黄冈市2022年高三年级9月调研考试

数学试题

黄冈市教育科学研究院命制

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的)

1. 若集合 $M=\{x|\ln x<1\}$，$N=\{x|\frac{x+1}{x}<2\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x|x>1\}$　　B. $\{x|1<x<e\}$　　C. $\{x|x<e\}$　　D. Φ

2. 设 $a>0$，$b>0$，则 $a\ln a<b\ln b$ 是 $b>a>1$ 的(　　)条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分　　C. 充要　　D. 既不充分也不必要

3. 在△ABC中，$\angle CAB=60°$，$AB=2$，$AC=1$，D为边BC上一点，且$CD=2BD$，则$|\overrightarrow{AD}|=$

A. $\frac{\sqrt{21}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. 已知 $f(x)=|\lg x|-c$ 有两个不同零点 a，b，则下列结论成立的是

A. a^2+b^2 最小值为2　　B. $a+b$ 最小值为2

C. $4a^2+b^2$ 最小值为4　　D. a^2+b^2-ab 最小值为1

5. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_3=4$，$S_6=12$，则$S_{12}=$

A. 32　　B. 28　　C. 48　　D. 60

6. 已知 $a=e^{-\frac{2021}{2022}}$，$b=\frac{1}{2022}$，$c=\ln\frac{2023}{2022}$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\theta)$，$(\omega>0,|\theta|<\frac{\pi}{2})$，$x=\frac{\pi}{6}$是$f(x)$的一个极值点，$x=-\frac{\pi}{6}$是与

其相邻的一个零点，则 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值为

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n\cdot(-1)^n+a_{n+2}=2n-1$，$S_{20}=650$，则 $a_{23}=$

A. 231　　B. 234　　C. 279　　D. 276

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 下列区间中能使函数 $y=\lg(x^3-x^2-x+1)$ 单调递增的是

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(-2,-\frac{1}{3})$　　D. $(-1,-\frac{1}{2})$

10. 下列各式中，值为$\sqrt{3}$的是

A. $2(\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12})$　　B. $\frac{1+\tan15^\circ}{1-\tan15^\circ}$

C. $\cos15^\circ-\sqrt{3}\sin15^\circ$　　D. $16\sin10^\circ\cos20^\circ\cos30^\circ\cos40^\circ$

11. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}$，若点 E 为线段 CD 上的动点，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$的值可能为

A. 1　　B. $\frac{21}{16}$　　C. 2　　D. $\frac{7}{2}$

12. 已知函数 $y=f(x)$ 对于任意的 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，均满足 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x=\ln x$，其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则下列不等式成立的是

A. $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{6})>\sqrt{3}f(\frac{\pi}{4})$　　B. $2f(\frac{\pi}{12})>(\sqrt{3}+1)f(\frac{\pi}{4})$

C. $(\sqrt{3}-1)f(\frac{\pi}{3})<\sqrt{2}f(\frac{5\pi}{12})$　　D. $(\sqrt{3}-1)f(\frac{\pi}{3})>\sqrt{2}f(\frac{5\pi}{12})$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，则 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$________.

14. 等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，公差 $d>0$. a_1,a_4 是函数 $f(x)=4\ln x+\frac{1}{2}x^2-5x$ 的极值点，则 $S_6=$________.

15. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x+1$，则不等式 $f(2x-3)+f(x)>2$ 的解集为________.

16. 对任意的 $x>1$，不等式$\frac{1}{a}e^x-\ln(x-1)-5+2\ln a\geq0$ 恒成立，则 a 的范围为________.

四、解答题：本小题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题10分）设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 已知向量$\boldsymbol{m}=(b,a)$，$\boldsymbol{n}=(\sin A,\sqrt{3}\cos(A+C))$且$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$

（1）求角B的大小；

（2）若$b=\sqrt{3}$，求$3a+c$的最大值.

18.（本小题12分）

已知数列$\{a_n\}$各项均为正数且满足$a_n^2-(n-1)a_n-2n^2+n=0$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=3$，且$b_{n+1}=3b_n+3^{n+1}$.

（1）求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

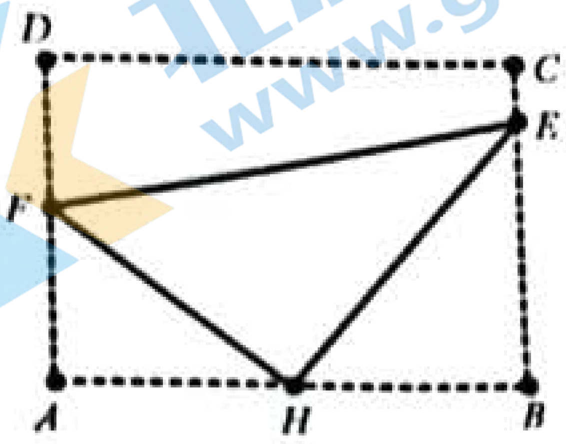
（2）若$c_n=b_n+a_n$，求$\{c_n\}$的前n项和T_n.

