2019年秋“荆、荆、襄、宜四地七校考试联盟”
高三10月联考
理科数学试题

命题学校：荆州中学　　命题人：李晓芳　　审题人：荣培元　高抒志

本试卷共4页，23题（含选考题）。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：（本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将正确的答案填涂在答题卡上。）

1. 设集合 $A=\{y|y=3^x,x\in R\}$，$B=\{x|y=\sqrt{1-2x},x\in R\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$　　B. $(0,1)$　　C. $(0,\frac{1}{2})$　　D. $(0,\frac{1}{2}]$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases}3^x-2,x>0\\x+\log_3 6,x\le 0\end{cases}$ 的零点之和为（　）

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

3. 若 $a=\ln 2$，$b=5^{-\frac{1}{2}}$，$c=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$，则 a,b,c 的大小关系（　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

4. 下列四个结论：①若点 $P(a,2a)(a\ne 0)$ 为角 α 终边上一点，则 $\sin\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{5}$；

②命题“存在 $x_0\in R,x_0^2-x_0>0$”的否定是“对于任意的 $x\in R$，$x^2-x\le 0$；

③若函数 $f(x)$ 在 $(2019,2020)$ 上有零点，则 $f(2019)\cdot f(2020)<0$；

④“$\log_a b>0$（$a>0$ 且 $a\ne 1$）”是“$a>1,b>1$”的必要不充分条件.

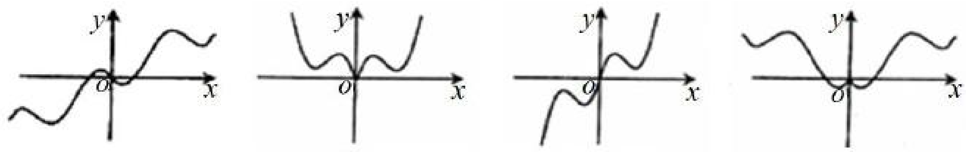
其中正确结论的个数是（　）

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

5. 已知 $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=2\cos(\pi+\alpha)$，且 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，则 $\tan\beta$ 的值为（　）

A. -7　　B. 7　　C. 1　　D. -1

6. 已知 $f(x)=(\frac{1}{2}x-\sin x)\cdot\frac{2^x-1}{2^x+1}$，则函数 $y=f(x)$ 的图象大致为（　）



A　　B　　C　　D

7. 若函数 $f(x)=(m+3)x^{a}$ $(m,a\in R)$ 是幂函数，且其图像过点 $(2,\sqrt{2})$，则函数 $g(x)=\log_a(x^2+mx-3)$ 的单调递增区间为（　　）

A. $(-\infty,-1)$　　*B.* $(-\infty,1)$　　*C.* $(1,+\infty)$　　*D.* $(3,+\infty)$

8. 将函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$，再把所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的是（　　）

A. 函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{3},0)$ 对称；　*B.* 函数 $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$；

C. 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称；　*D.* 函数 $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增

9. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足对任意 $x\in R$ 都有 $f(1+x)+f(1-x)=0$ 成立，且函数 $f(x+1)$ 的图像关于直线 $x=-1$ 对称，则 $f(2019)=$（　　）

A. 0　　*B.* 2　　*C.* -2　　*D.* -1

10. 已知函数 $f(x)=e^{x}(\sin x-a)$ 有极值，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(-1,1)$　　*B.* $[-1,1]$　　*C.* $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　*D.* $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

11. 设函数 $f(x)=x^2+2\cos x, x\in[-1,1]$，则不等式 $f(x-1)>f(2x)$ 的解集为（　　）

A. $(-\frac{1}{3},1)$　　*B.* $[0,\frac{1}{3})$　　*C.* $(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$　　*D.* $[0,\frac{1}{2}]$

12. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，若函数 $f(x)$ 满足：$(x-1)[f'(x)-f(x)]<0$，$f(2-x)=f(x)e^{2-2x}$，则下列判断一定正确的是（　　）

A. $f(1)<ef(0)$　　*B.* $ef(1)<f(2)$　　*C.* $e^3f(0)>f(3)$　　*D.* $e^5f(-1)<f(4)$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 设函数 $f(x)=x\ln x+2x^3$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是__________.

14．已知函数 $f(x)=ax^3+\log_2(x+\sqrt{x^2+1})+1\ (a\in R)$ 且 $f(1)=-3$，则 $f(-1)=$__________.

15．在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，且满足 $b\sin C=a$，$a^2+c^2-b^2=\frac{8}{5}ac$，则 $\tan C=$___________.

16．若函数 $f(x)=e^x-\frac{k}{2}x^2+kx$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，则实数 k 的取值范围是___________.

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

在 ΔABC 中，设内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\frac{2a-c}{b}=\frac{\cos C}{\cos B}$.

（I）求角 B 的大小；

（II）求 $\sqrt{3}\cos^2\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

湖北省第二届（荆州）园林博览会于2019年9月28日至11月28日在荆州园博园举办，本届园林博览会以“辉煌荆楚，生态园博”为主题，展示荆州生态之美，文化之韵，吸引更多优秀企业来荆投资，从而促进荆州经济快速发展.在此次博览会期间，某公司带来了一种智能设备供采购商洽谈采购，并决定大量投放荆州市场.

