高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|x=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，则

A. $A\cap B=A$　　B. $A\cup B=B$　　C. $B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=\varnothing$　　D. $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\varnothing$

2. 下列求导正确的是

A. $[(2x-1)^2]'=2(2x-1)$　　B. $(2^x+x^2)'=2^x+2x$

C. $\left(\sin x-\cos\frac{\pi}{3}\right)'=\cos x+\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{3}$　　D. $(\log_2 x)'=\frac{\log_2 e}{x}$

3. 已知幂函数 $f(x)=(m^2+m-1)x^m$ 的图象与坐标轴没有公共点，则 $f(\sqrt{2})=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

4. 2023 年 8 月 6 日 2 时 33 分，山东平原县发生里氏 5.5 级地震，8 月 9 日 3 时 28 分，菏泽市牡丹区发生 2.6 级地震. 短时间内的两次地震引起了人们对地震灾害和避险方法的关注. 地震发生时会释放大量的能量，这些能量是造成地震灾害的元凶. 研究表明地震释放的能量 E(单位：焦耳)的常用对数与震级 M 之间满足线性关系，若 4 级地震所释放的能量为 6.3×10^{10} 焦耳，6 级地震所释放的能量为 6.3×10^{13} 焦耳，则这次平原县发生的地震所释放的能量约为(参考数据：$\lg 6.3\approx0.8$，$10^{0.05}\approx1.1$)

A. 8×10^{11} 焦耳　　B. 1.1×10^{11} 焦耳

C. 8×10^{12} 焦耳　　D. 1.1×10^{13} 焦耳

5. 已知函数 $f(x)=\frac{x+1}{ax^2-2ax+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围为

A. $\left\{a\middle|0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}\right\}$　　B. $\{a|a\leqslant0$，或 $a>1\}$

C. $\{a|0\leqslant a<1\}$　　D. $\{a|a\leqslant0$，或 $a\geqslant1\}$

6. 已知函数 $f(x)=\lg(x^2-ax+12)$ 在 $[-1,3]$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是

A. $[6,+\infty)$　　B. $[6,7)$　　C. $(-\infty,-2]$　　D. $(-13,-2]$

7. “$a=1$”是“$f(x)=\lg\dfrac{a+x}{1-ax}$是奇函数”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 若 $a\ln a>b\ln b>c\ln c=1$，则

A. $e^{b+c}\ln a>e^{a+c}\ln b>e^{a+b}\ln c$

B. $e^{a+b}\ln c>e^{a+c}\ln b>e^{b+c}\ln a$

C. $e^{a+c}\ln b>e^{b+c}\ln a>e^{a+b}\ln c$

D. $e^{a+b}\ln c>e^{b+c}\ln a>e^{a+c}\ln b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知实数 a,b,c 满足 $a<0<b<c$，则

A. $a+b>c-a$

B. $b^a>c^a$

C. $\dfrac{1}{a-b}<\dfrac{1}{a-c}$

D. $c-a\geqslant 2\sqrt{(c-b)(b-a)}$

10. 存在定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，满足对任意 $x\in\mathbf{R}$，使得下列等式成立的是

A. $f(x^5)=x^3$

B. $f(\cos x)=x$

C. $f(x^2+x)=|x|$

D. $f(|x|)=x^2+1$

11. 已知函数 $f(x)=e^x\ln(x+1)$，$g(x)=f'(x)$，则

A. $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

B. $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减

C. $\forall m,n\in(0,+\infty)$，$f(m+n)>f(m)+f(n)$

D. $\forall m,n\in(0,+\infty)$，$f(m+n)<f(m)+f(n)$

12. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)-x^2$ 是奇函数，$f(x)+x$ 是偶函数，设函数 $g(x)=\begin{cases}f(x),0\leqslant x\leqslant 1,\\2g(x-1),x>1,\end{cases}$ 则

A. $f(3)=6$

B. 当 $x\in(3,4)$时，$g(x)=4x^2-20x+24$

C. 若对任意 $x\in[0,t]$，$g(x)\geqslant -3$ 恒成立，则实数 t 的最大值为$\dfrac{17}{4}$

D. 若 $g(x)=m(-2<m<-1)$在$[0,5]$内的根有 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=16$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 命题“矩形的对角线相等”的否定为____________________.