19.（本小题12分）已知函数$f(x)=(x^2-ax)\ln x-\dfrac{3}{2}x^2+2ax$.

（1）记$f'(x)=g(x)$，若对定义域内任意的x，$g(x)\geqslant 0$恒成立，求实数a的范围；

（2）试讨论函数$f(x)$的单调性.

20.(本小题 12 分)如图,我市某污水处理厂要在一个矩形污水处理池 $ABCD$ 的池底水平铺设污水净化管道($Rt\triangle FHE$ 三条边,H 是直角顶点)来处理污水,管道越长,污水净化效果越好.要求管道的接口 H 是 AB 的中点,点 E,F 分别落在线段 BC,AD 上,已知 $AB=20$m,$AD=10\sqrt{3}$m,记$\angle BHE=\theta$.



(1)试将污水净化管道的总长度 L(即 $Rt\triangle FHE$ 的周长)表示为 θ 的函数,并求出定义域;

(2)问 θ 取何值时,污水净化效果最好?并求出此时管道的总长度.

21.(本小题 12 分)已知函数 $f(x)=e^x(\sin x+\cos x)-2x$

(1) 求 $f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最小值(参考数据:$e=2.71828\cdots$)

22.(本小题 12 分)已知数列$\{a_n\}$,$a_1=1$,S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,且 $S_n=\frac{1}{3}(n+2)a_n$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 求证:$\sin a_n-a_n<0$;

(3) 证明:$(1+\sin\frac{1}{a_1})(1+\sin\frac{1}{a_2})(1+\sin\frac{1}{a_3})\cdots(1+\sin\frac{1}{a_n})<e^2$.

黄冈市2022年高三9月起点考试数学试题答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	A	C	D	A	D	B	BD	ABD	BC	ABC

二、.填空题

13. $2\sqrt{3}$　　14. 21　　15. $(1,+\infty)$　　16. $a \ge e^2$

三、解答题

17解析：(1) $\because \vec{m}\cdot\vec{n}=0$，$\therefore b\sin A-\sqrt{3}a\cos B=0$，$\therefore \sin A\sin B=\sqrt{3}\sin A\cos B$，

$\because \sin A\ne 0,\therefore \sin B=\sqrt{3}\cos B,\therefore \tan B=\sqrt{3}$，$\because B\in(0,\ \pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$ …………5分

(2)由$b=\sqrt{3}$,根据正弦定理得

$$\frac{b}{\sin\frac{\pi}{3}}=2=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},\therefore 3a+c=6\sin A+2\sin C=6\sin A+2\sin(\frac{2\pi}{3}-A)$$

$$=7\sin A+\sqrt{3}\cos A=\sqrt{49+3}\sin(A+\theta)\le 2\sqrt{13}$$，其中$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{7}$，

当且仅当$A+\theta=\frac{\pi}{2}$即$\tan A=\frac{7\sqrt{3}}{3}$时等号成立.

$\therefore 3a+c$的最大值为$2\sqrt{13}$ ……………………………………………………10分

18. 解析：(1) $a_n^2-(n-1)a_n-2n^2+n=0$可以分解为$(a_n-(2n-1))(a_n+n)=0$，

$\because a_n>0,\therefore a_n=2n-1$。$\because b_{n+1}=3b_n+3^{n+1}$，左右两边同除以$3^{n+1}$，得

$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{b_n}{3^n}+1,\therefore \frac{b_n}{3^n}=1+n-1=n$，$\therefore b_n=n\cdot 3^n$ ………………………6分

(2) $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$，

$$b_n=n\cdot 3^n=\frac{1}{2}(3n-(n-1)-1)3^n=\frac{1}{2}(n\cdot 3^{n+1}-(n-1)\cdot 3^n)-\frac{1}{2}3^n$$

$$\therefore \sum_{1}^{n}b_i=\frac{1}{2}n\cdot 3^{n+1}-\frac{1}{4}(3^{n+1}-3)=\frac{1}{4}(2n-1)3^{n+1}+\frac{3}{4}$$

$\therefore \sum_{1}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i = n^2 + \frac{1}{4}(2n-1)3^{n+1} + \frac{3}{4}$。 ……………………………………12 分

19. (1) 显然 $x>0$，$f'(x)=(2x-a)\ln x+(x^2-ax)\frac{1}{x}-3x+2a=(2x-a)(\ln x-1)$

即 $g(x)=(2x-a)(\ln x-1)\geq 0$, 对 $x>0$ 恒成立,

当 $0<x\leq e$ 时，$\ln x-1\leq 0, \therefore 2x-a\leq 0, \therefore a\geq (2x)_{max}=2e$;

当 $x\geq e$ 时，$\ln x-1\geq 0, \therefore 2x-a\geq 0, \therefore a\leq (2x)_{min}=2e$.

