2019 北京育才中学高三（下）零模

数　　学（理）

2019.3

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

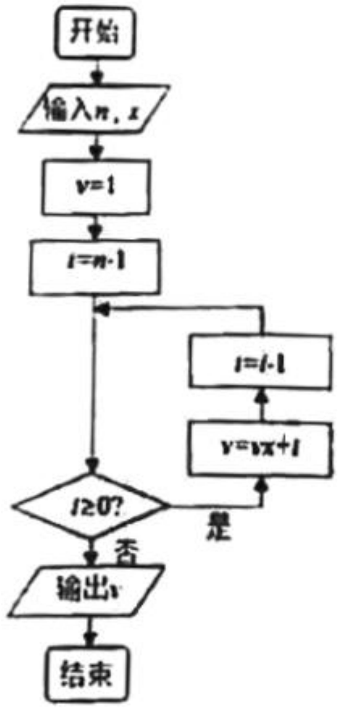
1. 若全集 U=R, A=$\{x|0<x<2\}$, B=$\{X||X|\le 1\}$, 则（$C_U A$）$\cap$ B为

A. $\{x|-1\le x<0\}$　　B. $\{x|-1\le x\le 1\}$

C. $\{x|1\le x\le 2\}$　　D. $\{x|-1\le x\le 0\}$

2. 已知$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前 n 项和，若 $a_1=2$，$S_3=15$，则 $a_6=$

A. 17　　B. 13　　C. 14　　D. 7



3. 已知直线 l:$\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \end{cases}$(t 为参数)，圆 C: ρ =2cosθ ，则圆心 C 到直线 l 的距离是

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

4. “x≥1” 是 “$x+\frac{1}{x}\geqslant\sqrt{2}$” 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 秦九韶是我国南宋时期的数学家，他在《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法，至今仍是比较先进的算法，右图是实现该算法的程序框图，执行该程序框图，若输入 n, x 的值分别为 4，2，则输出 v 的值为

A. 5　　B. 12

C. 25　　D. 50

6. 某中学语文老师从《红楼梦》、《平凡的世界》、《红岩》、《老人与海》5 本不同的名著中选出 3 本，期中《红楼梦》为必选，再分给三个同学去读，每人 1 本，则不同的分配方法共有

A. 6 种　　B. 12 种

C. 18 种　　D. 24 种

7. 连掷两次骰子分别得到点数是 m, n, 则点（m, n）在直线 x-y=0 或 x+y=8 上的概率为

A. $\frac{11}{36}$　　B. $\frac{5}{18}$

C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$

8. 已知函数 f(x)=$\begin{cases} -x^2+x^2 & x<1 \\ a\ln x & x\ge 1 \end{cases}$, 其中 a 为非零常数，关于 f(x), 给出以下命题：

①$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{12}$;

② 若存在整数 b，使关于 x 的方程 f(x)=b 有 4 个不同解，则必有 a>0;

③ 对于任意给定的实数 b，关于 x 的方程 f(x)=b 但有解的充要条件是 a<0;

④ a>0 时，对于$\forall m>1,\exists n<0$, 使得 mn+f(m)f(n)=0

⑤ a>0 时，$\exists m>1$, 使得 $f(m)f(-m)=m^2$

其中真命题的个数是

A. 2　　　　B. 3

C. 4　　　　D. 5

第二部分（非选择题　共 110 分）

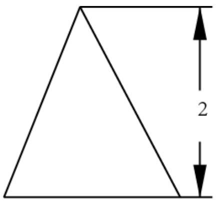
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 已知$\frac{ai}{1-i}=-1+I$, 其中 i 是虚数单位，那么实数 a=____________

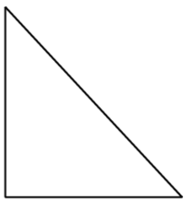
10. 在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，若 $a=4, b=\sqrt{7}, \angle B=\frac{\pi}{6}$，则 c=________

11. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{20}=1(a>0)$的一条渐近线方程为 y=2x, 则该双曲线的焦距为________

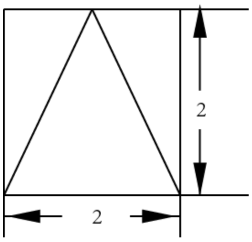
12. 已知空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的各侧面图形中，是直角三角形的有________个



主视图



左视图



俯视图

13. 在边长为 1 的等边三角形 ABC 中，点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F，使得 DE=2EF.

设$\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$, 则

x+y=____________；$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$=____________

14. 若一系列函数的解析式相同，值域相同，但定义域不同，则称这些函数为“同族函数”，若函数的解析式为 $y=x^2$, 则：

① 值域为{0，1}的同族函数共有________个；

② 值域为{1，2，3，・・・，n}$(n\in N^*)$的同族函数共有____________个

三、 解答题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15. （本小题 13 分）

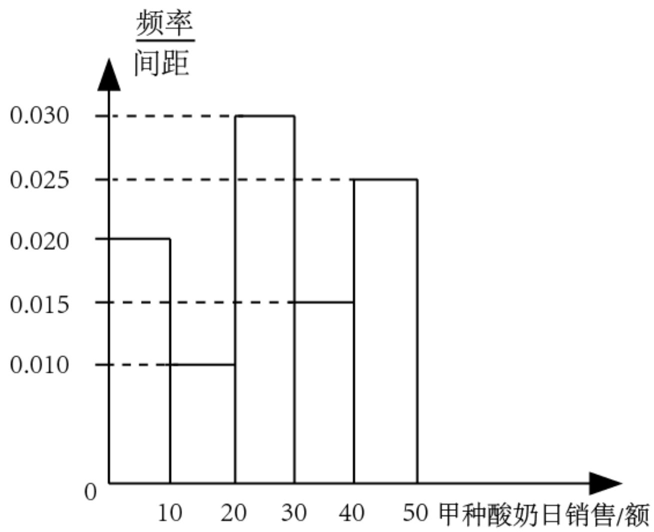
已知函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$的图象与 x 轴的相邻；两个交点的距离为$\frac{\pi}{2}$,