14. “以直代曲”是微积分中最基本、最朴素的数学思想方法. 在切点附近，用曲线在该点处的切线近似代替曲线就是这一思想的典型应用. 曲线 $y=\ln x$ 在点$(1,0)$处的切线方程为________________，已知$\left|\sqrt[2024]{e}-1\right|<0.0005$，利用上述“切线近以代替曲线”的思想计算$\sqrt[2024]{e}$所得结果为__________.（结果用分数表示）

15. 已知 $a>0,b>0$，直线 $y=x+2a$ 与曲线 $y=e^{x-1}-b+1$ 相切，则$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值为__________.

16. 若函数 $f(x)=ax+xe^{-ax}-\ln x-1$ 的最小值为 0，则实数 a 的最大值为____________.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$，定义在集合 A 上的两个函数 $y=2x+3$ 和 $y=x^2$ 的值域分别为集合 B 和集合 C.

(1)若 $a=1$，求 $A\cup B$，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap C$；

(2)若 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

求下列函数的值域.

(1) $y=\sqrt{x+2}-x$；

(2) $y=\sqrt{x}-\sqrt{x-4}$；

(3) $y=\sqrt{x}+\sqrt{9-x}$.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2-ax$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)判断 $f(x)$ 的奇偶性；

(2)若函数 $F(x)=f(x)+b\ln x$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处取得极值，且关于 x 的方程 $F(x)=m$ 有 3 个不同的实根，求实数 m 的取值范围.

20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ax^2+b$，$g(x)=e^x+e^{-x}-(b-2)x(a,b\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(1)=f'(1)=g(0)$，解不等式 $g(f(x))\geqslant g(|x-3|)$；

(2)若 $a=1,b=2$，$g(x)\geqslant kf'(e^{-x}+2)-2$ 对任意实数 x 恒成立，求 k 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，$g(x)=\ln x$.

(1)若 $F(x)=mf(x)+2g(x)(m\in\mathbf{R})$存在极值，求 m 的取值范围；

(2)若关于 x 的不等式 $af(x)+g(x)\geqslant a$ 在区间$(0,1]$上恒成立，求实数 a 的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{ae^x}{x}+\ln x-x(a>0)$.

(1)讨论 $f(x)$的极值点的个数；

(2)若 $f(x)$恰有三个极值点 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，且 $x_3-x_1\leqslant 1$，求 $x_1+x_2+x_3$ 的最大值.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. C　$A=\{x\mid x=2k-1,k\in \mathbf{Z}\}=\{x\mid x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{x\mid x=4k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，得 $B\subsetneqq A$，故 $A\cap B=B$，$A\cup B=A$，$B\cap(\complement_{\mathbf{R}}A)=\varnothing$，$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid x=4k-1,k\in\mathbf{Z}\}\neq\varnothing$，故 A，B，D 均错误，C 正确．故选 C．

2. D　$[(2x-1)^2]'=2(2x-1)\cdot 2=4(2x-1)$，故 A 错误；$(2^x+x^2)'=2^x\ln 2+2x$，故 B 错误；$\left(\sin x-\cos\frac{\pi}{3}\right)'=\cos x$，故 C 错误；$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}=\frac{\log_2 \mathrm{e}}{x}$，故 D 正确．故选 D．

3. A　因为 $f(x)$ 为幂函数，所以 $m^2+m-1=1$，解得 $m=-2$，或 $m=1$，又 $f(x)$ 的图象与坐标轴无公共点，故 $m<0$，所以 $m=-2$，故 $f(x)=x^{-2}$，所以 $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^{-2}=\frac{1}{2}$．故选 A．