综上，$a=2e$. ……………………………………………5 分

(2) 由 (1) 知 $g(x)=(2x-a)(\ln x-1)$

①当 $a\leq 0$ 时，$2x-a>0$, 当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $0<x<e$ 时，$f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,

即当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\ e)$ 上递减，$(e,+\infty)$ 上递增 ……………………………7 分

②当 $a>0$ 时，由 (1) 知当 $a=2e$ 时，$f'(x)\geq 0$, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，……8 分

当 $a>2e$ 时，$f(x)$ 在 $(e,\frac{a}{2})$ 上单调递减，在 $(0,e),(\frac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增，…………10 分

当 $0<a<2e$ 时，$f(x)$ 在 $(\frac{a}{2},\ e)$ 上递减，$(0,\frac{a}{2}),(e,+\infty)$ 上递增……………………12 分

20.(1)由题意可得 $EH=\frac{10}{\cos\theta}$，$FH=\frac{10}{\sin\theta}$，$EF=\frac{10}{\sin\theta\cos\theta}$，由于 $BE=10\tan\theta\leq 10\sqrt{3}$，$AF=\frac{10}{\tan\theta}\leq 10\sqrt{3}$，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leq\tan\theta\leq\sqrt{3}$，$\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，……………3 分

$\therefore L=\frac{10}{\cos\theta}+\frac{10}{\sin\theta}+\frac{10}{\sin\theta\cos\theta}$，$\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

即 $L=10\times\frac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$，$\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.. ……………………………6 分

(2)设 $\sin\theta+\cos\theta=t$，则 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，由于 $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2},\sqrt{2}\right]$. ………………8 分

由于 $L=\frac{20}{t-1}$ 在 $\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2},\sqrt{2}\right]$ 上是单调减函数，

$\therefore$ 当 $t=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 时，即 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，L 取得最大值为 $20\left(\sqrt{3}+1\right)$m. ……12 分

21. (1) $\because f(0)=1$，且 $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x+\cos x-\sin x)-2$

$=2e^x\cos x-2, f'(0)=0$，所以切线方程为 $y-1=0(x-0)$，即 $y=1$ …………3 分

(2) 由 (1) 可知 $f'(x)=2e^x\cos x-2, f''(x)=2e^x(\cos x-\sin x)$，

当 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$f''(x)\geq 0,\therefore f'(x)$ 递增，

又 $f'(0)=0,\therefore x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时，$f'(x)\geq 0, f(x)$ 递增. ………………5 分

当 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 时，$f''(x)<0,\therefore f'(x)$ 递减，$\because f'(\frac{\pi}{2})=-2<0, f'(\frac{\pi}{4})=-2+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

$\because e^{\frac{\pi}{2}}>e^1>2,\therefore e^{\frac{\pi}{4}}>\sqrt{2}$，$\therefore f'(\frac{\pi}{4})=-2+\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2})>0$，

$\therefore \exists x_0\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 使 $f'(x_0)=0$，当 $\frac{\pi}{4}<x<x_0, f'(x)>0, \frac{\pi}{2}>x>x_0, f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 递增，$(\frac{\pi}{4},x_0)$ 递增，$(x_0,\frac{\pi}{2})$ 递减， ……………………………8 分

$\because f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-\pi$，而 $h(x)=\frac{e^x}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增（证明略），

$\therefore \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}}>\frac{e}{1},\therefore e^{\frac{\pi}{2}}>\frac{\pi}{2}e,\therefore e^{\frac{\pi}{2}}-\pi>(\frac{e}{2}-1)\pi\approx 1.12>1$，

$\therefore f(\frac{\pi}{2})>1$，$f(0)=1,\therefore f(x)_{\min}=f(0)=1$. ……………………12 分

22. (1) $\because 3S_n=(n+2)a_n$ (1)

当 $n\geq 2$ 时，$3S_{n-1}=(n+1)a_{n-1}$ (2)，(1) - (2) 得

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。