年级____ 性别____ 姓名____ 学校____ 市（县）____ 准考证号____

密封线之内不能答题

中南传媒湖南新教材杯

2021年全国高中数学联赛甘肃赛区预赛试卷

（考试时间：2021 年 7 月 4 日 9：00—11：30，满分 150 分）

题号	一	11	12	13	14	15	16	总分
得分								
评分人								
复核人								

一、填空题（共10小题，每小题7分，满分70分。请直接将答案写在题中的横线上）

1、已知 $a\geq -2$，且 $A=\{x|-2\leq x\leq a\}$，$B=\{y|y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{t|t=x^2,x\in A\}$，若 $C\subseteq B$，则 a 的取值范围是________.

2、ΔABC 的外接圆的圆心为 O，$AB=2$，$AC=3$，$BC=\sqrt{7}$，则 $\overline{OA}\cdot\overline{BC}$ 等于________.

3、若实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2-2x+2y-1=0$，则代数式 $M=(x+1)\sin z+(y-1)\cos z$ 的最大值是________.

4、某天早晨的课程表要排入语文、数学、英语和两节自习共 5 节课. 如果第一节不排数学，最后一节不排语文的概率是____________.

5、已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1,(x\leq 0),\\ f(x-1),(x>0),\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=x+a$ 有且只有两个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围是________.

6、设 $f_1(x)=-\dfrac{2x+7}{x+3}$，$f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$，$x\neq -2$ 复制 另存为... 2021)=______.

7、已知复数 z 的模为1，若当 $z=z_1$ 和 $z=z_2$ 时，$|z+$ 转发 大值和最小值，则

收藏

$z_1-z_2=$________.

8、在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 是等边三角形，$\angle BCD=90^\circ$，$BC=CD=1,AC=\sqrt{3}$，E,F 分别为 BD,AC 的中点，则直线 AE 与 BF 所成角的余弦值是________.

9、点 P 为圆 $C:(x+2)^2+y^2=4$ 上一动点，且不在坐标原点，定点 A 的坐标为 $(2,0)$，线段 AP 的垂直平分线与直线 CP 交于点 Q. 设 $M(-1,0),N(1,0)$，则直线 MQ 与直线 NQ 的斜率之积为________.

10、给定数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}a_n+1}{\sqrt{3}-a_n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{2022}a_n=$________.

二、解答题（共6小题，满分80分。要求写出解题过程）

11、（13分）ΔABC的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，设

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\sqrt{2}\sin A\sin B$．

（I）求C；

（II）若$\cos B=\dfrac{3}{5}$，D是边BC上一点，且$CD=4BD$，ΔACD的面积为$\dfrac{7}{5}$，求AC．

12、（13 分）为了释放学生压力，某校高三年级一班进行了一个投篮游戏，其间甲、乙两人轮流进行定点投篮比赛（每人各投一次为一轮），在相同的条件下，每轮甲乙两人站在同一位置上，甲先投，每人投一次篮，两人有1人命中，命中者得1分，未命中者得-1分；两人都命中或都未命中，两人均得0分．设甲每次投篮命中的概率为$\dfrac{2}{3}$，乙每次投篮命中的概率为$\dfrac{1}{2}$，且各次投篮互不影响．

（I）经过1轮投篮，记甲的得分为X，求X的分布列及期望；

（II）若经过n轮投篮，用p_i表示第i轮投篮后，甲的累计得分低于乙的累计得分的概率．

①求p_1, p_2, p_3；

②规定$p_0=0$，经过计算机模拟可得$p_i=ap_{i+1}+bp_{i-1}(i\geq 1, i\in N)$，请根据①中$p_1, p_2, p_3$值求出$a$，$b$的值，并由此求出数列$\{p_n\}$的通项公式．

13、（13 分）等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知对任意的 $n\in N^*$，点 (n,S_n) 均在函数 $y=b^x+r$ $(b>0$ 且 $b\neq 1,b,r$ 均为常数$)$ 的图象上.

（I）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）当 $b=2$ 时，记 $b_n=2(\log_2 a_n+1)(n\in N^*)$，

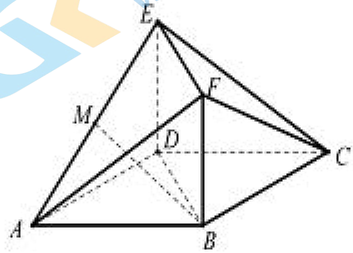
证明：对任意的 $n\in N^*$，不等式 $\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdot\cdots\cdot\frac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$ 成立.