4. D　由题意可设 $\lg E=\lambda M+\mu$，则 $\begin{cases}\lg(6.3\times10^{10})=4\lambda+\mu,\\ \lg(6.3\times 10^{13})=6\lambda+\mu,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=1.5,\\ \mu=4.8.\end{cases}$ 所以 $\lg E=1.5M+4.8$，所以 $E=10^{1.5M+4.8}$，所以当 $M=5.5$ 时，$E=10^{1.5\times5.5+4.8}=10^{13.05}=10^{0.05}\times10^{13}\approx1.1\times10^{13}$ 焦耳．故选 D．

5. C　由函数 $f(x)=\frac{x+1}{ax^2-2ax+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，得 $\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2-2ax+1\neq0$ 恒成立．当 $a=0$ 时，$1\neq0$ 恒成立；当 $a\neq0$ 时，$\Delta=4a^2-4a<0$，解得 $0<a<1$．综上所述，实数 a 的取值范围为 $\{a\mid 0\leqslant a<1\}$．故选 C．

6. B　由题意得函数 $y=x^2-ax+12$ 在 $[-1,3]$ 上单调递减，且在 $[-1,3]$ 上 $x^2-ax+12>0$ 恒成立，所以 $\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant3,\\ 3^2-3a+12>0,\end{cases}$ 解得 $6\leqslant a<7$，故 a 的取值范围是 $[6,7)$．故选 B．

7. A　若 $f(x)=\lg\frac{a+x}{1-ax}$ 是奇函数，则 $f(-x)+f(x)=0$，即 $\lg\frac{a-x}{1+ax}+\lg\frac{a+x}{1-ax}=0$，所以 $\lg\frac{a^2-x^2}{1-a^2x^2}=0$，所以 $\frac{a^2-x^2}{1-a^2x^2}=1$，所以 $a^2-x^2=1-a^2x^2$，所以 $a^2=1$，所以 $a=\pm1$，所以“$a=1$”是“$f(x)=\lg\frac{a+x}{1-ax}$ 是奇函数”的充分不必要条件．故选 A．

8. B　设 $f(x)=x\ln x$，$f'(x)=\ln x+1$，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增．因为 $f(a)>f(b)>f(c)=1>0$，且在 $(0,1)$ 上 $f(x)<0$，所以 $a>b>c>1>\frac{1}{\mathrm{e}}$，设 $g(x)=\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$，$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x\cdot\ln x}{\mathrm{e}^{2x}}=\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{\mathrm{e}^x}=\frac{1-x\ln x}{x\mathrm{e}^x}$，当 $x\geqslant c$ 时，$x\ln x\geqslant1$，所以 $g'(x)\leqslant0$，所以 $g(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(a)<g(b)<g(c)$，即 $\frac{\ln a}{\mathrm{e}^a}<\frac{\ln b}{\mathrm{e}^b}<\frac{\ln c}{\mathrm{e}^c}$，所以 $\mathrm{e}^{b+c}\ln a<\mathrm{e}^{a+c}\ln b<\mathrm{e}^{a+b}\ln c$．故选 B．

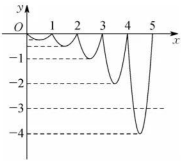
9. BCD　因为 $a<0<b<c$，所以 $a<-a$，$a+b<c-a$，故 A 错误；因为函数 $y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，因为 $0<b<c$，$0>a-b>a-c$，所以 $b^a>c^a$，$\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a-c}$，故 BC 均正确；因为 $a<0<b<c$，所以 $c-b>0$，$b-a>0$，所以 $c-a=(c-b)+(b-a)\geqslant2\sqrt{(c-b)(b-a)}$，当且仅当 $c-b=b-a$ 时，等号成立．故 D 正确．故选 BCD．

