湖北省高中名校联盟2024届高三第一次联合测评

数　学

命题单位：襄阳四中数学学科组　　　　审题单位：圆创教育研究中心　襄阳市第五中学

本试卷共4页，22题。满分150分。考试用时120分钟。　　考试时间：2023年8月16日下午15:00—17:00

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用签字笔或钢笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}$，$N=\{x|y=\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-2,1]$　　D. $[-1,2]$

2. 已知复数 z 满足 $(1-i)z=1+i$，则 $z=$（　　）

A. $-i$　　B. i　　C. $1-i$　　D. $1+i$

3. 从长度为2，4，6，8，10的5条线段中任取3条，则这3条线段能构成一个三角形的概率是（　　）

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{3}$

4. 设命题 p：若数列 $\{a_n\}$ 是公差不为0的等差数列，则点 $P(n,a_n)$ 必在一次函数图象上；命题 q：若正项数列 $\{a_n\}$ 是公比不为1的等比数列，则点 $Q(n,a_n)$ 必在指数函数图象上。下列说法正确的是（　　）

A. p、q 均为真命题　　B. p、q 均为假命题

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

5. 某人从 A 地到 B 地，乘火车、轮船、飞机的概率分别为0.3，0.3，0.4，乘火车迟到的概率为0.2，乘轮船迟到的概率为0.3，乘飞机迟到的概率为0.4，则这个人从 A 地到 B 地迟到的概率是（　　）

A. 0.16　　B. 0.31　　C. 0.4　　D. 0.32

6. 已知把物体放在空气中冷却时，若物体原来的温度是 θ_1 ℃，空气的温度是 θ_0 ℃，则 t min后物体的温度 θ ℃满足公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$（其中 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数）。某天小明同学将温度是80 ℃的牛奶放在20 ℃空气中，冷却2 min后牛奶的温度是50 ℃，则下列说法正确的是（　　）

A. $k=\ln 2$　　B. $k=2\ln 2$

C. 牛奶的温度降至35 ℃还需4 min　　D. 牛奶的温度降至35 ℃还需2 min

7. 已知 F_1，F_2 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点，M，N 是椭圆 C 上两点，且 $\overrightarrow{MF_1}=2\overrightarrow{F_1N}$，$\overrightarrow{MF_2}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，则椭圆 C 的离心率为（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

8. 记 $a=\sqrt[2023]{2022}$，$b=\sqrt[2023]{2023}$，$c=\sqrt[2024]{2023}$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geq4)$ 均为正数，且 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，若由 $y_k=2x_k-1(k=1,2,\cdots,n)$ 生成一组新的数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，则这组新数据与原数据的（　　）可能相等.

A. 极差　　B. 平均数

C. 中位数　　D. 标准差

10. 已知 O 为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的顶点，直线 l 交抛物线于 M,N 两点，过点 M,N 分别向准线 $x=-\frac{p}{2}$ 作垂线，垂足分别为 P,Q，则下列说法正确的是（　　）

A. 若直线 l 过焦点 F，则 N,O,P 三点不共线

B. 若直线 l 过焦点 F，则 $PF\perp QF$

C. 若直线 l 过焦点 F，则抛物线 C 在 M,N 处的两条切线的交点在某定直线上

D. 若 $OM\perp ON$，则直线 l 恒过点 $(2p,0)$

11. 已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 2，下列说法正确的是（　　）

A. 正四面体 $P-ABC$ 的外接球表面积为 6π

B. 正四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离之和为定值

C. 正四面体 $P-ABC$ 的相邻两个面所成二面角的正弦值为 $\frac{1}{3}$

D. 正四面体 $Q-MNG$ 在正四面体 $P-ABC$ 的内部，且可以任意转动，则正四面体 $Q-MNG$ 的体积最大值为 $\frac{2\sqrt{2}}{81}$

12. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，且对任意 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(1)$ 一定为正数

B. 2 是 $f(x)$ 的一个周期

C. 若 $f(1)=1$，则 $f\left(\frac{2023}{4}\right)=1$

D. 若 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，则 $f(1)\neq\frac{1}{2024}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(x-2y)^5(x+y)$ 的展开式中 x^3y^3 的系数是________.

14. 已知 Rt$\triangle ABC$ 的两条直角边分别为 3，4，以斜边所在直线为轴，其余各边旋转一周形成的曲面围成的几何体体积是________.

15. 小王准备在单位附近的某小区买房，若小王看中的高层住宅总共有 n 层（$20\leqslant n\leqslant 30, n\in\mathbf{N}^*$），设第 1 层的“环境满意度”为 1，且第 k 层（$2\leqslant k\leqslant n, k\in\mathbf{N}^*$）比第 $k-1$ 层的“环境满意度”多出 $3k^2-3k+1$；又已知小王有“恐高症”，设第 1 层的“高层恐惧度”为 1，且第 k 层（$2\leqslant k\leqslant n, k\in\mathbf{N}^*$）比第 $k-1$ 层的“高层恐惧度”高出 $\frac{1}{3}$ 倍. 在上述条件下，若第 k 层“环境满意度”与“高层恐惧度”分别为 a_k，b_k，记小王对第 k 层“购买满意度”为 c_k，且 $c_k=\frac{a_k}{b_k}$，则小王最想买第________层住宅.