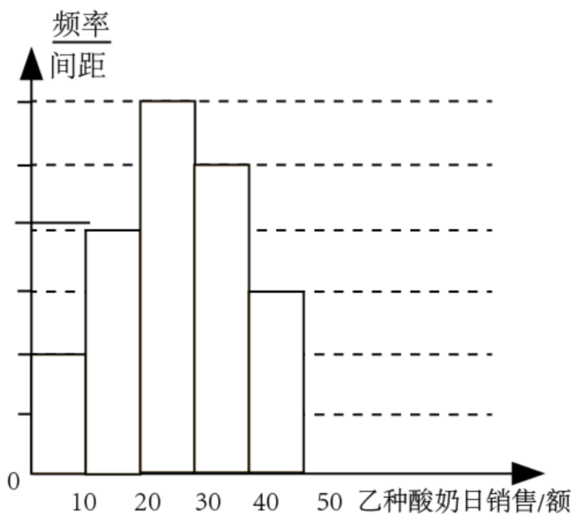
（I）求 ω 的值；

（II）设函数 $g(x)=f(x)+2\cos^2 x-1$，求 $g(x)$ 在区间 $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值

16. （本小题 13 分）

某超市从某一年甲、乙两种酸奶的日销售量（单位：箱）的数据中分别随机抽取 100 个，并按[0，10]，(10, 20]，(20, 30]，(30, 40]，(40, 50]，分组，得到频率分布直方图如下：





乙

假设甲、乙两种酸奶独立销售且日销售量相互独立。

（I）写出频率分布直方图（甲）中的 a 的值；记甲种酸奶与乙种酸奶日销售量（单位：箱）的方差分别为 S_1^2，S_2^2，试比较 S_1^2 与 S_2^2 的大小；（只需写出结论）

（II）估计在未来的某一天里，甲、乙两种酸奶的销售量有一个高于 20 箱且另一个不高于 20 箱的概率；

（III）设 X 表示在未来 3 天内甲种酸奶的日销售量不高于 20 箱的天数，以日销售量落入各组的频率作为概率，求 X 的分布和数学期望。

17. （本小题满分 14 分）

如图 1，在直角梯形 ABCD 中，AD∥BC, AD⊥DC, BC=2AD=2DC, 四边形 ABEF 是正方形，将正方形 ABEF 沿 AB 折起到四边形 ABE_1F_1 的位置，使平面 ABE_1F_1⊥平面 ABCD，M 为

AF_1 的中点如图 2

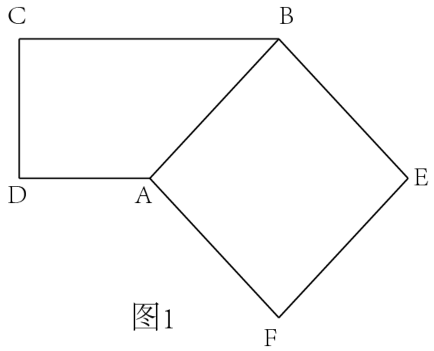


图1

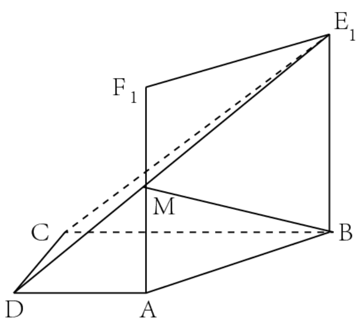


图2

（I）缺题

（II）求 BM 与平面 CE_1M 所成角的正弦值；

（III）判断直线 DM 与 CE_1 的位置关系，并说明理由。

18. （本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+a(1-x)$

（I）讨论 $f(x)$ 的单调性

（II）当 $f(x)$ 有最大值，且最大值大于 $2a-2$ 时，求实数 a 的取值范围；

（III）当 a 为何值时，函数 $f(x)$ 图象上时不存在两点 P,Q,使以 PQ 为直径的圆过原点。（只需写出结论）

19. （本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的点到它的两个焦点的距离之和为 4，以椭圆 C 的短轴为直径的圆 O 经过这两个焦点，点 A，B 分别是椭圆 C 的左、右顶点。

（I）求圆 O 和椭圆 C 的方程

（II）已知 P,Q 分别是椭圆 C 和圆 O 上的动点（P,Q 位于 y 轴两侧），且直线 PQ 与 x 轴平行，直线 AP、BP 分别与 y 轴交于点 M,N。求证：∠MQN 为定值。

20. （本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是各项均为整数的单调递增数列，若对任意 $n\in N^*$，数列 $\{a_n\}$ 的第 a_n 项等数列 $\{b_n\}$ 的第 n 项，即：$a_{a_n}=b_n$，则称数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的迭代数列。

（I）若 $a_n=3n(n\in N^*)$，写出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，并判断 2016 和 2019 是否为数列 $\{b_n\}$ 中的项；

（II）$b_n=3n(n\in N^*)$，求数列 $\{a_n\}$ 的第 5 项，并证明：$\forall n\in N^*$，$a_{3^n}=2\times 3^n$；

（III）在（II）的条件下，写出集合 $M=\{n|a_n\le 2019,n\in N^*\}$ 的元素个数。（只需写出结论）