密封线之内不能答题

14、（13 分）如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，矩形 $BDEF$ 所在平面与正方形 $ABCD$ 所在平面垂直，$AB=1$，点 M 为 AE 的中点．

（Ⅰ）求证：BM // 平面 EFC；

（Ⅱ）若 $DE=AD$，求二面角 $M-BD-A$ 的正弦值．

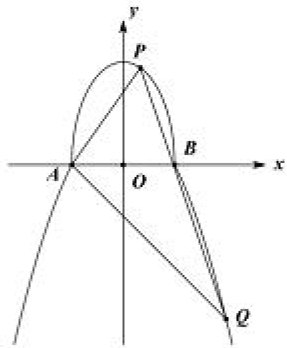


15、(13 分)如图，曲线 C 由上半椭圆 C_1：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0,y\geq 0)$ 和部分抛物线 C_2：

$y=-x^2+1(y\leq 0)$ 连接而成，C_1,C_2 的公共点为 A,B，其中 C_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Ⅰ) 求 a,b 的值；

(Ⅱ) 过点 B 的直线 l 与 C_1,C_2 分别交于 P,Q（均异于点 A,B），若 $AP\perp AQ$，求直线 l 的方程.



16、（15 分）已知函数 $f(x)=2a\ln(1+x)-x(a>0)$．

（I）求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（II）求证：$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)+(1+\frac{1}{n})^{n}\ (n\in N^{*})$．

二O二一年全国高中数学联赛甘肃赛区预赛试卷

参考答案及评分标准

一、填空题（共 10 小题，每小题 7 分，满分 70 分。请直接将答案写在题中的横线上）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	$\left[\frac{1}{2},3\right]$	$-\frac{5}{2}$	$\sqrt{3}+2\sqrt{2}$	$\frac{13}{20}$	$(-\infty,1)$	2021	$\sqrt{2}+\sqrt{2}i$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	3	0

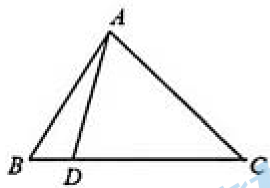
二、解答题（共 6 小题，满分 80 分。要求写出解题过程）

11、（13 分）ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，设 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sqrt{2}\sin A\sin B$．

（I）求 C；

（II）若 $\cos B=\frac{3}{5}$，D 是边 BC 上一点，且 $CD=4BD$，ΔACD 的面积为 $\frac{7}{5}$，求 AC．

解析（1）由正弦定理知，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，



$\because \sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sqrt{2}\sin A\sin B$，

$\therefore a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，

由余弦定理知，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore C=\frac{\pi}{4}$． ………5 分

（2）设 $AC=x$，$BD=y$，则 $CD=4y$，$BC=5y$，

$\because S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin C$，

$\therefore \frac{7}{5}=\frac{1}{2}x\cdot 4y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $xy=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，①

$\because \cos B=\frac{3}{5}$，$C=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \sin\angle BAC=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理知，$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin B}$，

$\dfrac{\dfrac{5y}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}}{}=\dfrac{x}{\frac{4}{5}}$，即 $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}x=5y$，②

由①②得，$x=2$，

$\therefore AC=2$. ………13 分

12、（13 分）为了释放学生压力，某校高三年级一班进行了一个投篮游戏，其间甲、乙两人轮流进行篮球定点投篮比赛（每人各投一次为一轮）．在相同的条件下，每轮甲乙两人站在同一位置上，甲先投，每人投一次篮，两人有1人命中，命中者得1分，未命中者得−1分；两人都命中或都未命中，两人均得 0 分．设甲每次投篮命中的概率为 $\dfrac{2}{3}$，乙每次投篮命中的概率为 $\dfrac{1}{2}$，且各次投篮互不影响．

（I）经过1轮投篮，记甲的得分为 X，求 X 的分布列及期望；

（II）若经过 n 轮投篮，用 p_i 表示第 i 轮投篮后，甲的累计得分低于乙的累计得分的概率．

①求 p_1, p_2, p_3；

②规定 $p_0=0$，经过计算机模拟计算可得 $p_i=ap_{i+1}+bp_{i-1}(i\ge 1, i\in N)$，请根据①中 p_1, p_2, p_3 值求出 a，b 的值，并由此求出数列 $\{p_n\}$ 的通项公式．

解析（I）X 的可能取值为−1，0，1．

$P(X=-1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$；$P(X=0)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}+(1-\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{2}{3})=\dfrac{1}{2}$；$P(X=1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$．

