丰台区 2017 年高三年级第二学期综合练习（二）

数 学（文科）

2017.05

（本试卷满分共 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在 答题卡的"条形码粘贴区"贴好条形码。

2. 本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。

3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。

4. 请保持答题卡卡面清洁，不要装订、不要折叠、不要破损。

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x|1\le x\le 4\}$，$B=\{x|x>2\}$，那么 $A\cup B=$

（A）$(2,4)$　　（B）$(2,4]$　　（C）$[1,+\infty)$　　（D）$(2,+\infty)$

2. 下列函数中，既是偶函数又是 $(0,+\infty)$ 上的增函数的是

（A）$y=x^3$　　（B）$y=2^{|x|}$　　（C）$y=-x^2$　　（D）$y=\log_3(-x)$

3. 某校高一 1 班、2 班分别有 10 人和 8 人骑自行车上学，他们每天骑行路程（单位：千米）的茎叶图如图所示：

1 班		2 班
9 9 8	0	b 8 9 9
6 5 4 a 0	1	0 0 1 1
2 0	2	

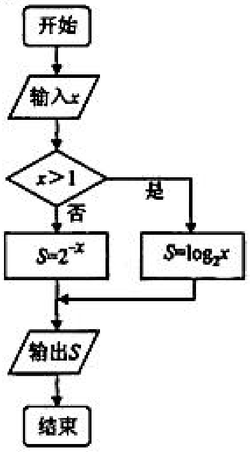
则 1 班 10 人每天骑行路程的极差和 2 班 8 人每天骑行路程的中位数分别是

（A）14，9.5　　（B）9，9　　（C）9，10　　（D）14，9

4. 圆 $(x+1)^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $y=x-1$ 的距离为

（A）1　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

5. 执行如图所示的程序框图，若输出的 S 为 4，则输入 x 的值为



（A）-2

（B）16

（C）-2 或 8

（D）-2 或 16

6. 已知向量 $a=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，$b=(\sqrt{3},-1)$，则 a,b 的夹角为

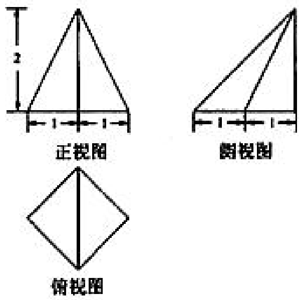
（A）$\frac{\pi}{4}$

（B）$\frac{\pi}{3}$

（C）$\frac{\pi}{2}$

（D）$\frac{2\pi}{3}$

7. 一个几何体的三视图如图所示，其中俯视图为正方形，则最长侧棱（不包括底面的棱）的长度为



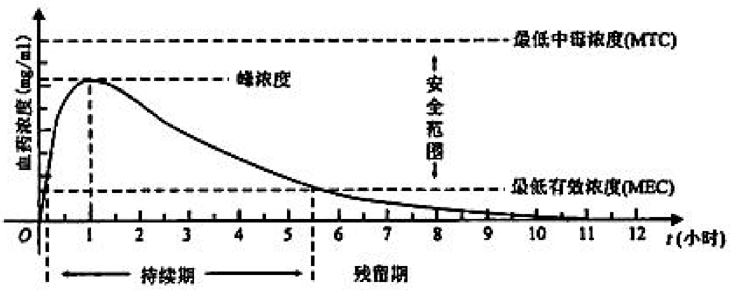
（A）2

（B）$\sqrt{6}$

（C）$2\sqrt{2}$

（D）$2\sqrt{3}$

8. 血药浓度（Plasma Concentration）是指药物吸收后在血浆内的总浓度．药物在人体内发挥治疗作用时，该药物的血药浓度应介于最低有效浓度和最低中毒浓度之间．已知成人单次服用 1 单位某药物后，体内血药浓度及相关信息如图所示：



根据图中提供的信息，下列关于成人使用该药物的说法中，不正确的是

（A）首次服用该药物 1 单位约 10 分钟后，药物发挥治疗作用

（B）每次服用该药物 1 单位，两次服药间隔小于 2 小时，一定会产生药物中毒

（C）每间隔 5.5 小时服用该药物 1 单位，可使药物持续发挥治疗作用

（D）首次服用该药物 1 单位 3 小时后，再次服用该药物 1 单位，不会发生药物中毒

第二部分 （非选择题 共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分.

