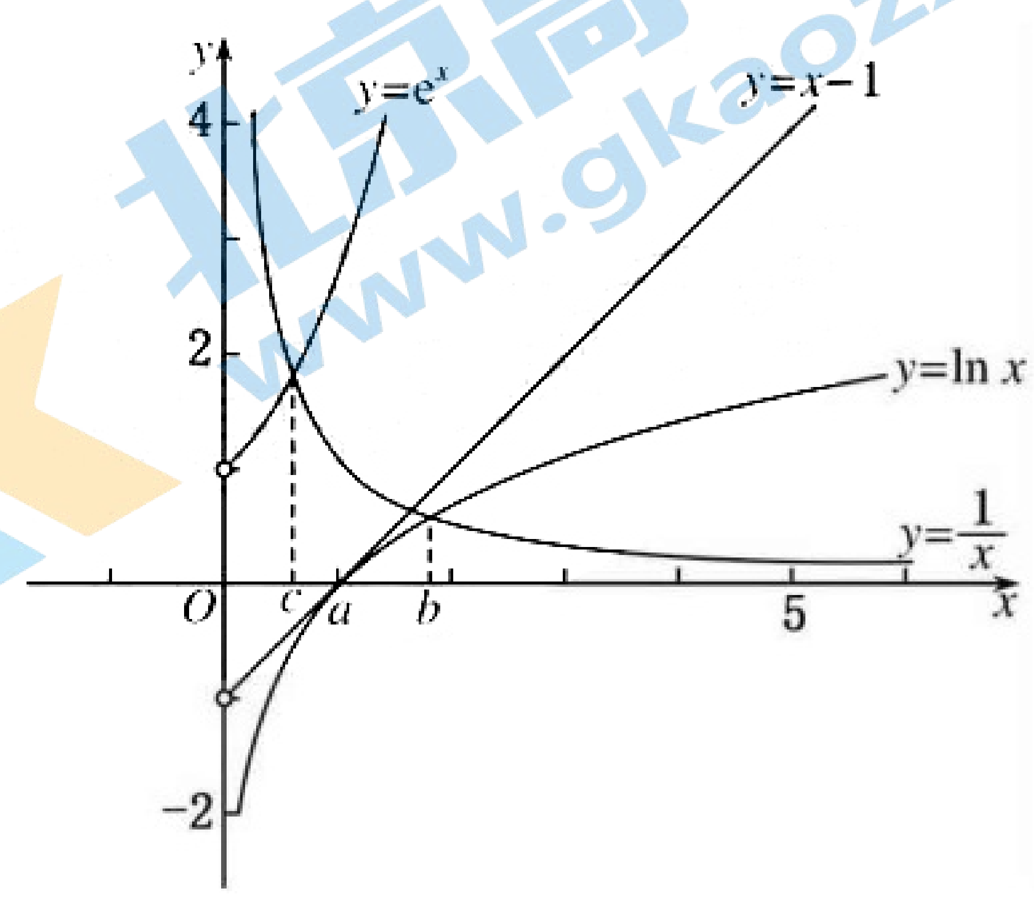
4. A　由题知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域关于原点对称，且 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，其函数图象关于 y 轴对称，故排除选项 C，D；又 $f(-1)=f(1)=0$，故排除选项 B，故选 A.

5. A　若 p_1，p_2 是真命题，则 p_3，p_4 均为假命题，不合题意，故 p_1，p_2 中必有一个假命题，若 p_1 是真命题，p_2 是假命题，由 p_3 是真命题，知 $f(x)$ 的另一个零点为 $x=4$，则 p_4 为假命题，不符合题意；若 p_1 是假命题，则 p_2 是真命题，由 p_3 是真命题，知 $f(x)$ 的另一个零点为 $x=1$，此时 p_4 为真命题，符合题意. 综上，故选 A.

6. B　因为 $h(x)$ 在 $[1,4]$ 上存在单调递减区间，所以 $h'(x)=\frac{1}{x}-ax-2<0$ 在 $[1,4]$ 上有解，所以当 $x\in[1,4]$ 时，$a>\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$ 有解，而当 $x\in[1,4]$ 时，$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)_{\min}=-1$（此时 $x=1$），所以 $a>-1$，所以 a 的取值范围是 $(-1,+\infty)$. 故选 B.