$\therefore X$ 的分布列为：

X	-1	0	1
p	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$

期望 $E(X)=\dfrac{1}{6}$．即经过 1 轮投篮，甲得分的期望为 $\dfrac{1}{6}$ 分．………5 分

（II）①由（1）知 $p_1=\dfrac{1}{6}$，

经过两轮投球，甲的累计得分低于乙的累计得分的有两种情况：一是甲两轮都得分为−1分；二是两轮中甲一轮得0分，另一轮得−1分．

$p_2=(\dfrac{1}{6})^2+C_2^1\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{36}$．

经过三轮投球，甲累计得分低有四种情况：−1−1−1；−1−1+0；−1+0+0；−1−1+1．

$p_3=(\dfrac{1}{6})^3+C_3^2(\dfrac{1}{6})^2\times\dfrac{1}{2}+C_3^1\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{1}{2})^2+C_3^2(\dfrac{1}{6})^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{43}{216}$

②将 p_0,p_1,p_2,p_3 的值分别代入 $p_i=ap_{i+1}+bp_{i-1}$，得 $\begin{cases}\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{36}a\\ \dfrac{7}{36}=\dfrac{43}{216}a+\dfrac{1}{6}b\end{cases}$

得 $a=\dfrac{6}{7},b=\dfrac{1}{7}$.

$\therefore p_i=\dfrac{6}{7}p_{i+1}+\dfrac{1}{7}p_{i-1}$，即 $p_{i+1}-p_i=\dfrac{1}{6}(p_i-p_{i-1})$

又 $p_1-p_0=\dfrac{1}{6}$，所以 $\{p_n-p_{n-1}\}$ 是首项 $\dfrac{1}{6}$、公比都是 $\dfrac{1}{6}$ 的等比数列.

$\therefore p_n-p_{n-1}=(\dfrac{1}{6})^n$，

$\therefore p_n=(p_n-p_{n-1})+(p_{n-1}-p_{n-2})+\cdots+(p_1-p_0)+p_0=\dfrac{\frac{1}{6}(1-\frac{1}{6^n})}{1-\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{5}(1-\dfrac{1}{6^n})$，

$\therefore$数列 $\{p_n\}$ 的通项公式为 $p_n=\dfrac{1}{5}(1-\dfrac{1}{6^n})$. ………13 分

13、（13 分）等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知对任意的 $n\in N^*$,，点 $(n.S_n)$ 均在函数

$y=b^x+r(b>0且b\neq 1,b,r均为常数)$ 的图象上.

（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）当 $b=2$ 时，记 $b_n=2(\log_2 a_n+1)(n\in N^*)$

证明：对任意的 $n\in N^*$，不等式 $\dfrac{b_1+1}{b_1}\cdot\dfrac{b_2+1}{b_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{n+1}$ 成立.

解析（I）因为对任意的 $n\in N^*$,点 (n,S_n)，均在函数 $y=b^x+r(b>0$ 且 $b\neq 1,b,r$ 均为常数的图像上.

所以得 $S_n=b^n+r$,当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=b+r$,

当 $n\geq 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=b^n+r-(b^{n-1}+r)=b^n-b^{n-1}=(b-1)b^{n-1}$,

又因为 $\{a_n\}$ 为等比数列,所以 $r=-1$,公比为 b,

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(b-1)b^{n-1}$ ………5 分

本题第（II）问，实质是证明不等式 $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 成立，可以从多角度揭示此类问题的方法和规律.

证法一：（构造数列）：令 $A_n=\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2n+1}{2n}}{\sqrt{n+1}}$，

由于，$\dfrac{A_{n+1}}{A_n}=\dfrac{2n+3}{2n+2}\cdot\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}=\dfrac{2n+3}{2\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}>\dfrac{2n+3}{n+1+n+2}=1$，

可得，数列 $\{A_n\}$ 为递增数列，即 $\dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2n+1}{2n}}{\sqrt{n+1}}>1$，

从而，$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}\left(n\in N^*\right)$ ………13 分

证法二：（构造对偶式）：令 $P=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2n+1}{2n}$，$Q=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdots\cdots\frac{2n+2}{2n+1}$.

由于 $a>b>0,m>0\Rightarrow\frac{b}{a}>\frac{b+m}{a+m}$.

故 $\frac{3}{2}>\frac{4}{3},\frac{5}{4}>\frac{6}{5},\frac{7}{6}>\frac{8}{7},\cdots,\frac{2n+1}{2n}>\frac{2n+2}{2n+1}>0$，

由不等式性质可得：$P^2>PQ=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdots\cdots\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}=n+1$，即 $P>\sqrt{n+1}$.