（参考公式及数据：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\ln 2\approx 0.6931$，$\ln 3\approx 1.0986$，$\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\approx 1.1006$）

16. 已知 $\odot O_1: x^2+(y-2)^2=1$，$\odot O_2: (x-3)^2+(y-6)^2=9$，过 x 轴上一点 P 分别作两圆的切线，切点分别是 M，N，当 $|PM|+|PN|$ 取到最小值时，点 P 坐标为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知函数 $f(x)=\log_2\frac{m\cdot 4^x+1}{2^x}$（$m\in\mathbf{R}$）.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 是偶函数，求实数 m 的值；

（Ⅱ）若 $\exists x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=x_0$ 成立，求实数 m 的取值范围.

18.（12 分）

西梅以“梅”为名，实际上不是梅子，而是李子，中文正规名叫“欧洲李”，素有“奇迹水果”的美誉. 因此，每批西梅进入市场之前，会对其进行检测，现随机抽取了 10 箱西梅，其中有 4 箱测定为一等品.

（Ⅰ）现从这 10 箱中任取 3 箱，求恰好有 1 箱是一等品的概率；

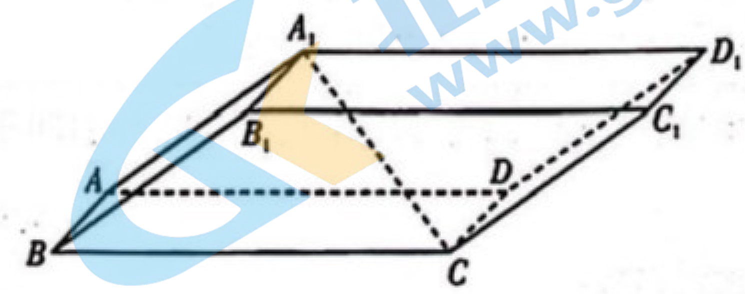
（Ⅱ）以这 10 箱的检测结果来估计这一批西梅的情况，若从这一批西梅中随机抽取 3 箱，记 ξ 表示抽到一等品的箱数，求 ξ 的分布列和期望.

19.(12 分)

如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 和侧面 ABB_1A_1 均为矩形,$AB=2$,$BC=6$,$BB_1=2\sqrt{3}$,$A_1C=4$.

(Ⅰ)求证:$A_1D\perp DC$;

(Ⅱ)求 AC_1 与平面 BAA_1B_1 所成角的正弦值.



20.(12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1>0$,$a_{n+1}=\begin{cases}\log_2 a_n, & n\text{ 为奇数},\\ 2^{a_n+2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(Ⅰ)判断数列$\{a_{2n-1}\}$是否是等比数列?若是,给出证明;否则,请说明理由;

(Ⅱ)若数列$\{a_n\}$的前 10 项和为 361,记 $b_n=\dfrac{1}{(\log_2 a_{2n+1})\cdot a_{2n+2}}$,数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,求证:$T_n<\dfrac{7}{16}$.

21.(12 分)

已知双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$与直线 $l:y=kx+m\left(k\neq\pm\dfrac{3}{2}\right)$有唯一的公共点 M.

(Ⅰ)若点 $N(2,9)$在直线 l 上,求直线 l 的方程;

(Ⅱ)过点 M 且与直线 l 垂直的直线分别交 x 轴于 $A(x_1,0)$,y 轴于 $B(0,y_1)$两点. 是否存在定点 G,H,使得 M 在双曲线上运动时,动点 $P(x_1,y_1)$使得$||PG|-|PH||$为定值.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$的单调性;

(Ⅱ)若两个不相等的正实数 a,b 满足 $f(a)=f(b)$,求证:$a+b<1$;

(Ⅲ)若$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,求证:$f(\cos\alpha)<f(\sin\alpha)$.

湖北省高中名校联盟2024届高三第一次联合测评

数学试卷参考答案与评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	C	B	D	C	D	BC	BCD	ABD	BCD

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. A 【解析】由 $M=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0\}=[-1,2]$,$N=\{x\mid y=\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}\}=[-2,1]$,得 $M\cup N=[-2,2]$.故选A.

2. B 【解析】$z=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{2}=i$,故选B.

3. A 【解析】从5条线段中任取3条,可能的情况有:(2,4,6),(2,4,8),(2,4,10),(2,6,8),(2,6,10),(2,8,10),(4,6,8),(4,6,10),(4,8,10),(6,8,10)共有10种可能,其中,能构成三角形的只有(4,6,8),(4,8,10),(6,8,10)共3种可能,所以,能构成三角形的概率为$\dfrac{3}{10}$.选A.

