

数学试题卷

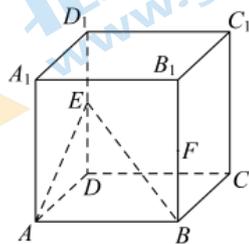
(2024.2.9)

考生须知

1. 本卷共 4 页, 四大题 19 小题, 满分 150 分, 答题时间 120 分钟;
2. 答题时须在答题卡上填涂所选答案 (选择题), 或用黑色字迹的签字笔规范书写答案与步骤 (非选择题), 答在本试题卷上或草稿纸上的答案均属无效;
3. 考试结束时, 考生须一并上交本试题卷, 答题卡与草稿纸.

一、单项选择题 (本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 在一项中学生近视情况的调查中, 某校 150 名男生中有 80 名近视, 140 名女生中有 70 名近视, 在检验这些中学生眼睛近视是否与性别有关时最有说服力的方法是
 - A. 平均数与方差
 - B. 回归分析
 - C. 独立性检验
 - D. 概率
2. 双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 的离心率是
 - A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - B. 1
 - C. $\sqrt{2}$
 - D. 2
3. 如右图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是 DD_1 的中点, 则平面 ABE 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值是
 - A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
 - C. 1
 - D. 2
4. 已知直线 BC 垂直单位圆 O 所在的平面, 且直线 BC 交单位圆于点 A , $AB = BC = 1$, P 为单位圆上除 A 外的任意一点, l 为过点 P 的单位圆 O 的切线, 则
 - A. 有且仅有一点 P 使二面角 $B - l - C$ 取得最小值
 - B. 有且仅有两点 P 使二面角 $B - l - C$ 取得最小值
 - C. 有且仅有一点 P 使二面角 $B - l - C$ 取得最大值
 - D. 有且仅有两点 P 使二面角 $B - l - C$ 取得最大值



5. “角股猜想”是“四大数论世界难题”之一，至今无人给出严谨证明。“角股运算”指的是任取一个自然数，如果它是偶数，我们就把它除以2，如果它是奇数，我们就把它乘3再加上1。在这样一个变换下，我们就得到了一个新的自然数。如果反复使用这个变换，我们就会得到一串自然数，该猜想就是：反复进行角股运算后，最后结果为1。我们记一个自然数 $n(n \neq 1)$ 经过 $J(n)$ 次角股运算后首次得到1（若 n 经过有限次角股运算均无法得到1，则记 $J(n) = +\infty$ ），以下说法有误的是
- A. $J(n)$ 可看作一个定义域和值域均为 N^* 的函数
- B. $J(n)$ 在其定义域上不单调，有极小值，无极大值
- C. 对任意自然数 $n(n \neq 1)$ ，都有 $J(n)J(2) = J(2n) - 1$
- D. $J(2^n) = n$ 是真命题， $J(2^n - 1) \leq J(2^n + 1)$ 是假命题
6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 单调递增，且 $a_1, a_2, a_3 - 1$ 成等差数列，则当 a_{11} 取最小值时，集合 $A = \{a_n | n \in N^*\}$ 中的元素之和为
- A. 36 B. 54 C. 61 D. 69
7. 已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2 + 1 (a \in R)$ 有三个零点 x_1, x_2, x_3 ，则 $ax_1x_2x_3$ 的取值范围是
- A. $(e, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$
8. 现有甲、乙两组数据，每组数据均由六个数组成，其中甲组数据的平均数为3，方差为5，乙组数据的平均数为5，方差为3。若将这两组数据混合成一组，则新的一组数据的方差为
- A. 3.5 B. 4 C. 4.5 D. 5

二、多项选择题（本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，有选错的得0分，若只有2个正确选项，每选对一个得3分；若只有3个正确选项，每选对一个得2分。）

9. 已知复数 $z = \cos \theta + i \sin \theta (\theta \in R)$ ，则
- A. $|z| = 1$ B. $|z^2| = |z|^2$
- C. $z \cdot \bar{z} = 1$ D. $|z + 1| \geq 2$
10. 已知函数 $f(x) = (x - a)^3 + b$ 。若过原点可作函数的三条切线，则
- A. $f(x)$ 恰有2个异号极值点 B. 若 $a > 0$ ，则 $b \in (0, a^3)$
- C. $f(x)$ 恰有2个异号零点 D. 若 $a < 0$ ，则 $b \in (a^3, 0)$

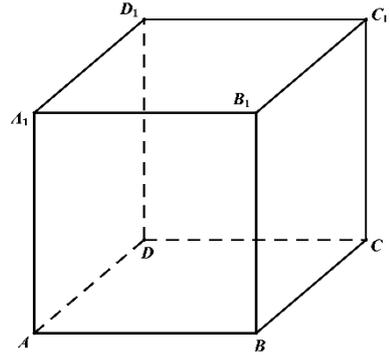
17. (15分)

已知函数 $f(x) = ax - \ln(x+1)$.

- (1) 若 $f(x)$ 的零点也是其极值点, 求 a ;
- (2) 若 $f(x) > 0$ 对所有 $x \in (0, +\infty)$ 成立, 求 a 的取值范围.

18. (17分)

如右图, 一只蚂蚁从正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A_1 出发沿棱爬行, 记蚂蚁从一个顶点到另一个顶点为一次爬行, 每次爬行的方向是随机的, 蚂蚁沿正方体上、下底面上的棱爬行的概率为 $\frac{1}{6}$, 沿正方体的侧棱爬行的概率为 $\frac{2}{3}$.



- (1) 若蚂蚁爬行 n 次, 求蚂蚁在下底面顶点的概率;
- (2) 若蚂蚁爬行 5 次, 记它在顶点 C 出现的次数为 X , 求 X 的分布列与数学期望.

19. (17分)

已知复平面上的点 Z 对应的复数 z 满足 $|z^2| - |z^2 - 9| = 7$, 设点 Z 的运动轨迹为 W . 点 O 对应的数是 0 .

- (1) 证明 W 是一个双曲线并求其离心率 e ;
- (2) 设 W 的右焦点为 F_1 , 其长半轴长为 L , 点 Z 到直线 $x = \frac{L}{e}$ 的距离为 d (点 Z 在 W 的右支上), 证明: $|ZF_1| = ed$;
- (3) 设 W 的两条渐近线分别为 l_1, l_2 , 过 Z 分别作 l_1, l_2 的平行线 l_3, l_4 分别交 l_2, l_1 于点 P, Q , 则平行四边形 $OPZQ$ 的面积是否是定值? 若是, 求该定值; 若不是, 说明理由.