昌平区 2018 年高三年级第二次统一练习

数学试卷(文科) 2018.5

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|x>1$ 或 $x<-1\}$，则 $\complement_U A=$

A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　C. $(-1,1)$　　D. $[-1,1]$

2．下列函数中，在定义域上既是奇函数又是增函数的是

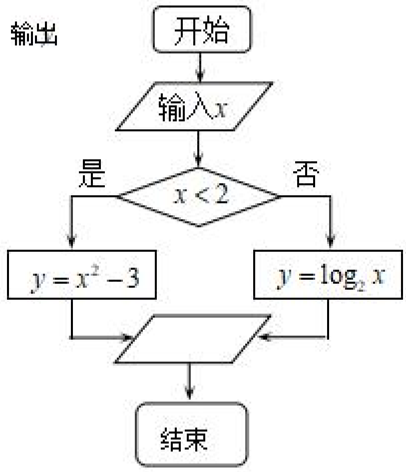
A. $y=\dfrac{1}{x}$　　B. $y=x^3$　　C. $y=\sin x$　　D. $y=\lg x$

3. 在平面直角坐标系中，不等式组 $\begin{cases} x-y\ge 0, \\ x+y-1\le 0, \\ y\ge 0 \end{cases}$ 表示的平面区域的面积是

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{8}$

4. 设 $a=(\dfrac{1}{2})^{0.2}$， $b=\log_2 3$， $c=2^{-0.3}$，则

A. $b>c>a$　　B. $a>b>c$　　C. $b>a>c$　　D. $a>c>b$



5. 执行如图所示的程序框图，若输入 x值满足 $-2<x\le 4$，则输出 y值的取值范围是

A. $[-3,2]$

B. $[1,2]$

C. $[-4,0)$

D. $[-4,0)\cup[1,2]$

6. 设$x,y\in\mathbf{R}$，则“$|x|\le 1$且$|y|\le 1$”是“$x^2+y^2\le 2$”的

A.充分不必要条件　B. 必要不充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

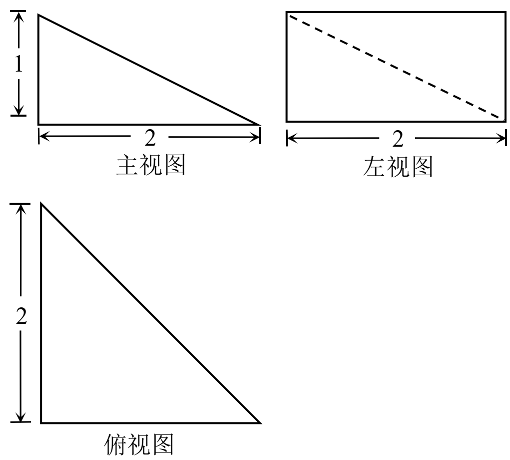
7. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的所有面中最大面的面积是

A．4

B．$\sqrt{5}$

C．2

D．$\sqrt{2}$



8. 2011 年 7 月执行的《中华人民共和国个人所得税法》规定：公民全月工资、薪金所得不超过 3500 元的部分不必纳税，超过 3500 元的部分为全月应纳税所得额．此项税款按下表分段累进计算：

全月应纳税所得额（含税级距）	税率(%)
不超过 1500 元	3
超过 1500 元至 4500 元的部分	10
超过 4500 元至 9000 元的部分	20
…	…

某调研机构数据显示，希望将个税免征额从 3500 元上调至 7000 元．若个税免征额上调至 7000 元（其它不变），某人当月工资、薪金所得 8500 元，则此人当月少缴纳此项税款

A. 45 元　　B.　350 元　　C.　400 元　　D. 445 元

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

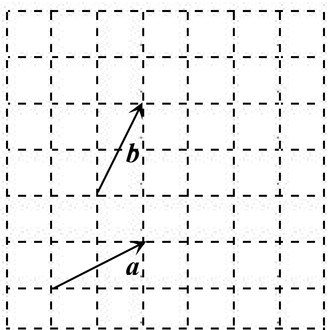
9. 在复平面内，复数$\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$对应的点的坐标为 ___________.

10. 若抛物线 $x^2=12y$，则焦点 F 的坐标是 ___________.

11. 在 ΔABC 中，$a=2$，$b=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，　$A=\dfrac{\pi}{3}$，则 $C=$___________.

12. 能够说明命题"设 a，b，c 是任意实数，若 $a>b>c$，则 $2a+b>c$"是假命题的一组整数 a，b，c 的值依次为___________.

13. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，



则向量 ***a***, ***b*** 所成角的余弦值是________;向量 ***a***, ***b*** 所张成的平行四边形的面积是________.