从而，$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}\left(n\in N^*\right)$

证法三：（累乘法）$2n+1=\sqrt{(2n+1)^2}>\sqrt{4n^2+4n}=2\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}$

所以：$\frac{2n+1}{2n}>\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$，令 $n=1,2,3,\cdots n$，分别代入上式，然后累乘得之.

证法四（数学归纳法）：当 $b=2$ 时，$a_n=(b-1)b^{n-1}=2^{n-1}$，$b_n=2(\log_2 a_n+1)=2(\log_2 2^{n-1}+1)=2n$

则 $\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{2n+1}{2n}$，所以 $\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}$

下面用数学归纳法证明不等式 $\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}$ 成立.

① 当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{3}{2}$，右边 $=\sqrt{2}$，因为 $\frac{3}{2}>\sqrt{2}$，所以不等式成立.

②假设当 $n=k$ 时不等式成立，即 $\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\frac{b_k+1}{b_k}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2k+1}{2k}>\sqrt{k+1}$ 成立.

则当 $n=k+1$ 时，左边 $=\frac{b_1+1}{b_1}\cdot\frac{b_2+1}{b_2}\cdots\cdots\frac{b_k+1}{b_k}\cdot\frac{b_{k+1}+1}{b_{k+1}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{2k+3}{2k+2}$

$> \sqrt{k+1}\cdot\frac{2k+3}{2k+2}=\sqrt{\frac{(2k+3)^2}{4(k+1)}}=\sqrt{\frac{4(k+1)^2+4(k+1)+1}{4(k+1)}}=\sqrt{(k+1)+1+\frac{1}{4(k+1)}}>\sqrt{(k+1)+1}$

所以当$n=k+1$时,不等式也成立.

由①、②可得不等式恒成立.

证法五:(反证法)假设不等式$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{n+1}\left(n\in N^*\right)$不成立,

则取使不等式不成立的最小自然数$\lambda_0\left(\lambda_0>1\right)$(显然$n=1$时不等式不成立),

所以有:$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2\lambda_0+1}{2\lambda_0}\le\sqrt{\lambda_0+1}$ (1)

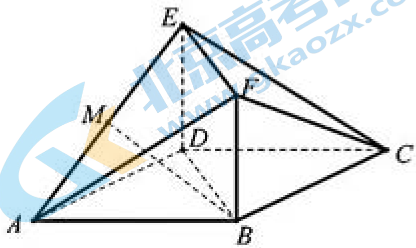
$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2\lambda_0-1}{2\lambda_0-2}>\sqrt{\lambda_0}$ (2) 同时成立,但是由于$\frac{2\lambda_0+1}{2\lambda_0}>\frac{\sqrt{\lambda_0+1}}{\sqrt{\lambda_0}}$ (3)

(2)×(3)得:$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\frac{2\lambda_0-1}{2\lambda_0-2}\cdot\frac{2\lambda_0+1}{2\lambda_0}>\sqrt{\lambda_0+1}$,这与(1)矛盾,故原不等式成立.

14、(13分)如图,在多面体$ABCDEF$中,矩形$BDEF$所在平面与正方形$ABCD$所在平面垂直,$AB=1$,点M为AE的中点.

(Ⅰ)求证:BM // 平面EFC;

(Ⅱ)若$DE=AD$,求二面角$M-BD-A$的正弦值.



解析(Ⅰ)证法一:设DE的中点为N,BC的中点为G,FC的中点为H,

连接MN,NG,GH,EH,由中位线可得

∴四边形$MNGB$为平行四边形,

四边形$NEHG$为平行四边形,

∴BM // NG // EH,

∵$BM\not\subset$平面EFC,$EH\subset$平面EFC,

∴BM // 平面EFC.........5分

证法二:由题知平面$BDEF\perp$平面$ABCD$,$BD\perp ED$,

平面$BDEF\cap$平面$ABCD=BD$,$DE\subset$平面$BDEF$,

∴$DE\perp$平面$ABCD$,

以 D 为原点，DA、DC、DE 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $DE=t$，则 $B(1,1,0)$，$A(1,0,0)$，$E(0,0,t)$，$M(\frac{1}{2},0,\frac{t}{2})$，$F(1,1,t)$，$C(0,1,0)$，

$\therefore \overline{MB}=(\frac{1}{2},1,-\frac{t}{2})$，$\overline{EF}=(1,1,0)$，$\overline{EC}=(0,1,-t)$，