4. C 【解析】若数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列,则 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$,故点 $P(n,a_n)$ 必在一次函数 $y=dx+(a_1-d)$ 图像上,故 p 真;若 $a_n=2^{n-1}$,则数列$\{a_n\}$是公比为2的等比数列,$\because a_n=2^{n-1}\neq a^n$,$(\forall n\in N^*)$,$\therefore Q(n,a_n)$不恒在指数函数图像上,故 q 假.故C正确.

5. B 【解析】设事件 A 表示"乘火车",事件 B 表示"乘轮船",事件 C 表示"乘飞机",事件 D 表示"迟到",则 $P(A)=0.3$,$P(D|A)=0.2$,$P(B)=0.3$,$P(D|B)=0.3$,$P(C)=0.4$,$P(D|C)=0.4$,$D=(D\cap A)\cup(D\cap B)\cup(D\cap C)$,由全概率公式得:$P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)=0.3\times0.2+0.3\times0.3+0.4\times0.4=0.31$.选B.

6. D 【解析】由条件及公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$,得 $50=20+(80-20)e^{-2k}$,故 $k=\dfrac{1}{2}\ln2$,AB错误;又由 $35=20+(80-20)e^{-kt}$,$k=\dfrac{1}{2}\ln2$,得 $t=4$,故牛奶的温度从80 ℃降至35 ℃需4 min,从50 ℃降至35 ℃还需 $4-2=2$ min.故选D.

7. C 【解析】连接 NF_2,设 $|NF_1|=n$,则 $|MF_1|=2n$,$|MF_2|=2a-2n$,$|NF_2|=2a-n$

在 $Rt\triangle MNF_2$ 中

$(3n)^2+(2a-2n)^2=(2a-n)^2$

$\therefore 9n^2+4a^2-8an+4n^2=4a^2-4an+n^2$

$\therefore 12n^2=4an$

$n=\dfrac{a}{3}$

$\therefore |MF_1|=\dfrac{2a}{3}$　$|MF_2|=\dfrac{4a}{3}$

在 $Rt\triangle MF_1F_2$ 中

$4c^2=\frac{4a^2}{9}+\frac{16a^2}{9}$，$\therefore 36c^2=20a^2$

$e^2=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$，又$\because e\in(0,1)$

$\therefore e=\frac{\sqrt{5}}{3}$，故选 C.

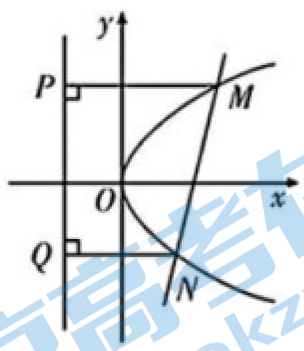
8. D 【解析】设 $f(x)=x^{\frac{1}{2023}}$，则 $f(x)$在 R 上单调递增，故 $f(2022)<f(2023)$，即 $a<b$；设 $g(x)=\frac{\ln x}{x+1}$，$x>e^2$，则 $g'(x)=\frac{\frac{1+x}{x}-\ln x}{(x+1)^2}=\frac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}<\frac{2-\ln x}{(x+1)^2}<0(x>e^2)$，

$g(x)$在$(e^2,+\infty)$单调递减，故 $g(2023)<g(2022)$，即 $c<a$；综上得，$b>a>c$. 故 D 正确.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. BC 【解析】极差分别为 x_n-x_1 和 $y_n-y_1=2(x_n-x_1)$，$\because x_n-x_1>0$，$\therefore y_n-y_1=2(x_n-x_1)>x_n-x_1$，故 A 错误；由 $y=2x-1=x$ 知，当 $x=1$ 时，平均数相等，故 B 正确；当 $n=2m-1$ 时，中位数分别为 x_m 与 $y_m=2x_m-1$，同理可知当 $x_m=1$ 时，中位数相等，当 $n=2m$ 时，中位数分别为$\frac{x_m+x_{m+1}}{2}$ 与$\frac{y_m+y_{m+1}}{2}=\frac{(2x_m-1)+(2x_{m+1}-1)}{2}=2\times\frac{x_m+x_{m+1}}{2}-1$，同理可知当$\frac{x_m+x_{m+1}}{2}=1$ 时，中位数相等，故 C 正确；由 $s_y=2s_x$，$s_x>0$ 知，$s_y=2s_x>s_x$，标准差不可能相等，故 D 错误. 综上，选 BC.