14．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2+2ax, & x<1,\\ \dfrac{a\ln x}{x}, & x\geq 1.\end{cases}$

①当 $a=1$时，函数 $f\left(x\right)$ 极大值是__________;

②当 $x<1$时，若函数 $f\left(x\right)$ 有且只有一个极值点，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. （本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)+\sqrt{3}\sin 2x$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最值及相应的 x 值.

16. （本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=\frac{1}{2}$，数列 $\left\{b_n\right\}$ 是公差为 2 的等差数列，且 $b_na_{n+1}+a_{n+1}=na_n$.

(I) 求数列 $\left\{b_n\right\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\left\{a_n\right\}$ 前 n 项的和 S_n .

17.（本小题 13 分）

为评估大气污染防治效果，调查区域空气质量状况，某调研机构从 A，B 两地区分别随机抽取了 20 天的观测数据，得到 A，B 两地区的空气质量指数（AQI），绘制如下频率分布直方图：

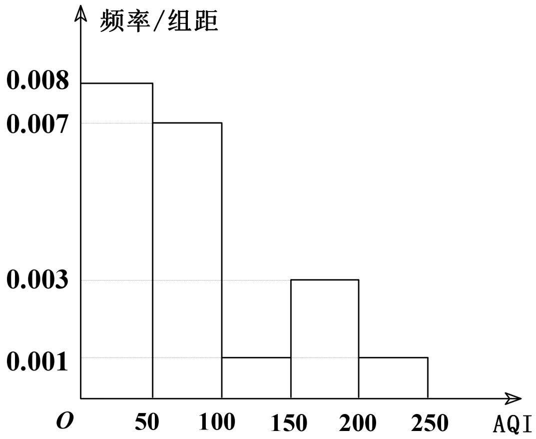


图 1　A 地空气质量指数（AQI）

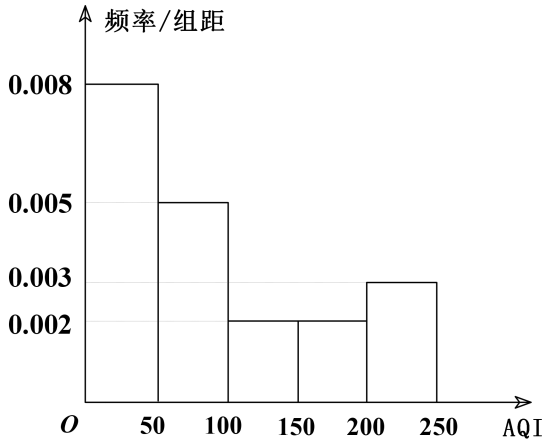


图 2 B 地空气质量指数（AQI）

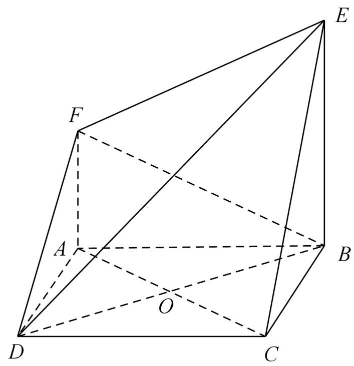
根据空气质量指数，将空气质量状况分为以下三个等级：

空气质量指数 AQI	$(0,100)$	$[100,200)$	$[200,300)$
空气质量状况	优良	轻中度污染	重度污染

(I) 试根据样本数据估计 A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的天数；

(II) 若分别在 A、B 两地区上述 20 天中，且空气质量指数均不小于150的日子里随机各抽取一天，求抽到的日子里空气质量等级均为“重度污染”的概率.

18.（本小题 14 分）



如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$， $AF//BE, AB\perp BE, AB=BE=2, AF=1$.

（Ⅰ）求证： $AC\perp$平面 BDE；

（Ⅱ）求证： $AC//$ 平面 DEF；

(III) 求三棱锥 D-FEB 的体积.

19. (本小题 14 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的经过点 $(0,1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) 求椭圆 E 的标准方程;

(II) 过右焦点 F 的直线 l （与 x 轴不重合）与椭圆交于 A,B 两点，线段 AB 的垂直平分线交 y 轴于点 $M(0, m)$，求实数 m 的取值范围.

20. (本小题 13 分)

设函数 $f(x)=x^3+c$，$g(x)=8x^2-20x$，方程 $f(x)=g(x)$ 有三个不同实根 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(II) 求 c 的取值范围;

(III) 求证: $x_1+x_2>4$.