9. 双曲线$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$的焦点坐标为______.

10. 已知复数$z=(1-\mathrm{i})(\mathrm{i}-2)$，则$|z|=$______.

11. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C对应的边长分别是a，b，c，且$\sqrt{3}a\sin B=b\cos A$，则角A的大小为______.

12. 若实数x，y满足约束条件$\begin{cases}x\geq 0,\\ y\leq x,\\ x+y+a\leq 0,\end{cases}$且$z=x+3y$的最大值为4，则实数$a$的值为______.

13. 已知函数$f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+2, & x\leq 1,\\ \dfrac{1}{x}+1, & x>1.\end{cases}$下列四个命题：

①$f(f(1))>f(3)$；

②$\exists x_0\in(1,+\infty)$，$f'(x_0)=-\dfrac{1}{3}$；

③$f(x)$的极大值点为$x=1$；

④$\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leq 1$

其中正确的有______.（写出所有正确命题的序号）

14. 在平面直角坐标系xOy中，点M不与点O重合，称射线OM与圆$x^2+y^2=1$的交点N为点M的“中心投影点”.

（1）点$M(1,\sqrt{3})$的“中心投影点”为______；

（2）曲线$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$上所有点的“中心投影点”构成的曲线的长度是______.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题共 13 分）

已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q=2$，前 3 项和是 7，等差数列$\{b_n\}$满足$b_1=3$，$2b_2=a_2+a_4$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\left\{\dfrac{2}{(2n-1)b_n}\right\}$的前$n$项和$S_n$．

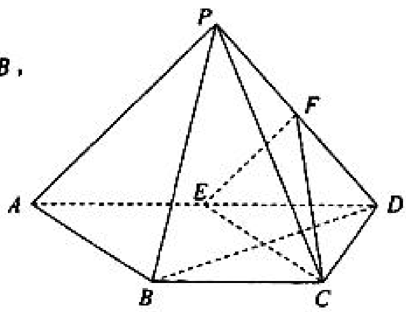
16．（本小题共 13 分）

已知函数$f(x)=\sin x\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)+\sqrt{3}\cos^2 x$．

（Ⅰ）求$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）求$f(x)$的单调递增区间．

17．（本小题共 14 分）



如图，四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$平面PAB，$AD// BC$，$BC=CD=\dfrac{1}{2}AD$，E，F分别为线段AD，PD的中点．

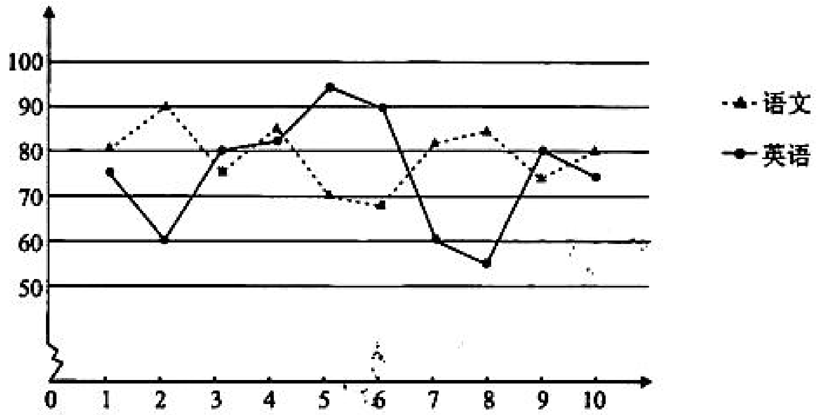
（Ⅰ）求证：$CE//$平面PAB；

（Ⅱ）求证：$PD\perp$平面CEF；

（Ⅲ）写出三棱锥$D-CEF$与三棱锥$P-ABD$的体积之比．（结论不要求证明）

18.（本小题共 13 分）

某校为研究学生语言学科的学习情况，现对高二 200 名学生英语和语文某次考试成绩进行抽样分析．将 200 名学生编号为 001，002，…，200，采用系统抽样的方法等距抽取 10 名学生，将 10 名学生的两科成绩(单位：分)绘成折线图如下：