10. BCD 【解析】设直线 $l:x=ty+m$



联立方程$\begin{cases}x=ty+m\\y^2=2px\end{cases}$，得 $y^2-2pty-2pm=0$

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

则$\begin{cases}y_1+y_2=2pt\\y_1y_2=-2pm\end{cases}$

选项 A 若直线 l 过焦点 F，则 $m=\frac{p}{2}$

$\therefore y_1y_2=-p^2$

$P\left(-\frac{p}{2},y_1\right)$

$\therefore k_{OP}=\frac{y_1}{-\frac{p}{2}}=\frac{2p}{y_2}$

又$\because N\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)\therefore k_{ON}=\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{2p}}=\frac{2p}{y_2}=k_{OP}$

$\therefore N,O,P$ 三点共线，$\therefore$A 错

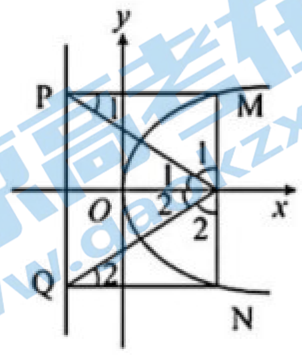
选项 B 由抛物线的定义和平行线的性质知：

$\angle MFP=\angle MPF=\angle PFO=\angle 1$

$\angle NFQ=\angle NQF=\angle QFO=\angle 2$

又 $2(\angle 1+\angle 2)=\pi$，$\therefore\angle 1+\angle 2=\frac{\pi}{2}$

所以 B 对；



选项 C 抛物线 C 在点 M 处的切线为 $y_1y=p(x+x_1)$

抛物线 C 在点 N 处的切线为 $y_2y=p(x+x_2)$，联立得 $\begin{cases}y_1y=p(x_1+x)\\y_2y=p(x_2+x)\end{cases}$

解得：$x=\dfrac{y_1y_2}{2p}=-\dfrac{p}{2}$

抛物线在点 M,N 处的切线的交点在定直线 $x=-\dfrac{p}{2}$ 上，所以 C 对

选项 D 因为 $OM\perp ON$，$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$，$\therefore \dfrac{y_1^2}{2p}\dfrac{y_2^2}{2p}+y_1y_2=0$

将韦达定理代入得：$m=2p$

所以直线 l 恒过点 $(2p,0)$，所以 D 对

11. ABD 【解析】A. 棱长为 2 的正四面体 $P-ABC$ 的外接球与棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体的外接球半径相同，设为 R，则 $2R=\sqrt{6}$，所以 $S=4\pi R^2=6\pi$，所以 A 对

B. 设四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离分别为 d_1,d_2,d_3,d_4，设四面体 $P-ABC$ 的高为 d，由等体积法可得：$\dfrac{1}{3}s(d_1+d_2+d_3+d_4)=\dfrac{1}{3}sd$，所以 $d_1+d_2+d_3+d_4=d$ 为定值. 所以 B 对

C. 设 BC 中点为 D，连接 PD，AD，则 $\angle PDA$ 为求，$\cos\angle PDA=\dfrac{3+3-4}{6}=\dfrac{1}{3}$，所以正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 C 错

D. 要使正四面体 $Q-MNG$ 在四面体 $P-ABC$ 的内部，且可以任意转动，则正四面体 $Q-MNG$ 的外接球在四面体 $P-ABC$ 内切球内部，当正四面体 $Q-MNG$ 的外接球恰好为四面体 $P-ABC$ 内切球时，正四面体 $Q-MNG$ 的体积最大值，由于正四面体的外接球与内球球半径之比为 $\dfrac{1}{3}$，所以正四面体 $Q-MNG$ 的外接球半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，设正四面体 $Q-MNG$ 为 a，则 $\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)=2\times\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，所以 $a=\dfrac{2}{3}$，故体积 $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3=\dfrac{2\sqrt{2}}{81}$，所以 D 对

因此：正确答案为 ABD

12. BCD 【解析】因为 $f(x)=0$ 符合条件，故 A. 错误；因为偶函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x+2)=f(-x)=f(x)$，故 B 正确；因为对任意 $x_1,x_2\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，所以对任意 $x\in[0,1]$，取 $x_1=x_2=\dfrac{x}{2}$ 得 $f(x)=\left[f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2\geqslant 0$；若 $f(1)=1$，即 $f(1)=\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]^2=\left[f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right]^4=1$，故 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=1$，由 2 是 $f(x)$ 的周期得 $f\left(\dfrac{2023}{4}\right)=f\left(506-\dfrac{1}{4}\right)=f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=1$，故 C 正确；假设 $f(1)=\dfrac{1}{2024}$，由 $f(1)=\left[f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]^2=\left[f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right]^4=\dfrac{1}{2024}$ 及 $f(x)\geqslant 0$，$x\in[0,1]$，得 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2024}}$，$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2024}}$，故 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，这与 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增矛盾，故 D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -40 【解析】$(x-2y)^5(x+y)=x(x-2y)^5+y(x-2y)^5$，所以 x^3y^3 的系数为 $C_5^3(-2)^3+C_5^2(-2)^2=-40$