昌平区 2018 年高三年级第二次统一练习

数学试卷(文科)参考答案

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	C	C	A	A	B	C

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. $(1,-1)$　　10. $(0,3)$　　11. $\frac{5\pi}{12}$(或75°)

12. $-1,-2,-3$　　13. $\frac{4}{5}$；3　　14. $\frac{1}{e}$；$a<1$

三、解答题(共 6 小题，共 80 分)

15. (共 13 分)

解：(I) $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-2x)+\sqrt{3}\sin 2x$

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π.　　--------------------8 分

(II) 因为 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，所以 $0\le 2x\le\pi$，

所以 $\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$，

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2$.

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=-1$.　　--------------------13 分

16. (共 13 分)

解：(Ⅰ) 因为 $b_na_{n+1}+a_{n+1}=na_n$，

所以 $b_1a_2+a_2=a_1$.

又因为 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，

所以 $b_1=1$.

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式是 $b_n=2n-1$.　　--------------------7 分

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $b_n=2n-1$，且 $b_na_{n+1}+a_{n+1}=na_n$.

所以 $(2n-1)a_{n+1}+a_{n+1}=na_n$，

得到 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$.

所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

那么数列$\{a_n\}$前n项和$S_n=\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-2^{1-n}$. --------------------13 分

17. (共 13 分)

解：(Ⅰ) 从 A 地区选出的 20 天中随机选出一天，这一天空气质量状况“优良”的频率为$(0.008+0.007)\times 50=0.75$，估计 A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的频率为0.75，A 地区当年（365 天）的空气质量状况“优良”的天数约为$365\times 0.75\approx 274$天 .

--------------------4 分

(Ⅱ) A 地 20 天中空气质量指数在$[150,200)$内，为$20\times 0.003\times 50=3$个，设为$a_1,a_2,a_3$，

空气质量指数在$[200,250)$内，为$20\times 0.001\times 50=1$个，设为$a_4$，

B 地 20 天中空气质量指数在$[150,200)$内，为$20\times 0.002\times 50=2$个，设为$b_1,b_2$，

空气质量指数在$[200,250)$内，为$20\times 0.003\times 50=3$个，设为$b_3,b_4,b_5$，

设“A，B 两地区的空气质量等级均为“重度污染””为C，

则基本事件空间

$\Omega=\{a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_1b_4,a_1b_5,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,a_2b_4,a_2b_5,a_3b_1,a_3b_2,a_3b_3,a_3b_4,a_3b_5,a_4b_1,a_4b_2,a_4b_3,a_4b_4,a_4b_5\}$

，基本事件个数为$n=20$，$C=\{a_4b_3,a_4b_4,a_4b_5\}$，包含基本事件个数为$m=3$，

所以 A，B 两地区的空气质量等级均为“重度污染”的概率为$P(C)=\frac{3}{20}$.

--------------------13 分

18.（共 14 分）

证明：(I) 因为正方形 *ABCD*,所以 $AC \perp BD$.

又因为平面 *ABEF*$\perp$平面 *ABCD*, 平面 *ABEF*$\cap$ 平面 *ABCD*=*AB*, $AB \perp BE$， $BE \subset$平面 *ABEF*,

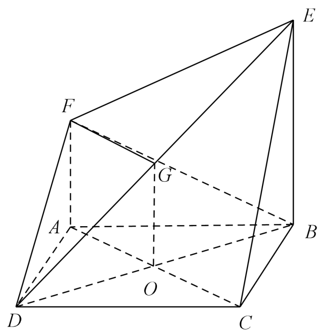
所以 $BE \perp$平面 *ABCD*.

又因为 $AC \subset$平面 *ABCD*.

故 $BE \perp$ *AC*. 又因为 $BE \cap BD = B$，

所以 $AC \perp$平面 BDE. ---------------------5 分

(II) 取 *DE* 的中点 *G*，连结 *OG*,*FG*,



因为四边形 *ABCD* 为正方形，所以 *O* 为 *BD* 的中点.

则 *OG*//*BE*，且 $OG = \frac{1}{2}BE$.

由已知 *AF*//*BE*，且 $AF = \frac{1}{2}BE$，则 $AF//OG$ 且 $AF = OG$，

所以四边形 *AOGF* 为平行四边形，所以 *AO*//*FG*,

即 *AC*//*FG*.

因为 $AC \not\subset$平面 DEF， $FG \subset$平面 DEF，

所以 *AC*//平面 *DEF*. ---------------------10 分

(III) 因为平面 $ABCD \perp$平面 $ABEF$，四边形 $ABCD$ 是正方形，

平面 *ABEF*$\cap$ 平面 *ABCD*=*AB*,

所以 $AD//BC, AD \perp AB$.

由 (I) 知，$BE \perp$平面 *ABCD*， $AD \subset$平面 $ABCD$

所以 $BE \perp AD$

所以 $AD \perp$ 平面 *BEF*.