10. AD　对于 A，令 $x^5=t$，则 $x=\sqrt[5]{t}$，则 $f(t)=\sqrt[5]{t^3}$，故 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=\sqrt[5]{x^3}$ 唯一确定，故 A 成立；对于 B，令 $x=0$，则 $f(\cos 0)=f(1)=0$，令 $x=2\pi$，则 $f(\cos 2\pi)=f(1)=2\pi$，与函数定义不符，故 B 不成立；对于 C，令 $x=0$，则 $f(0)=0$，

令 $x=-1$，则 $f(0)=|-1|=1$，与函数定义不符，故 C 不成立；对于 D，$f(|x|)=x^2+1=|x|^2+1$，$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)$唯一确定，符合函数定义，故 D 成立. 故选 AD.

11. AC　$f'(x)=e^x\ln(x+1)+\dfrac{e^x}{x+1}$，即 $g(x)=e^x\ln(x+1)+\dfrac{e^x}{x+1}$，则 $x>0$ 时，$g'(x)=e^x\left[\ln(x+1)+\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}\right]>0$，故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故 A 正确，B 错误；令 $F(x)=f(x+n)-f(x)-f(n)$，则 $F'(x)=f'(x+n)-f'(x)$，因为 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又 $n>0$，所以 $F'(x)>0$，所以 $F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $\forall m\in(0,+\infty)$，$F(m)>F(0)=0$，所以 $f(m+n)>f(m)+f(n)$，故 C 正确，D 错误. 故选 AC.

12. ACD　由 $f(x)-x^2$ 是奇函数，$f(x)+x$ 是偶函数，得$\begin{cases}f(-x)-(-x)^2=-f(x)+x^2,\\ f(-x)-x=f(x)+x,\end{cases}$解得 $f(x)=x^2-x$，所以 $f(3)=3^2-3=6$，故 A 正确；由 $g(x)=\begin{cases}f(x),0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2g(x-1),x>1,\end{cases}$ 当 $x\in(1,2]$时，$x-1\in(0,1]$，所以 $g(x)=2g(x-1)=2f(x-1)$；当 $x\in(2,3]$时，$g(x)=4f(x-2)$；当 $x\in(3,4]$时，$g(x)=2^3f(x-3)=8(x^2-7x+12)$，故 B 错误；以此类推，$g(x)$的图象如图：



当 $x\in(4,5]$时，$g(x)=16f(x-4)$，由 $g(x)\geqslant -3$，得 $16(x-4)(x-5)\geqslant -3$，解得 $x\leqslant\dfrac{17}{4}$ 或 $x\geqslant\dfrac{19}{4}$，又 $\forall x\in[0,t]$，$g(x)\geqslant -3$ 恒成立，所以 $0<t\leqslant\dfrac{17}{4}$，所以实数 t 的最大值为$\dfrac{17}{4}$，故 C 正确；$g(x)=m(-2<m<-1)$在$[0,5]$内的根为曲线 $y=g(x)(x\in[0,5])$与直线 $y=m(-2<m<-1)$交点的横坐标，由图知二者有四个交点，且分别关于直线 $x=\dfrac{7}{2}$ 和 $x=\dfrac{9}{2}$ 对称，故$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i=16$，故 D 正确. 故选 ACD.

13. 存在一个矩形，其对角线不相等(或有的矩形对角线不相等)

14. $y=x-1$(2 分)　$\dfrac{2\,025}{2\,024}$(3 分)　由 $y=\ln x$，得 $y'=\dfrac{1}{x}$，所以曲线在点$(1,0)$处的切线斜率 $k=1$，所以切线方程为 $y=x-1$. 由题意知在 $x=1$ 附近，$\ln x\approx x-1$，所以 $\ln\sqrt[2\,024]{e}\approx\sqrt[2\,024]{e}-1$，所以 $e^{\frac{1}{2\,024}}\approx\ln e^{\frac{1}{2\,024}}+1=\dfrac{1}{2\,024}+1=\dfrac{2\,025}{2\,024}$，即$\sqrt[2\,024]{e}\approx\dfrac{2\,025}{2\,024}$.