14. $\frac{48\pi}{5}$ 【解析】由勾股定理知斜边为 5，斜边上的高为 $\frac{12}{5}$，该几何体为两个同底面的圆锥，底面半径为 $\frac{12}{5}$，两个圆锥的高之和为 5，所以该几何体体积为 $\frac{48\pi}{5}$

15. 10

【解析】依题意，$a_1=1$，且 $a_k-a_{k-1}=3k^2-3k+1,(k\geqslant 2)$；$b_1=1,b_k=b_{k-1}+\frac{1}{3}b_{k-1}=\frac{4}{3}b_{k-1}$ 所以

$$a_k=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_k-a_{k-1})$$
$$=1+(3\times2^2-3\times2+1)+(3\times3^2-3\times3+1)+\cdots+(3k^2-3k+1)$$
$$=(3\times1^2-3\times1+1)+(3\times2^2-3\times2+1)+(3\times3^2-3\times3+1)+\cdots+(3k^2-3k+1)$$
$$=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)-3(1+2+3+\cdots+k)+k$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}-\frac{3k(k+1)}{2}+k=k^3$$

$$b_k=\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$$

【注】利用 $a_k-a_{k-1}=3k^2-3k+1=k^3-(k-1)^3,(k\geqslant2)$ 求解 a_k 更易.

$b_k=\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$，故小王对第 k 层住宅的购买满意度 $c_k=\frac{k}{\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}}$.

【方法一】由 $\frac{c_{k+1}}{c_k}=\frac{(k+1)^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^k}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}}{k^3}=\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^3}{\frac{4}{3}}>1$，即 $\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}-1\right)k<1$，解得 $k<9.9404$，所以 $c_1<c_2<c_3<\cdots<c_9<c_{10}$，同理有 $c_{10}>c_{11}>c_{12}>\cdots$，小王最想购买第 10 层住宅.

【方法二】设 $f(x)=\frac{x^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}},(x\geqslant1)$，则 $f'(x)=\frac{x^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}}\left(3-x\ln\frac{4}{3}\right)$，故 $1\leqslant x\leqslant\frac{3}{\ln\frac{4}{3}}$ 时 $f(x)$ 单调递增；$x\geqslant\frac{3}{\ln\frac{4}{3}}$ 时 $f(x)$ 单调递减. 由于 $\frac{3}{\ln\frac{4}{3}}=\frac{3}{2\ln2-\ln3}\approx10.4312$，$\frac{f(11)}{f(10)}=\frac{3\times11^3}{4\times10^3}<1$，故 $f(10)$ 最大，小王最想购买第 10 层住宅.

16. $\left(\frac{3}{4},0\right)$ 【解析】设 $P(t,0)$

则 $|PM|=\sqrt{t^2-(t-2)^2}=\sqrt{t^2-3}$

$|PN|=\sqrt{(t-3)^2-6^2+9}=\sqrt{(t-3)^2+27}$

$|PM|+|PN|=\sqrt{t^2+3}+\sqrt{(t-3)^2+27}$

取 $A(0,-\sqrt{3})$，$B(3,3\sqrt{3})$

则 $|PM|+|PN|=|PA|+|PB|\geqslant|AB|=\sqrt{3^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{57}$

此时，AB 直线：$y+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}(x-0)$

令 $y=0$，则 $x=\frac{3}{4}$

$\therefore P\left(\frac{3}{4},0\right)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.【解析】(Ⅰ)由函数 $f(x)$ 是偶函数知，$f(-x)=f(x)$．…………………………………… (1 分)

故 $\log_2\frac{m\cdot 4^{-x}+1}{2^{-x}}=\log_2\frac{m\cdot 4^{x}+1}{2^{x}}$，即 $\log_2\frac{m+4^{x}}{2^{x}}=\log_2\frac{m\cdot 4^{x}+1}{2^{x}}$，

化简得，$(m-1)(4^x-1)=0$ 恒成立．…………………………………… (4 分)

故 $m=1$，实数 m 的值为 1．…………………………………… (5 分)

(Ⅱ)若 $\exists x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=x_0$，则 $\log_2\frac{m\cdot 4^{x_0}+1}{2^{x_0}}=x_0$，…………………… (6 分)

即 $m\cdot 4^{x_0}+1=4^{x_0}$，$x_0\in[0,1]$ 能成立．

于是，$m=1-\left(\frac{1}{4}\right)^{x_0}$，$x_0\in[0,1]$ …………………………………… (8 分)

由指数函数单调性，得 $m=1-\left(\frac{1}{4}\right)^{x_0}\in\left[0,\frac{3}{4}\right]$

故实数 m 的取值范围为 $\left[0,\frac{3}{4}\right]$．…………………………………… (10 分)

【方法二】若 $\exists x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=x_0$，则 $\log_2\frac{m\cdot 4^{x_0}+1}{2^{x_0}}=x_0$，…………………… (6 分)