7. A　因为 $y=f(x+2)$ 与 $y=f(x+7)$ 都为偶函数，所以 $f(x+2)=f(-x+2)$，$f(x+7)=f(-x+7)$，所以 $f(x)$ 图象关于 $x=2$，$x=7$ 轴对称，所以 $f(x)$ 为周期函数，且 $T=2\cdot(7-2)=10$，所以将 $[0,2\ 013]$ 划分为 $[0,10)\cup[10,20)\cup\cdots\cup[2\ 000,2\ 010)\cup[2\ 010,2\ 013]$. 而 $[0,10)\cup[10,20)\cup\cdots\cup[2\ 000,2\ 010)$ 共 201 组，所以 $N=201\times 2=402$，在 $[2\ 010,2\ 013]$ 中，含有零点 $f(2\ 011)=f(1)=0$，$f(2\ 013)=f(3)=0$ 共 2 个，所以一共有 404 个零点. 故选 A.

8. C　$\ln a=a-1$，$\ln b=\frac{1}{b}$，$e^c=\frac{1}{c}$. 依次作出 $y=e^x$，$y=\ln x$，$y=x-1$，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象，如图所示. 由图象可知 $0<c<1$，$a=1$，$b>1$，所以 $c<a<b$. 故选 C.



9. AB　当 $m=0$ 时，显然不等式 $4>0$ 成立，满足题意；

当 $m\neq 0$ 时，要使 p 成立，则 $\begin{cases}m>0,\\ \Delta=(-3m)^2-4\times 4m<0,\end{cases}$ 解得 $0<m<\frac{16}{9}$.

综上可知，p 的充要条件是 $0\leqslant m<\frac{16}{9}$，C 错误；

易知当 $0\leqslant m<\frac{16}{9}$ 时，显然也满足条件 $-1\leqslant m<2$，但反之不成立，所以 A 正确；

当 $m=\frac{2\ 021}{2\ 020}$ 时，满足不等式 $0\leqslant m<\frac{16}{9}$，反之不成立，所以 B 正确；

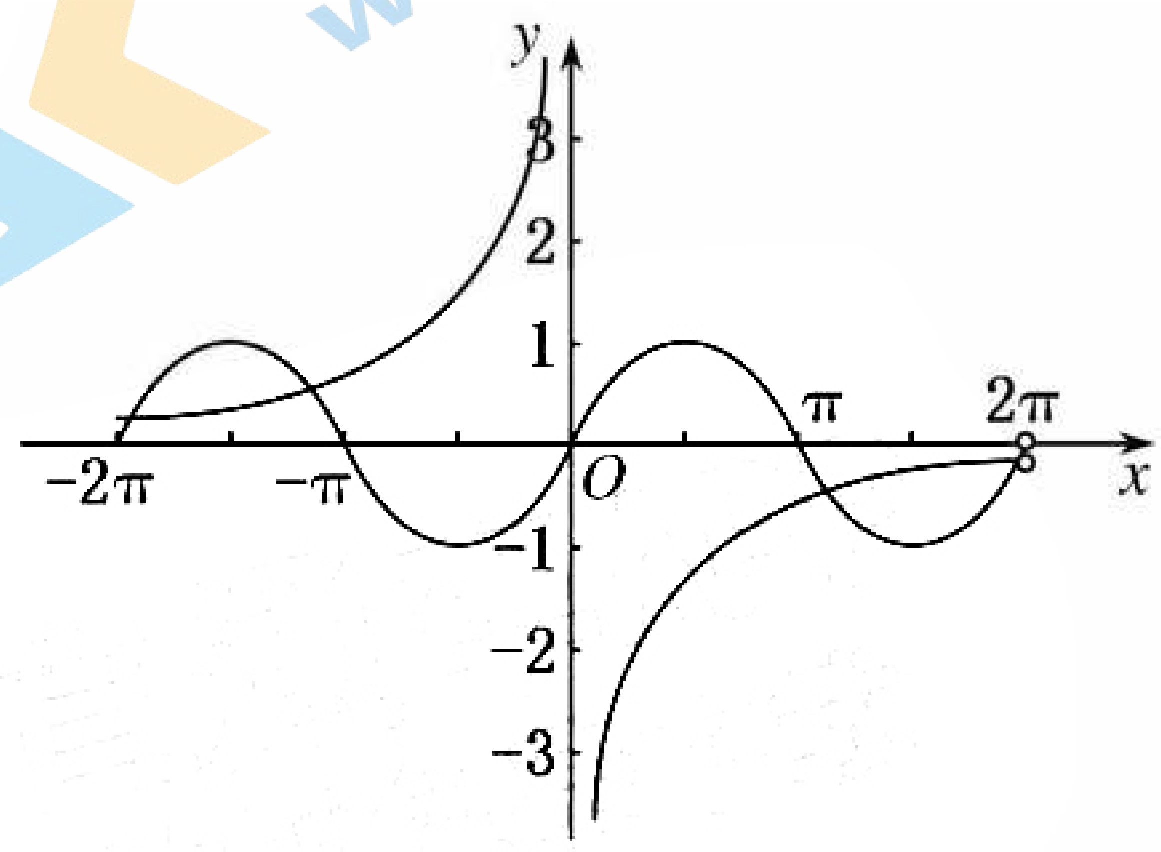
由 $|m|\leqslant 2$ 得 $-2\leqslant m\leqslant 2$，显然它是 p 的必要不充分条件，D 错误.