设平面 EFC 的法向量 $\overline{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overline{EF}\cdot\overline{n}=x+y=0\\ \overline{EC}\cdot\overline{n}=y-tz=0\end{cases}$，取 $y=1$，得 $\overline{n}=(-1,1,\frac{1}{t})$，

$\because \overline{MB}\cdot\overline{n}=0$，$\because BM\not\subset$ 平面 EFC $\therefore BM$ // 平面 EFC．

（II）$\because DE=AD=1$，$\therefore \overline{DB}=(1,1,0)$，$\overline{DM}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$，

设平面 DBM 的法向量 $\overline{m}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\overline{DB}\cdot\overline{m}=a+b=0\\ \overline{DM}\cdot\overline{m}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c=0\end{cases}$，取 $a=1$，得 $\overline{m}=(1,-1,-1)$，

平面 ABD 的法向量 $\overline{p}=(0,0,1)$，

设二面角 $M-BD-A$ 的平面角为 θ，

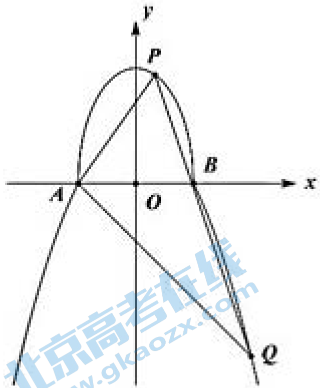
则 $\cos\theta=\frac{|\overline{m}\cdot\overline{p}|}{|\overline{m}|\cdot|\overline{p}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

$\therefore$ 二面角二面角 $M-BD-A$ 正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$．.........13 分

15、（13 分）如图，曲线 C 由上半椭圆 C_1：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0,y\geq 0)$ 和部分抛物线 C_2：$y=-x^2+1(y\leq 0)$ 连接而成，C_1,C_2 的公共点为 A,B，其中 C_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）过点 B 的直线 l 与 C_1,C_2 分别交于 P,Q（均异于点 A,B），若 $AP\perp AQ$，求直线 l 的方程.



解析（Ⅰ）易知曲线 C_1,C_2 的结合点 A,B 的坐标分别为 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$，于是可得 $b=1$，再由 C_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $a=2$.

所以，$a=2$，$b=1$. ....5 分

（Ⅱ）显然直线 l 的斜率存在，故设其方程为 $y=k(x-1)$，将其代入曲线 C_2 的方程中可得 $x^2+kx-k-1=0$，知该方程的一个根为 1，由韦达定理可得点 Q 的横坐标为 $-k-1$，于是点 Q 的坐标为 $(-k-1,-k^2-2k)$；

把直线 l 的方程代入曲线 C_1 的方程中，可得 $(4+k^2)x^2-2k^2x+k^2-4=0$，知该方程的一个根为 1，

由韦达定理可得点 P 的横坐标为 $\frac{k^2-4}{k^2+4}$，于是点 P 的坐标为 $(\frac{k^2-4}{k^2+4},\frac{-8k}{k^2+4})$.

由 $AP\perp AQ$ 可得：$\frac{-4}{k}\cdot(k+2)=-1$，解得 $k=-\frac{8}{3}$.

所以，直线 l 的方程为 $y=-\frac{8}{3}(x-1)$，即 $8x+3y-8=0$. ....13 分

16、（15 分）已知函数 $f(x)=2a\ln(1+x)-x(a>0)$.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（II）求证：$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)+(1+\frac{1}{n})^{n}\ (n\in N^{*})$.

解：（I）定义域为 $(-1,+\infty)$，　$f'(x)=\frac{2a}{1+x}-1$ ....2 分

令 $f'(x)>0\Rightarrow -1<x<2a-1$，令 $f'(x)<0\Rightarrow x>2a-1$

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,2a-1)$，$f(x)$ 的单调递减区间为

$(2a-1,+\infty)$............4 分

$f(x)$ 的极大值为 $2a\ln 2a-2a+1$ ....6 分

（II）证：

令 $a=\frac{1}{2}$，由（I）可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，故 $f(x)<f(0)=0$

即 $\ln(1+x)<x$，令 $x=\frac{1}{n}(n\in N^{*})$，故 $\ln(1+\frac{1}{n})=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$

累加得，$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ ....11 分

$\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}\Rightarrow \ln(1+\frac{1}{n})^{n}<1\Rightarrow (1+\frac{1}{n})^{n}<e<3$

故 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+3>\ln(n+1)+(1+\frac{1}{n})^{n}$，得证..................15 分

法二：$(1+\frac{1}{n})^{n}=C_n^0+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\ =2+\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$ ....11 分，其余相同证法.