15. 9　设切点为(x_0,y_0)，因为 $y'=e^{x-1}$，所以 $e^{x_0-1}=1$，得 $x_0=1$，所以 $1+2a=2-b$，所以 $2a+b=1$，所以$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(2a+b)=5+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{2a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{4}=9$，当且仅当$\dfrac{2b}{a}=\dfrac{2a}{b}$，即 $a=b=\dfrac{1}{3}$时等号成立.

16. $\dfrac{1}{e}$　由题意知 $f(x)=ax+xe^{-ax}-\ln x-1=e^{\ln x-ax}+ax-\ln x-1$，令 $t=\ln x-ax$，原函数变为 $y=e^t-t-1$. 令 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$，易知当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$g(x)\geqslant g(0)=0$，所以 $y_{\min}=0$，当且仅当 $t=0$ 时取最小值，所以当 $t=\ln x$

$-ax=0$ 时，$f(x)$取得最小值 0，此时 $a=\frac{\ln x}{x}$有解. 令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,e)$时，$h'(x)>0$；

当 $x\in(e,+\infty)$时，$h'(x)<0$，故 $h(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，所以 $h(x)_{max}=h(e)=\frac{1}{e}$，所以 $a_{max}=\frac{1}{e}$.

17. 解：由题意知 $A\neq\varnothing$，故 $a\geqslant-2$，$B=\{y|-1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$. ………… 1 分

(1)当 $a=1$ 时，$A=[-2,1]$，$B=[-1,5]$，$C=[0,4]$， ………… 2 分

所以 $A\cup B=[-2,5]$，$(\complement_R A)\cap C=(1,4]$. ………… 4 分

(2)当$-2\leqslant a\leqslant 0$ 时，$C=\{y|a^2\leqslant y\leqslant 4\}$，

又 $C\subseteq B$，故 $2a+3\geqslant 4$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，与$-2\leqslant a\leqslant 0$ 相矛盾； ………… 6 分

当 $0<a\leqslant 2$ 时，$C=\{y|0\leqslant y\leqslant 4\}$，又 $C\subseteq B$，

故 $2a+3\geqslant 4$，解得 $a\geqslant\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$； ………… 8 分

当 $a>2$ 时，$C=\{y|0\leqslant y\leqslant a^2\}$，又 $C\subseteq B$，

故 $2a+3\geqslant a^2$，解得$-1\leqslant a\leqslant 3$，所以 $2<a\leqslant 3$.

综上所述，实数 a 的取值范围为$\left[\frac{1}{2},3\right]$. ………… 10 分

18. 解：(1)令 $\sqrt{x+2}=t$，则 $t\geqslant 0$，$x=t^2-2$， ………… 1 分

所以原函数变为 $y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}(t\geqslant 0)$. ………… 3 分

故当 $t=\frac{1}{2}$时，$y_{max}=\frac{9}{4}$，当 $t\to+\infty$，$y\to-\infty$，故原函数的值域为$\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$. ………… 4 分

(2)由题意知函数的定义域为$[4,+\infty)$，$y=\sqrt{x}-\sqrt{x-4}=\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}$， ………… 6 分

令 $t=\sqrt{x}+\sqrt{x-4}$，易知其在$[4,+\infty)$上单调递增，所以 $t\in[2,+\infty)$，

所以 $y\in(0,2]$，即原函数的值域为$(0,2]$. ………… 8 分

(3)由题意知 $y>0$，函数的定义域为$[0,9]$，且 $y^2=9+2\sqrt{x(9-x)}$， ………… 9 分

因为 $x(9-x)=-x^2+9x=-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}$，当 $0\leqslant x\leqslant 9$ 时，$0\leqslant x(9-x)\leqslant\frac{81}{4}$， ………… 10 分