即 $m\cdot 4^{x_0}+1=4^{x_0}$，$x_0\in[0,1]$ 能成立．

于是，$4^{x_0}=\frac{1}{1-m}$，$x_0\in[0,1]$，

由指数函数单调性，得 $\frac{1}{1-m}=4^{x_0}\in[1,4]$ …………………………………… (8 分)

解得 $0\leqslant m\leqslant\frac{3}{4}$

故实数 m 的取值范围为 $\left[0,\frac{3}{4}\right]$．…………………………………… (10 分)

…………………………………………………………………… (10 分)

18.【解析】(1)设抽取的 3 箱西梅恰有 1 箱是一等品为事件 A_1，

则 $P(A_1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$；

因此，从这 10 箱中任取 3 箱，恰好有 1 箱是一等品的概率为 $\frac{1}{2}$，…………………… (4 分)

(2)由题意可知，从这 10 箱中随机抽取 1 箱恰好是一等品的概率 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，

由题可知 ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，则 $\xi\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$

$P(\xi=0)=C_3^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，$P(\xi=1)=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$，$P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{36}{125}$，

$P(\xi=3)=C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{8}{125}$，

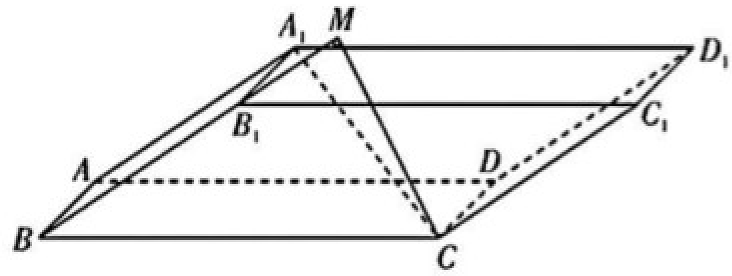
所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

……………………（10 分）

$E(\xi)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. ……………………………………（12 分）

19.（Ⅰ）证明：∵ 四边形 $ABCD$ 和四边形 ABA_1B_1 均为矩形，



$\therefore AB\perp AA_1, AB\perp AD$

又 $\therefore AA_1\cap AD=A$

$\therefore AB\perp$ 平面 AA_1D_1D

$\because A_1D\subset$ 平面 AA_1D_1D

$\therefore AB\perp A_1D$

$\because AB/\!/CD$

$\therefore A_1D\perp DC$ ……………………………………（4 分）

（Ⅱ）设 $\angle A_1AD=\theta$

$\because A_1D\perp DC$

$\therefore A_1C^2=DC^2+A_1D^2=DC^2+A_1A^2+AD^2-2A_1A\cdot AD\cos\theta$

$\therefore 16=4+12+36-2\times2\sqrt{3}\times6\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because \theta\in[0,\pi]$，$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$，……………………………………（6 分）

过 C 点作 CM 垂直交 BB_1 于点 M，由(1)可知 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，$\because CM\subset$ 平面 BCC_1B_1

$\therefore AB\perp CM$

$\because CM\perp BB_1, AB\cap BB_1=B$

$\therefore CM\perp$ 平面 ABB_1A_1，设 AC_1 与平面 BAA_1B_1 所成的角为 α，

又 $\angle B_1BC=\angle A_1AD=\frac{\pi}{6}$，$\therefore CM=6\times\frac{1}{2}=3$

$\because CC_1/\!/$ 平面 AA_1B_1B

$\therefore C_1$ 到平面 AA_1B_1B 的距离等于 3 ……………………………（10 分）

在平行四边形 A_1ACC_1 中，$(A_1C)^2+(AC_1)^2=2[(A_1A)^2+(AC)^2]$

$\therefore 16+(AC_1)^2=2(40+12)$，$\therefore AC_1=2\sqrt{22}$

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{CM}{AC_1}=\dfrac{3}{2\sqrt{22}}=\dfrac{3\sqrt{22}}{44}$,

$\therefore AC_1$ 与平面 BAA_1B_1 所成角的正弦值 $\dfrac{3\sqrt{22}}{44}$. ………………………………………………（12 分）

20.【解析】（Ⅰ）数列 $\{a_{2n-1}\}$ 成等比数列. ………………………………………………………………（1 分）

根据 $a_{n+1}=\begin{cases}\log_2 a_n, 当\ n\ 为奇数时,\\ 2^{a_n+2}, 当\ n\ 为偶数时.\end{cases}$ 得

$a_{2n+1}=2^{a_{2n}+2}=2^{\log_2 a_{2n-1}+2}=2^2a_{2n-1}=4a_{2n-1}$; ………………………………………………（3 分）