故选 AB.

10. AB　令 $f(x)=y=2a+\left|\frac{(1-2a)x+3+2a}{x-1}\right|=2a+\left|\frac{4}{x-1}+1-2a\right|$（$a$ 是常数），因为 $x\in[2,5]$，所以 $\frac{4}{x-1}$

$+1\in[2,5]$. 若 $a\leqslant 1$，$f(x)=2a+\dfrac{4}{x-1}+1-2a=\dfrac{4}{x-1}+1$ 的最大值为 5，符合题意；当 $1<a\leqslant\dfrac{5}{2}$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(2)$ 与 $f(5)$ 中较大的数，由 $f(2)=f(5)$，即 $2a+|5-2a|=2a+|2-2a|$，解得 $a=\dfrac{7}{4}$，显然当 $1<a\leqslant\dfrac{7}{4}$ 时，$f(x)$ 的最大值为 5，当 $a>\dfrac{7}{4}$ 时，$f(x)$ 的最大值不为定值. 综上，当 $a\leqslant\dfrac{7}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $[2,5]$ 上的最大值是 5，结合选项可知，a 的值可能是 0 或 1，故选 AB.

11. BD　因为 $f(x)$ 的定义域 $[-2\pi,2\pi)$ 不关于原点对称，所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数. 由题意 $f'(x)=1+\cos x-(\cos x-x\sin x)=1+x\sin x$，当 $x\in[0,\pi)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[0,\pi)$ 上单调递增. 令 $f'(x)=0$，得 $\sin x=-\dfrac{1}{x}$. 作出 $y=\sin x$，$y=-\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[-2\pi,2\pi)$ 上的大致图象，如图所示，由图可知，这两个函数的图象在区间 $[-2\pi,2\pi)$ 上共有 4 个公共点，且两图象在这些公共点处都不相切，故 $f(x)$ 在区间 $[-2\pi,2\pi)$ 上的极值点的个数为 4，且 $f(x)$ 只有 2 个极大值点. 故选 BD.



12. ACD　由题意 $f(x)-x=(x-1)^2$，即 $f(x)=x^2-x+1$，$\therefore m=-1$，$n=1$，A 正确；$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}-1$，但当 $x<0$ 时，$f(x)\leqslant-3$，B 错；$f(f(x))>f(x)$，由已知 $f(x)\neq 1$，即 $x^2-x+1\neq 1$，$x\neq 0$ 且 $x\neq 1$，C 正确；由题意知 $h(x)$ 在 $[\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上是增函数，在 $(-\infty,\dfrac{1}{2}]$ 上是常函数，因此由 $h(x)<h(2x+2)$ 得 $\dfrac{1}{2}\leqslant x<2x+2$ 或 $\begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\ 2x+2>\dfrac{1}{2}\end{cases}$，解得 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{1}{2}$，综上，$x>-\dfrac{3}{4}$. D 正确. 故应选 ACD.