（Ⅰ）若第一段抽取的学生编号是 006，写出第五段抽取的学生编号；

（Ⅱ）在这两科成绩差超过 20 分的学生中随机抽取 2 人进行访谈，求 2 人成绩均是语文成绩高于英语成绩的概率；

（Ⅲ）根据折线图，比较该校高二年级学生的语文和英语两科成绩，写出你的结论和理由．

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，点 $P(4,0)$，过右焦点 F 作与 y 轴不垂直的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点．

（Ⅰ）求椭圆 C 的离心率；

（Ⅱ）求证：以坐标原点 O 为圆心与直线 PA 相切的圆，必与直线 PB 相切．

20.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{ax}\ (a>0)$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）证明：总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$，恒有 $f(x)<1$.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

丰台区 2016~2017 学年度第二学期二模练习

高三数学（文科）参考答案及评分参考

2017．05

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	C	D	B	C	D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．$(\pm 5,0)$　　10．$\sqrt{10}$　　11．$\frac{\pi}{6}$

12．-2　　13．①②③④　　14．$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$；$\frac{4\pi}{3}$

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）由已知，得 $a_1+a_2+a_3=7$，且等比数列$\{a_n\}$的公比 $q=2$，

所以 $a_1+2a_1+4a_1=7$，解得 $a_1=1$，　……………………1 分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$．　……………………2 分

由此解得 $a_2=2$，　$a_4=8$，　……………………4 分

则 $b_2=5$，　……………………5 分

又 $b_1=3$，则等差数列$\{b_n\}$的公差 $d=2$，　……………………6 分

所以 $b_n=b_1+2(n-1)=2n+1$．　……………………7 分

（Ⅱ）因为 $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，　……………………9 分

所以 $S_n=(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，　……………………11 分

$=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$，

故数列$\left\{\frac{2}{(2n-1)b_n}\right\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{2n}{2n+1}$．　……………………13 分

16．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\sin x\cos x+\frac{\sqrt{3}(\cos 2x+1)}{2}$　……………………2 分

$=\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　……………………3 分

$=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………5 分

$f(x)$ 的最小正周期为 π 。 ……………………7 分

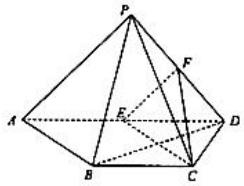
（Ⅱ）由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$ 求得， ……………………9 分

$-\frac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{12}+k\pi(k\in Z)$， ……………………12 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi](k\in Z)$ ……………………13 分

17.（本小题共 14 分）

证明：（Ⅰ）因为 $BC\,//\,AD$， $BC=\frac{1}{2}AD$，



E 为线段 AD 的中点，

所以 $AE\,//\,BC$ 且 $AE=BC$，

所以四边形 $ABCE$ 为平行四边形，

……………………2 分

所以 $CE\,//\,AB$， ……………………3 分

又有 $AB\subset$ 平面 PAB， $CE\not\subset$ 平面 PAB，

所以 $CE\,//$平面 PAB． ……………………5 分

（Ⅱ）因为 E，F 分别为线段 AD，PD 中点，所以 $EF\,//\,PA$， ……………………6 分

又因为 $PD\perp$ 平面 PAB， $PA,AB\subset$ 平面 PAB，

所以 $PD\perp AB$， $PD\perp PA$；

所以 $PD\perp EF$， ……………………8 分

又 $CE\,//\,AB$，所以 $PD\perp CE$ ……………………9 分

因为 $EF\cap CE=E$，

所以 $PD\perp$ 平面 CEF． ……………………11 分

（Ⅲ）结论：$\frac{V_{D-CEF}}{V_{P-ABD}}=\frac{1}{4}$． ……………………14 分

18.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）第五段抽取的编号是 086 号； ……………………3 分

（Ⅱ）记："2 人成绩均是语文成绩高于英语成绩" 为事件 A，

这两科成绩差超过 20 分的学生共 5 人，其中语文成绩高于英语成绩的共 3 人，记为 a，b，c，另 2 人记为 1，2.

在 5 人中随机取 2 人共有：(a，b)(a，c)(a，1)(a，2)(b，c)(b，1)(b，2)(c，1)(c，2)(1，2) 10 种取法；其中 2 人成绩均是语文成绩高于英语成绩共 3 种.