所以 $0\leqslant\sqrt{x(9-x)}\leqslant\frac{9}{2}$，所以 $9\leqslant y^2\leqslant 18$， ………… 11 分

又 $y>0$，所以 $3\leqslant y\leqslant 3\sqrt{2}$，即函数的值域为$[3,3\sqrt{2}]$. ………… 12 分

19. 解：(1)因为 $f(x)=x^2-ax$，所以 $f(x)$图象的对称轴为直线 $x=\frac{a}{2}$， ………… 1 分

所以当 $a=0$ 时，$f(x)$图象的对称轴为 y 轴，此时 $f(x)$为偶函数； ………… 2 分

$a\neq 0$ 时，$f(-1)=1+a$，$f(1)=1-a$，则 $f(-1)\neq f(1)$，且 $f(-1)\neq -f(1)$，

所以 $f(x)$为非奇非偶函数. ………… 4 分

(2)由题意知 $F(x)=x^2-ax+b\ln x$，所以 $F'(x)=2x-a+\frac{b}{x}$， ………… 5 分

因为 $F(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处取得极值，所以 $\begin{cases}F'(1)=2-a+b=0,\\F'(3)=6-a+\dfrac{b}{3}=0.\end{cases}$ ………………………… 6 分

所以 $\begin{cases}a=8,\\b=6,\end{cases}$ 所以 $F(x)=x^2-8x+6\ln x$，$F(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$F'(x)=2x-8+\dfrac{6}{x}=\dfrac{2x^2-8x+6}{x}=$

$\dfrac{2(x-1)(x-3)}{x}$. ………………………………………………………… 7 分

令 $F'(x)>0$，得 $0<x<1$，或 $x>3$；令 $F'(x)<0$，得 $1<x<3$，…………………………… 8 分

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 及 $(3,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，

所以 $F(x)_{极大值}=F(1)=-7$，$F(x)_{极小值}=F(3)=6\ln 3-15$，………………………… 10 分

又当 $x\to0$ 时，$F(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to+\infty$，

要使 $F(x)=m$ 有 3 个不同的实数根，当且仅当 $6\ln 3-15<m<-7$，

故实数 m 的取值范围为 $(6\ln 3-15,-7)$. ………………………………………… 12 分

20. 解：(1)由 $f'(x)=2ax$，得 $f'(1)=2a$，又 $f(1)=a+b$，$g(0)=2$，

所以 $2a=a+b=2$，所以 $a=b=1$，所以 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=e^x+e^{-x}+x$，………………… 2 分

$g'(x)=e^x-e^{-x}+1$，易知当 $x\geqslant0$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，……………………………………………… 3 分

又 $g(f(x))\geqslant g(|x-3|)$，且 $f(x)>0$，$|x-3|\geqslant0$，

所以 $f(x)\geqslant|x-3|$，即 $x^2+1\geqslant|x-3|$，…………………………………………… 4 分

所以 $\begin{cases}x<3,\\x^2+1\geqslant3-x,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant3,\\x^2+1\geqslant x-3,\end{cases}$

解得 $x\leqslant-2$，或 $1\leqslant x<3$，或 $x\geqslant3$.

故原不等式的解集为 $\{x\,|\,x\leqslant-2$，或 $x\geqslant1\}$. ……………………………………… 6 分

(2)因为 $a=1$，$b=2$，所以 $g(x)=e^x+e^{-x}$，$f(x)=x^2+2$，

所以 $f'(x)=2x$，$g(x)\geqslant kf'(e^{-x}+2)-2$，即 $e^x+e^{-x}\geqslant2k(e^{-x}+2)-2$，……………… 7 分