13. 4　因为 $f(x)=x^3+b$，所以 $f'(x)=3x^2$，由题意得 $3a^2=3(a>0)$，所以 $a=1$，由 $(1,1+b)$ 在切线 $3x-y+2=0$ 上，得 $b=4$.

14. $-\dfrac{1}{3}$　因为 $f(x)-x=2f(2-x)$，所以 $f(x)-2f(2-x)=x$，所以 $f(2-x)-2f(x)=2-x$. 联立可得 $f(x)=\dfrac{x-4}{3}$，所以 $f(3)=-\dfrac{1}{3}$.

15. 18　$f'(x)=3x^2+2ax+b$，由题意得 $\begin{cases}f(1)=10,\\ f'(1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a^2+a+b+1=10,\\ 2a+b+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\ b=-11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3,\\ b=3.\end{cases}$

当 $a=-3$，$b=3$ 时，$f'(x)=3(x-1)^2\geqslant 0$，$f(x)$ 无极值. 当 $a=4$，$b=-11$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=-\dfrac{11}{3}$. 当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(-\infty,-\dfrac{11}{3}\right)$	$-\dfrac{11}{3}$	$\left(-\dfrac{11}{3},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)=x^3+4x^2-11x+16$，$f(2)=18$.

16. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$　令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则 $h(-x)=\dfrac{f(-x)}{g(-x)}=-h(x)$，所以函数 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数，所以 $f(\pi^0)=f(1)=f(-1)=0$. 因为 $f'(x)g(x)>f(x)g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上恒成立，所以 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$ 在 $(-\infty,0)$ 上恒成立. 当 $x<0$ 时，$h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $h(-1)=\dfrac{f(-1)}{g(-1)}=0$，所以 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ 即 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$<h(-1)$，所以 $x<-1$. 当 $x>0$ 时，因为 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ 即 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}<h(1)$，又 $h(0)=\dfrac{f(0)}{g(0)}=0$，所以 $0<x<1$. 综上，$\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$ 的解集是 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

17. 解：(1)由 $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+4a_{n+1}+4a_n}$ 得 $a_{n+1}^2=a_n^2+4a_{n+1}+4a_n$，

整理得 $(a_{n+1}-a_n-4)(a_{n+1}+a_n)=0$， …………………………………………………… 2 分

又 $a_{n+1}+a_n>0$，所以 $a_{n+1}-a_n=4$， ……………………………………………………… 4 分

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 4 的等差数列，故 $a_n=4n-1$. …………………………………… 5 分

(2)由(1)可知，$S_n=\dfrac{n(3+4n-1)}{2}=n(2n+1)$，$S_{n+1}=(n+1)(2n+3)$，……………………… 6 分

所以 $b_n=\dfrac{n(n+1)}{S_{n+1}S_n}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$， ……………………………… 8 分

设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

$T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\dfrac{n}{6n+9}$. ………… 10 分

18. 解：(1)由已知可得，X 的所有可能取值为 0，4，10，

则 $P(X=0)=1-0.8=0.2$，

$P(X=4)=0.8\times(1-0.7)=0.24$，

$P(X=10)=0.8\times0.7=0.56$，

所以 X 的分布列为：

X	0	4	10
P	0.2	0.24	0.56

…………………… 4 分

(2)小明应选择先进行定点投篮考核，理由如下：

由(1)可知小明先进行定点投篮考核，累计得分的期望为 $E(X)=0\times0.2+4\times0.24+10\times0.56=6.56$， ………………………………………………………………………………………………… 6 分

若小明先进行三步篮考核，记 Y 为小明的累计得分，

则 Y 的所有可能取值为 0，6，10，

$P(Y=0)=1-0.7=0.3$，

$P(Y=6)=0.7\times(1-0.8)=0.14$，

$P(Y=10)=0.7\times0.8=0.56$，

则 Y 的期望为 $E(Y)=0\times0.3+6\times0.14+10\times0.48=5.64$， ………………………………… 10 分

因为 $E(X)>E(Y)$，

所以为使累计得分的期望最大，小明应选择先进行定点投篮考核. ………………………… 12 分

19. 解：(1)由正弦定理及 $3b=3a\cos C+2c$，得 $3\sin B=3\sin(A+C)=3\sin A\cos C+2\sin C$， ……………… 2 分