由古典概型公式得：$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$

所以2人成绩均是语文成绩高于英语成绩的概率为$\frac{3}{10}$； ……………………9分

（III）根据折线图可以估计该校高二年级语文成绩平均分高，语文成绩相对更稳定.

其他结论合理即可得分. ……………………13分

19.（本小题共14分）

解：（Ⅰ）由椭圆C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$得：

$a^2=4$，$b^2=3$，$c^2=a^2-b^2=4-3=1$

所以$c=1$，　椭圆C的离心率为$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ ……………………4分

（Ⅱ）因为$c=1$，所以点F（1,0），

当直线l斜率不存在时，直线l的方程：$x=1$，A，B两点关于x轴对称，

点P（4,0）在x轴上，所以直线PA与直线PB关于x轴对称，

所以，　点O到直线PA与直线的距离PB相等，

所以，以坐标原点O为圆心与PA相切的圆，必与直线PB相切…………………6分

当直线l斜率存在时，设直线l的方程：$y=k(x-1)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$

由$\begin{cases}y=k(x-1)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$得：$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$

$x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，　$x_1\cdot x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$ ……………………8分

$k_{PA}=\frac{y_1}{x_1-4}=\frac{k(x_1-1)}{x_1-4}$，$k_{PB}=\frac{y_2}{x_2-4}=\frac{k(x_2-1)}{x_2-4}$ ……………………10分

$$k_{PA}+k_{PB}=\frac{k(x_1-1)}{x_1-4}+\frac{k(x_2-1)}{x_2-4}=\frac{k[2x_1\cdot x_2-5(x_1+x_2)+8]}{(x_1-4)(x_2-4)}$$

$$=\frac{k(\frac{8k^2-24}{3+4k^2}-\frac{40k^2}{3+4k^2}+8)}{(x_1-4)(x_2-4)}=0$$ ……………………12分

所以，$\angle APO=\angle BPO$，于是点O到直线PA与直线的距离PB相等，

故以坐标原点O为圆心与PA相切的圆，必与直线PB相切……………………14分

（也可以用点O到直线PA与直线的距离PB的距离相等来证明）

20.（本小题共 13 分）

解：$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$． ……1 分

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$， ……2 分

$f(1)=0$，$f'(1)=1$， ……3 分

所以，所求切线方程为 $y=x-1$． ……4 分

（Ⅱ）因为 $a>0,x>0$，所以 $f(x)<\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}<a$， ……5 分

令 $g(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$，则 $g'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$， ……6 分

由 $g'(x)=0$ 得，$x=e^2$，

所以，$\forall\in(0,e^2)$，$g'(x)>0$，$\forall x\in(e^2,+\infty)$，$g'(x)<0$， ……7 分

所以 $g(x)$ 的单调增区间是 $(0,e^2)$，单调减区间是 $(e^2,+\infty)$， ……8 分

所以 $g(x)\le g(e^2)=\dfrac{2}{e}$，所以 $a>\dfrac{2}{e}$． ……9 分

（Ⅲ）$f(x)<1\Leftrightarrow\ln x-ax<0$， ……10 分

令 $h(x)=\ln x-ax$，$h'(x)=\dfrac{1-ax}{x}$，

所以，$\forall\in(0,\dfrac{1}{a})$，$h'(x)>0$，$\forall x\in(\dfrac{1}{a},+\infty)$，$h'(x)<0$，

所以 $h'(x)$ 的单调增区间是 $(0,\dfrac{1}{a})$，单调减区间是 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$， ……11 分

因为 $h(1)=-a$，所以，

当 $a\ge1$ 时，存在 $x_0=1$，使得当 $x\in(1,+\infty)$，恒有 $h(x)<0$，即 $f(x)<1$， ……12 分

当 $0<a<1$ 时，由（Ⅱ）知，$\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，即 $\ln x<\sqrt{x}$，

所以 $h(x)=\ln x-ax<\sqrt{x}-ax$，

由 $\sqrt{x}-ax=0$ 得，$x=\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，所以 $h(\sqrt{\dfrac{1}{a}})<0$．

$\dfrac{1}{a}<\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，存在 $x_0=\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，使得当 $x\in(\sqrt{\dfrac{1}{a}},+\infty)$，恒有 $h(x)<0$，即 $f(x)<1$．

综合上所述，总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$，恒有 $f(x)<1$． ……13 分