所以 $2k\leqslant\dfrac{e^x+e^{-x}+2}{e^{-x}+2}=\dfrac{(e^x)^2+2e^x+1}{2e^x+1}$，

设 $2e^x+1=t$，则 $t>1$，所以 $2k\leqslant\dfrac{t^2+2t+1}{4t}=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{1}{t}+2\right)$，

因为 $t>1$，易知 $y=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $t+\dfrac{1}{t}>2$，

所以 $\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{1}{t}+2\right)>\dfrac{1}{4}\times4=1$，

所以 $2k\leqslant1$，所以 $k\leqslant\dfrac{1}{2}$，即实数 k 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$. ………………………… 12 分

21. 解：(1)$F(x)=mf(x)+2g(x)=\dfrac{m}{x^2}+2\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$F'(x)=-\dfrac{2m}{x^3}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2m}{x^3}$. …………………………………………… 1 分

当 $m\leqslant0$ 时，$F'(x)>0$ 恒成立，所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$F(x)$ 不存在极值. ………… 2 分

当 $m>0$ 时，令 $F'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{m}$，…… 3 分

当 $x>\sqrt{m}$ 时，$F'(x)>0$，当 $0<x<\sqrt{m}$ 时，$F'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,\sqrt{m})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{m},+\infty)$ 上单调递增，…… 4 分

所以 $F(x)$ 存在一个极小值点 $x=\sqrt{m}$，无极大值点.

综上所述，m 的取值范围为 $(0,+\infty)$. …… 6 分

(2) 由题知原不等式 $af(x)+g(x)\geqslant a$，可化为 $a\left(\frac{1}{x^2}-1\right)+\ln x\geqslant 0$，…… 7 分

法 1：当 $x=1$ 时，$a\in\mathbf{R}$ 恒成立，当 $x\in(0,1)$ 时，$a\geqslant\frac{\ln x}{1-\frac{1}{x^2}}$，…… 8 分

由(1)知函数 $y=\frac{1}{x^2}+\ln(x^2)$ 在 $x=1$ 处有最小值 1，所以 $1-\frac{1}{x^2}\leqslant\ln(x^2)$，…… 9 分

因为 $x\in(0,1)$，所以 $1-\frac{1}{x^2}<\ln(x^2)<0$，…… 10 分

所以 $\frac{\ln(x^2)}{1-\frac{1}{x^2}}<1$，即 $\frac{\ln x}{1-\frac{1}{x^2}}<\frac{1}{2}$，…… 11 分

因为 $a\geqslant\frac{\ln x}{1-\frac{1}{x^2}}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{2}$，

所以实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. …… 12 分

法 2：令 $h(x)=a\left(\frac{1}{x^2}-1\right)+\ln x$，则 $h(x)\geqslant 0$ 对 $\forall x\in(0,1]$ 恒成立，

$h(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$h'(x)=\frac{-2a}{x^3}+\frac{1}{x}=\frac{x^2-2a}{x^3}$.

①若 $a\leqslant 0$，显然 $h'(x)>0$ 对 $\forall x\in(0,1]$ 恒成立，$h(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以当 $x\in(0,1]$ 时，$h(x)\leqslant h(1)=0$. 可见 $a\leqslant 0$ 不符合题意. …… 8 分

②若 $a>0$，则 $h'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{2a}$，$h'(x)>0\Leftrightarrow x>\sqrt{2a}$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,\sqrt{2a}]$ 上单调递减，在 $(\sqrt{2a},+\infty)$ 上单调递增. …… 9 分

(a) 若 $\sqrt{2a}\geqslant 1$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$，$h(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，

所以 $\forall x\in(0,1]$，$h(x)\geqslant h(1)=0$. 可见 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 符合题意. …… 10 分

(b) 若 $\sqrt{2a}<1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$，$h(x)$ 在 $(\sqrt{2a},1]$ 上单调递增.