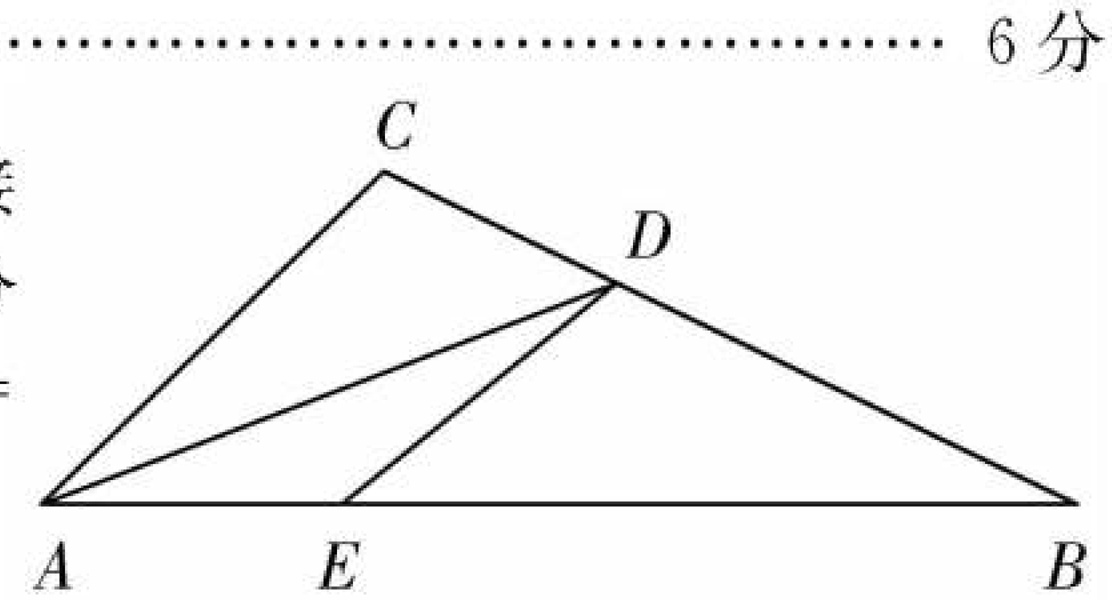
即 $3\sin A\cos C+3\cos A\sin C=3\sin A\cos C+2\sin C$，

即 $3\cos A\sin C=2\sin C$. ………………………………………………………………………… 4 分

因为 $0<C<\pi$，$\sin C\neq0$，

所以 $\cos A=\dfrac{2}{3}$. ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)设 $b=t$，则 $c=2t$. 如图，在 AB 上取一点 E，使得 $BE=2EA$，连接 DE，则 $DE/\!/AC$. ……………………………………………… 8 分



在 $\triangle ADE$ 中，$\angle AED=\pi-\angle CAB$，$\cos\angle AED=-\cos\angle CAB=-\dfrac{2}{3}$，

$AE=\dfrac{1}{3}c=\dfrac{2t}{3}$，$DE=\dfrac{2}{3}b=\dfrac{2t}{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

由余弦定理得 $AD^2=AE^2+DE^2-2AE\cdot DE\cos\angle AED$，

即 $10=\frac{4t^2}{9}+\frac{4t^2}{9}-2\times\frac{4t^2}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{40t^2}{27}$，

所以 $t^2=\frac{27}{4}$，$t=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$c=2t=3\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，