所以 $V_{D-BEF} = \frac{1}{3} \times S_{\Delta BEF} \times AD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times BE \times AB \times AD = \frac{4}{3}$． --------------------14 分

19.(共 14 分)

解：（Ⅰ）由题意，得 $\begin{cases} b = 1 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$， 解得 $\begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases}$．

所以椭圆 *E* 的标准方程是 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$． -------------------5 分

(II)（1）当直线 AB $\perp x$ 轴时，$m = 0$ 符合题意.

（2）当直线 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y = k(x-1)$，

由 $\begin{cases} y = k(x-1) \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2(k^2-1) = 0$，

由 $\Delta = (-4k^2)^2 - 8(1+2k^2)(k^2-1) > 0$，得 $k \in \mathbf{R}$.

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1 \cdot x_2 = \frac{2(k^2-1)}{1+2k^2}$．

所以 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 - 2) = \frac{-2k}{1+2k^2}$，

所以线段 *AB* 中点 *C* 的坐标为 $\left(\frac{2k^2}{1+2k^2}, \frac{-k}{1+2k^2}\right)$．

由题意可知，$k\neq 0$，故直线 MC 的方程为 $y+\frac{k}{1+2k^2}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{2k^2}{1+2k^2}\right)$，

令 $x=0$， $y=\frac{k}{1+2k^2}$，即 $m=\frac{k}{1+2k^2}$

当 $k>0$ 时，，得 $0<m=\frac{k}{1+2k^2}=\frac{1}{\frac{1}{k}+2k}\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 “=” 成立.

同理，当 $k<0$ 时，$0>m=\frac{k}{1+2k^2}=\frac{1}{\frac{1}{k}+2k}\geq-\frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 “=” 成立.

综上所述，实数 m 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$. --------------------14 分

20. (共 13 分)

解：（Ⅰ） $f'(x)=3x^2$， $f'(1)=3$，又 $f(1)=c+1$，

则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为： $y=3x+c-2$. --------------------3 分

（Ⅱ）设 $h(x)=x^3-8x^2+20x+c$， $h'(x)=3x^2-16x+20$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=2$, 或 $x=\frac{10}{3}$

当 x 变化时， $h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,\frac{10}{3})$	$\frac{10}{3}$	$(\frac{10}{3},+\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	$c+16$	↘	$c+\frac{400}{27}$	↗

所以，当 $c+16>0$, 且 $c+\frac{400}{27}<0$ 时，

因为 $h(0)=c<0, h(4)=16+c>0$，故存在 $x_1\in(0,2)$， $x_2\in(2,\frac{10}{3})$， $x_3\in(\frac{10}{3},4)$，使得

$h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=0$

由 $h(x)$ 的单调性知，当且仅当 $c\in(-16,-\frac{400}{27})$ 时，函数 $h(x)$ 有三个不同的零点，

即当且仅当 $c\in(-16,-\frac{400}{27})$ 时，方程 $f(x)=g(x)$ 有三个不同实根. --------------------9 分

(III) 由（Ⅱ）知 $x_1\in(0,2)$，$x_2\in(2,\frac{10}{3})$，$4-x_2\in(\frac{2}{3},2)\subseteq(0,2)$，$h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，

则 $x_1+x_2>4\Leftrightarrow 4-x_2<x_1$

$\Leftrightarrow h(4-x_2)<h(x_1)=h(x_2)=0$

$\Leftrightarrow u(x_2)=h(x_2)-h(4-x_2)>0$，$x_2\in(2,\frac{10}{3})$，

由 $h(4-x_2)=(4-x_2)^3-8(4-x_2)^2+20(4-x_2)+c=-x_2^{\ 3}+4x_2^{\ 2}-4x_2+c+16$，

$u(x_2)=h(x_2)-h(4-x_2)=(x_2^{\ 3}-8x_2^{\ 2}+20x_2+c)-(-x_2^{\ 3}+4x_2^{\ 2}-4x_2+c+16)$

$=2(x_2^{\ 3}-6x_2^{\ 2}+12x_2-8)$

设 $u(x)=2x^3-12x^2+24x-16$，则 $u'(x)=6(x-2)^2$

所以当 $x\in(2,\frac{10}{3})$ 时，$u'(x)>0$，即 $u(x)$ 在 $(2,\frac{10}{3})$ 上单调递增，而 $u(2)=0$

所以当 $x\in(2,\frac{10}{3})$ 时，$u(x)>u(2)=0$，所以 $u(x_2)>0$，$x_2\in(2,\frac{10}{3})$

所以 $x_1+x_2>4$. --------------------13 分