对 $\forall x\in(\sqrt{2a},1)$，$h(x)<h(1)=0$. 可见 $0<a<\frac{1}{2}$ 不符合题意. …… 11 分

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. …… 12 分

22. 解：(1) $f(x)=\frac{ae^x}{x}+\ln x-x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{a(x-1)e^x}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{e^x(x-1)\left(a-\frac{x}{e^x}\right)}{x^2}$. …… 1 分

令 $g(x)=a-\frac{x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{x-1}{e^x}$，易得 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=a-\frac{1}{e}$. ………………………………………………………… 2 分

①当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$g(x)\geqslant g(1)=a-\frac{1}{e}\geqslant 0$，当且仅当 $x=1,a=\frac{1}{e}$ 时取等号，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 仅在 $x=1$ 处取得极值，共一个极值点；

……………………………………………………………………………………………… 3 分

②当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$g(x)_{\min}=g(1)=a-\frac{1}{e}<0$，又 $g(0)=a>0$，$\ln\frac{1}{a^2}>\ln e^2=2>1$，且 $g\left(\ln\frac{1}{a^2}\right)=a+2a^2\ln a=a(1+2a\ln a)$， ………………………………………………………………………… 4 分

令 $h(a)=1+2a\ln a$，则 $h'(a)=2(\ln a+1)<0$，所以 $h(a)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，所以 $h(a)>h\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{2}{e}>0$，

所以 $g\left(\ln\frac{1}{a^2}\right)>0$，由零点存在定理和 $g(x)$ 的单调性，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(1,\ln\frac{1}{a^2}\right)$ 上各有唯一零点，分别设为 m,n.

……………………………………………………………………………………………… 5 分

当 $x\in(0,m)$ 时，$x-1<0$，$g(x)=a-\frac{x}{e^x}>0$，$f'(x)<0$；

当 $x\in(m,1)$ 时，$x-1<0$，$g(x)<0$，$f'(x)>0$；

当 $x\in(1,n)$ 时，$x-1>0$，$g(x)<0$，$f'(x)<0$；

当 $x\in(n,+\infty)$ 时，$x-1>0$，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,m)$，$(1,n)$ 上单调递减，在 $(m,1)$，$(n,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=m,x=n$ 处取得极小值，在 $x=1$ 处取得极大值，共 3 个极值点.

综上所述，当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 有三个极值点，当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 仅有一个极值点. ……………………… 6 分

(2)因为 $f(x)$ 恰有三个极值点 x_1,x_2,x_3 $(x_1<x_2<x_3)$，

由(1)知 $x_1=m,x_2=1,x_3=n$，

由 $\begin{cases}ae^{x_1}=x_1,\\ ae^{x_3}=x_3\end{cases}$ 两式相除得到 $e^{x_3-x_1}=\frac{x_3}{x_1}$. ………………………………………………… 7 分

令 $t=\frac{x_3}{x_1}$，则 $t>1$，$x_3=tx_1$，$e^{(t-1)x_1}=t$，得 $x_1=\frac{\ln t}{t-1}$，$x_3=\frac{t\ln t}{t-1}$，

又 $x_3-x_1=\ln t\leqslant 1$，所以 $1<t\leqslant e$，则 $x_1+x_2+x_3=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}+1$. ……………………………… 8 分

令 $k(t)=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}+1$，其中 $1<t\leqslant e$，则 $k'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$， ……………………………… 9 分

令 $\omega(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$，则 $\omega'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$，

所以 $\omega(t)$ 在 $(1,e]$ 上单调递增，则当 $1<t\leqslant e$ 时，$\omega(t)>\omega(1)=0$， ………………………………… 11 分

即 $k'(t)>0$，故 $k(t)$ 在 $(1,e]$ 上单调递增，

所以当 $1<t\leqslant e$ 时，$k(t)\leqslant k(e)=\frac{2e}{e-1}$，故 $x_1+x_2+x_3$ 的最大值为 $\frac{2e}{e-1}$. ……………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！