$\because a_1>0, \therefore a_{2n-1}>0, \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=4$，即数列 $\{a_{2n-1}\}$ 成等比数列. ……………………………（4 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$\therefore a_{2n-1}=a_1\cdot 4^{n-1}, a_{2n}=\log_2 a_{2n-1}=\log_2 a_1+2(n-1)$，………………………（5 分）

故 $S_{10}=a_1(4^0+4^1+4^2+4^3+4^4)+5\log_2 a_1+2(0+1+2+3+4)=341a_1+5\log_2 a_1+20$

由 $S_{10}=361$，得 $341a_1+5\log_2 a_1+20=361$. ………………………………………………………………（7 分）

显然，$f(x)=341x+5\log_2 x+20, x>0$ 单调递增，且 $f(1)=361=f(a_1)$，

故 $a_1=1, a_{2n+1}=4^n=2^{2n}, a_{2n+2}=\log_2 a_1+2n=2n$. …………………………………………………（9 分）

$\therefore b_n=\dfrac{1}{(\log_2 a_{2n+1})\quad a}=\dfrac{1}{4n^2}, T_1=b_1=\dfrac{1}{4}<\dfrac{7}{4}, T_2=b_1+b_2=\dfrac{5}{16}<\dfrac{7}{16}$ ……………………（10 分）

当 $n\geqslant 3$ 时，$b_n=\dfrac{1}{4n^2}<\dfrac{1}{4(n-1)n}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{1}{4}\left[1+\dfrac{1}{2^2}+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)\right]=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{4}\times\dfrac{7}{4}=\dfrac{7}{16}$

综上，知 $T_n<\dfrac{7}{16}$. ………………………………………………………………………………………（12 分）

21.【解析】（1）联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y}{9}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，则 $(9-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-36=0$

又 $\because$ 点 $N(2,9)$ 在直线 $l: y=kx+m$ 上，所以：$9=2k+m$，

$\because 9-4k^2\neq 0$ 时，$\therefore \Delta=64k^2m^2-4(9-4k^2)(-4m^2-36)=0$，则：$m^2=4k^2-9$

所以：$(9-2k)^2=4k^2-9$，即，则 $k=\dfrac{5}{2}$

当 $k=\dfrac{5}{2}$ 时，$m=4$; ………………………………………………………………………………………（4 分）

所以：直线 l 的方程：$y=\dfrac{5}{2}x+4$ ………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，则 $(9-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-36=0$，因为 $k\neq\pm\dfrac{3}{2}$，M 是双曲线与直线的唯一公共点，所以 $\Delta=64k^2m^2-4(9-4k^2)(-4m^2-36)=0$，化简得 $m^2=4k^2-9$，解得点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{4km}{9-4k^2}, \dfrac{9m}{9-4k^2}\right)$，即为 $\left(\dfrac{4k}{-m}, \dfrac{9}{-m}\right)$ ………………………………………

于是，过点 M 且与 l 垂直的直线为 $y+\frac{9}{m}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{4k}{m}\right)$，可得

$A\left(\frac{13k}{-m},0\right)$，$B\left(0,-\frac{13}{m}\right)$，$P\left(-\frac{13k}{m},-\frac{13}{m}\right)$，…………（9分）

即 $x_1=-\frac{13k}{m}$，$y_1=-\frac{13}{m}$，于是

$x_1^2=\frac{169k^2}{m^2}=\frac{169}{m^2}\left(\frac{m^2+9}{4}\right)=\frac{169}{4}\left(1+\frac{9}{m^2}\right)=\frac{169}{4}\left(1+\frac{9}{\left(-\frac{13}{y_1}\right)^2}\right)=\frac{169}{4}+\frac{9}{4}y_1^2$ …………（10分）

即 P 的轨迹方程为：$\frac{x^2}{\frac{169}{4}}-\frac{y^2}{\frac{169}{9}}=1(y\neq 0)$ …………（11分）

所以存在定点 $G\left(-\frac{13\sqrt{13}}{6},0\right)$，$H\left(\frac{13\sqrt{13}}{6},0\right)$，使得当点 M 运动时，$||PG|-|PH||$ 为定值 13 …

…………（12分）

22.【解析】（Ⅰ）函数 $f(x)=x\ln x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. …………（1分）

由 $f'(x)=\ln x+1>0$，得 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减；…………（2分）

由 $f'(x)=\ln x+1<0$，得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，

综上知，$f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$，单调递增区间是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$. …………（3分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 的值域为 $\left(-\frac{1}{e},0\right)$，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上的值域为 $\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$. 注意到 $f(1)=0$，$f(a)=f(b)$. 不妨设 $0<a<\frac{1}{e}<b<1$，则欲证 $a+b<1$，即证 $b<1-a$.

由于 $\frac{1}{e}<b<1-a$，由（Ⅰ）得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，故只需证 $f(b)<f(1-a)$，由已知 $f(a)=f(b)$，即证：$f(a)<f(1-a)$，也即 $f(a)-f(1-a)<0$. …………（4分）

【方法一】令 $F(x)=f(x)-f(1-x)$，$0<x<\frac{1}{e}$.