所以 O 为 AC，BD 的中点，………………………………………………………………………… 1 分

因为 $SB=SD$，$SA=SC$，

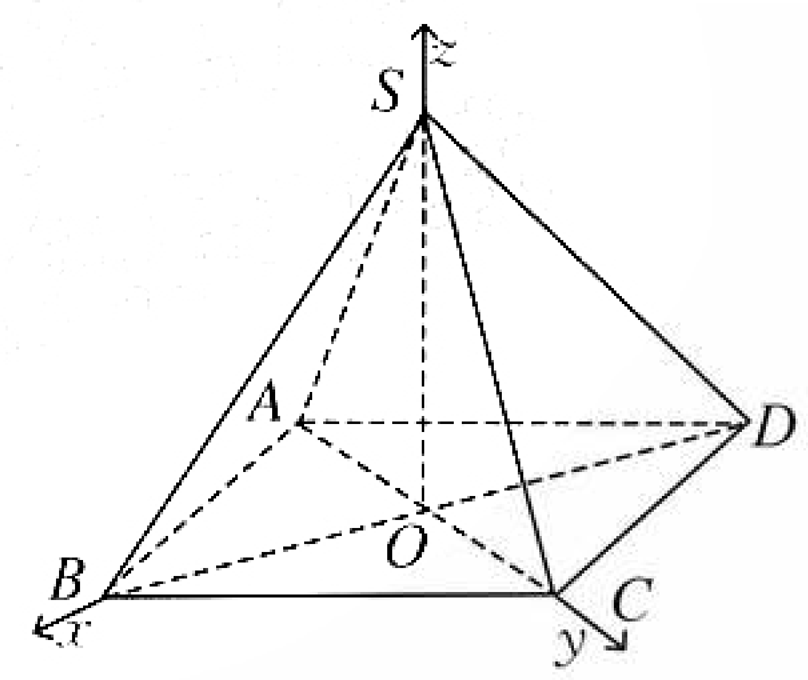
所以 $SO\perp BD$，$SO\perp AC$，………………………………………………………………………… 3 分

又 $BD\cap AC=O$，

所以 $SO\perp$ 底面 $ABCD$，………………………………………………………………………………… 4 分

所以 $SO\perp CD$. ……………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)解：以 O 为原点，分别以 OB，OC，OS 为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，



设 $SA=AB=2$，则 $OS=OA=OB=OC=OD=\sqrt{2}$，

所以 $O(0,0,0)$，$S(0,0,\sqrt{2})$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$D(-\sqrt{2},0,0)$，$A(0,-\sqrt{2},0)$，

所以 $\overrightarrow{SA}=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{SB}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{SC}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{SD}=(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$，

设平面 SAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{SA}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0,\\ \overrightarrow{SB}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{2}x-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$. ………………………… 7 分

设平面 SCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{SC}\cdot\boldsymbol{m}=\sqrt{2}b-\sqrt{2}c=0,\\ \overrightarrow{SD}\cdot\boldsymbol{m}=-\sqrt{2}a-\sqrt{2}c=0.\end{cases}$ 令 $a=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,-1,-1)$. ………………………… 8 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$，………………………………………… 10 分

所以 $\sin\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，……………………………………………………………… 11 分

所以平面 SAB 与平面 SCD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)设双曲线 C 的半焦距为 c，

由点 $A(a,0)$ 在圆 O：$x^2+y^2=2$ 上，得 $a=\sqrt{2}$，

由 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=(-c-\sqrt{2},0)\cdot(c-\sqrt{2},0)=2-c^2=-2$，得 $c=2$，

所以 $b^2=c^2-a^2=2$，

所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)设直线 l 与 x 轴相交于点 D，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm x$，

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 为 $x=\pm\sqrt{2}$，$|OD|=\sqrt{2}$，$|MN|=2\sqrt{2}$，得 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|OD|=2$，

当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y=kx+m$，显然 $k\neq0$，则 $D\left(-\frac{m}{k},0\right)$，

把直线 l 的方程与 C：$x^2-y^2=2$ 联立得 $(k^2-1)x^2+2kmx+m^2+2=0$，

由直线 l 与轨迹 C 有且只有一个公共点，且与双曲线 C 的两条渐近线分别相交可知直线 l 与双曲线的渐近线不平行，所以 $k^2-1\neq0$，且 $m\neq0$，

于是得 $\begin{cases}\Delta=4k^2m^2-4(k^2-1)(m^2+2)=0\\ k^2-1\neq0\end{cases}$，

得 $m^2=2(k^2-1)>0$，得 $k>1$ 或 $k<-1$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\y=x\end{cases}$，得 $y_1=\dfrac{m}{1-k}$，