$F'(x)=f'(x)+f'(1-x)=\ln x+\ln(1-x)+2=\ln[x(1-x)]+2$，$0<x<\frac{1}{e}$.

由 $[x(1-x)]=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 单调递增，得 $F'(x)=\ln[x(1-x)]+2$ 单调递增且 $F'(x)=\ln[x(1-x)]+2\in(-\infty,\ln(e-1))$.

由于 $\ln(e-1)>0$，故 $\exists x_0\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 满足 $F'(x_0)=0$. …………（5分）

由 $F'(x)$ 单调递增知：

当 $x\in(0,x_0)$ 时 $F'(x)<F'(x_0)=0$，$F(x)$ 单调递减，值域为 $(F(x_0),0)$；…………（6分）

当 $x\in\left(x_0,\frac{1}{e}\right)$ 时 $F'(x)>F'(x_0)=0$，$F(x)$ 单调递增，值域为 $\left(F(x_0),-\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\right)$；

…………

设 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1,0<x<1$. 则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}<0$，$g(x)$单调递减，故 $g(x)>g(1)=0$，

即 $\ln x>1-\frac{1}{x},0<x<1$. 取 $x=1-\frac{1}{e}$，得 $\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)>1-\frac{1}{1-\frac{1}{e}}$，即 $-\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)<0$

综上，得 $F(x)<0$，即 $f(a)-f(1-a)=F(a)<0$，$a+b<1$ 得证. ……………………………… (8分)

【方法二】(重新同构)

$f(a)<f(1-a)\Leftrightarrow a\ln a<(1-a)\ln(1-a)\Leftrightarrow\frac{\ln a}{1-a}<\frac{\ln(1-a)}{a}=\frac{\ln(1-a)}{1-(1-a)}$ ………………… (5分)

令 $F(x)=\frac{\ln x}{1-x},0<x<1$，即证：$F(a)<F(1-a)$. 由于 $0<a<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，从而 $0<a<1-a<1$.

故要证 $F(a)<F(1-a)$成立，只需 $F(x)=\frac{\ln x}{1-x}$在$(0,1)$单调递增成立即可. ……………… (6分)

$F'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1-x)+\ln x}{(1-x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-1}{(1-x)^2}$，令 $G(x)=\frac{1}{x}+\ln x-1,0<x<1$，则 $G'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=$

$\frac{x-1}{x^2}<0$，$G(x)$在$(0,1)$单调递减，$G(x)>G(1)=0$，$F'(x)=\frac{G(x)}{(1-x)^2}>0$，故 $F(x)=\frac{\ln x}{1-x}$在$(0,1)$

单调递增成立，原命题成立. ………………………………………………………………… (8分)

【方法三】(比值代换)由对称性，不妨设 $0<a<b,t=\frac{b}{a}>1$，

则 $f(a)=f(b)\Leftrightarrow a\ln a=ta\ln(ta)\Leftrightarrow\ln a=\frac{t\ln t}{1-t}$

由于 $b=ta$，欲证 $a+b<1$，即证：$(1+t)a<1\Leftrightarrow\ln(1+t)+\ln a<0$，即证：$\ln(1+t)+\frac{t\ln t}{1-t}<0$.

【方法四】(切、割线放缩)1、由于 $0<a<\frac{1}{e}$，故 $a(1+\ln a)<0$，即 $a\ln a<-a$；

2、由方法二知$\frac{1}{x}+\ln x-1>0,0<x<1$，故$\frac{1}{b}+\ln b-1>0$，即 $\ln b>1-\frac{1}{b}$，故 $b\ln b>b-1$，$\frac{1}{e}<b<1$；

由 1、2 知 $b-1<b\ln b=a\ln a<-a$，故 $a+b<1$ 成立，原命题成立.

(Ⅲ)由(Ⅱ)知 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab<(a+b)^2<1$. ……………………………………… (9分)

(1)当$\frac{1}{e}\leqslant\cos\alpha<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha<1$ 时，$f(x)$在$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，故 $f(\cos\alpha)<f(\sin\alpha)$. … (10分)

(2)当 $0<\cos\alpha<\frac{1}{e}<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha<1$ 时，由 $a^2+b^2<1$，取 $0<a=\cos\alpha<\frac{1}{e}$，得

$f(a)=f(b)\left(0<a=\cos\alpha<\frac{1}{e}<b<1\right)$时，有 $a^2+b^2<1\Leftrightarrow b^2<1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$，即$\frac{1}{e}<b<\sin\alpha<1$.

由 $f(x)$在$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，故 $f(\cos\alpha)=f(a)=f(b)<f(\sin\alpha)$，

综上，得，当$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$f(\cos\alpha)<f(\sin\alpha)$成立. ……………………………………… (12分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。