同理得 $y_2=\dfrac{m}{1+k}$，

所以 $S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}|OD||y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{m}{k}\right|\left|\dfrac{m}{1-k}-\dfrac{m}{1+k}\right|=\left|\dfrac{m^2}{1-k^2}\right|=2.$

综上，$\triangle OMN$ 的面积恒为定值 2. ………………………………………………………………………… 12 分

22. (1)解：由题意得 $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+\ln x$，

所以 $g'(x)=x+\dfrac{1}{x}+a=\dfrac{x^2+ax+1}{x}(x>0)$，令 $\Delta=a^2-4$，

当 $\Delta=a^2-4\leqslant 0$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 时，$x^2+ax+1\geqslant 0$ 对 $x>0$ 恒成立，

即 $g'(x)=\dfrac{x^2+ax+1}{x}\geqslant 0$ 对 $x>0$ 恒成立，此时 $g(x)$ 没有极值点；………………………………… 2 分

当 $\Delta=a^2-4>0$，即 $a<-2$ 或 $a>2$ 时，

1) $a<-2$ 时，设方程 $x^2+ax+1=0$ 的两个不同实根为 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，

则 $x_1+x_2=-a>0$，$x_1x_2=1>0$，故 $x_2>x_1>0$，

所以 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时 $g'(x)>0$；在 $x_1<x<x_2$ 时 $g'(x)<0$，

故 x_1,x_2 是函数 $g(x)$ 的两个极值点.

2) $a>2$ 时，设方程 $x^2+ax+1=0$ 的两个不同实根为 x_3,x_4，

则 $x_3+x_4=-a<0$，$x_3x_4=1>0$，故 $x_3<0$，$x_4<0$，

所以 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，故函数 $g(x)$ 没有极值点. ………………………………………………… 4 分

综上，当 $a<-2$ 时，函数 $g(x)$ 有两个极值点；当 $a\geqslant -2$ 时，函数 $g(x)$ 没有极值点. ………………… 5 分

(2)证明：① $f(x)\leqslant e^x\Leftrightarrow e^x-\ln x+x^2\geqslant ax$，

由 $x>0$，得 $a\leqslant\dfrac{e^x+x^2-\ln x}{x}$ 对于 $x>0$ 恒成立，设 $\varphi(x)=\dfrac{e^x+x^2-\ln x}{x}(x>0)$，

$$\varphi'(x)=\frac{\left(e^x+2x-\frac{1}{x}\right)x-(e^x+x^2-\ln x)}{x^2}=\frac{e^x(x-1)+\ln x+(x+1)(x-1)}{x^2},$$

$\because x>0$，$\therefore x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，$x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

$\therefore\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=e+1$，$\therefore a\leqslant e+1$. ………………………………………………………… 9 分

②由①知，当 $a=e+1$ 时有 $f(x)\leqslant e^x$，即 $e^x-\ln x+x^2\geqslant(e+1)x\Leftrightarrow e^x+x^2-(e+1)x\geqslant\ln x$ (＊)，当且仅当 $x=1$ 时取等号. ……………………………………………………………………………………………… 10 分

以下证明：$\ln x+\dfrac{e}{x}\geqslant 2$，设 $\theta(x)=\ln x+\dfrac{e}{x}$，$\theta'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{e}{x^2}=\dfrac{x-e}{x^2}$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,e)$ 时 $\theta'(x)<0$，$\theta(x)$ 单调递减，$x\in(e,+\infty)$ 时 $\theta'(x)>0$，$\theta(x)$ 单调递增，

$\therefore\theta(x)\geqslant\theta(e)=2$，$\therefore\ln x+\dfrac{e}{x}\geqslant 2$ (＊＊)，当且仅当 $x=e$ 时取等号.

由于(＊)(＊＊)等号不同时成立，可得 $e^x+x^2-(e+1)x+\dfrac{e}{x}>2$，

所以 $xe^x+x^3-(e+1)x^2-2x+e>0$. ………………………………………………………………… 12 分