已知该种设备年固定研发成本为50万元，每生产一台需另投入80元，设该公司一年内生产该设备 x 万台且全部售完，每万台的销售收入 $G(x)$（万元）与年产量 x（万台）满足如下关系式：

$$G(x)=\begin{cases}180-2x,0<x\le 20\\ 70+\dfrac{2000}{x}-\dfrac{9000}{x(x+1)},x>20\end{cases}$$

（I）写出年利润 $W(x)$（万元）关于年产量 x（万台）的函数解析式；（利润=销售收入-成本）

（II）当年产量为多少万台时，该公司获得的年利润最大？并求最大利润.

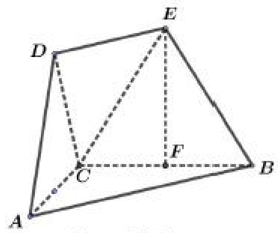
19.（本小题满分12分）

已知在多面体 $ABCDE$ 中，$DE\,//\,AB$，$AC\perp BC$，$BC=2AC=4$，$AB=2DE$，$DA=DC$ 且平面 $DAC\perp$ 平面 ABC.

（I）设点 F 为线段 BC 的中点，试证明 $EF\perp$ 平面 ABC；

（II）若直线 BE 与平面 ABC 所成的角为 60°，

求二面角 $B-AD-C$ 的余弦值.



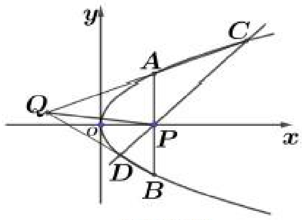
第 19 题图

20.（本小题满分 12 分）

如图，过点 $P(2,0)$ 作两条直线 $x=2$ 和 $l:x=my+2(m>0)$ 分别交抛物线 $y^2=2x$ 于 A,B 和 C,D（其中 A,C 位于 x 轴上方），直线 AC,BD 交于点 Q.

（I）试求 C,D 两点的纵坐标之积，并证明：点 Q 在定直线 $x=-2$ 上；

（II）若 $\lambda=\dfrac{S_{\Delta PQC}}{S_{\Delta PBD}}$，求 λ 的最小值.



第 20 题图

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a(\sin x-x\cos x)-\dfrac{1}{2}x(a\in R)$，$g(x)=f'(x)$（$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数），$g(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\dfrac{\pi-1}{2}$.

（I）求实数 a 的值；

（II）判断函数 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的极值点个数，并加以证明.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：极坐标和参数方程选讲

在直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.若曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta-4\sin\theta=0$，$P$ 点的极坐标为 $(3,\dfrac{\pi}{2})$，在平面直角坐标系中，直线 l 经过点 P，且倾斜角为 60^0.

（I）写出曲线 C 的直角坐标方程以及点 P 的直角坐标；

（II）设直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点，求 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-5|$，$g(x)=5-|2x-3|$.

（I）解不等式 $f(x)<g(x)$；

（II）若存在 $x\in R$ 使不等式 $2f(x)-g(x)\le a$ 成立，求实数 a 的取值范围.

2019年秋"荆、荆、襄、宜四地七校考试联盟"

高三10月联考理科数学参考答案

一、选择题：

向下还原

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	D	C	B	D	A	D	A	D	B	C

二、填空题

13. $7x-y-5=0$　　14. 5　　15. -3　　16. $[-1,e^2]$

三、解答题：

17. 解：（1）由 $\frac{2a-c}{b}=\frac{\cos C}{\cos B}$ 得到 $\frac{2\sin A-\sin C}{\sin B}=\frac{\cos C}{\cos B}$

即 $2\sin A\cos B=\sin(B+C)$，即 $2\sin A\cos B=\sin A$

又∵ A 为三角形内角，∴ $\sin A\neq 0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，从而 $B=\frac{\pi}{3}$.　　----------------------5分

（2）$\sqrt{3}\cos^2\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos C+1)-\frac{1}{2}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi}{3}-C)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos C-\frac{1}{4}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cos(C+\frac{\pi}{6})+\frac{\sqrt{3}}{2}$　　--------- 8分

$\because 0<C<\frac{2\pi}{3}$　$\therefore \frac{\pi}{6}<C+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，　　-- 9分

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos(C+\frac{\pi}{6})<\frac{\sqrt{3}}{2}$　所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}<\frac{1}{2}\cos(C+\frac{\pi}{6})+\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{3\sqrt{3}}{4}$.　　--------------- 11分

所以 $\sqrt{3}\cos^2\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ 的取值范围为 $(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4})$.　　-----------------12分

18. 解：（Ⅰ）$W(x)=xG(x)-80x-50=\begin{cases}-2x^2+100x-50, 0<x\le 20,\\ -10x-\frac{9000}{x+1}+1950, x>20,\end{cases}$，　　-----------------4分

（Ⅱ）当 $0<x\le 20$ 时 $W(x)=-2x^2+100x-50=-2(x-25)^2+1200$，

$\therefore W(x)_{\max}=W(20)=1150$.　　-----------------------7分

当 $x>20$ 时 $W(x)=-10(x+1+\frac{900}{x+1})+1960\le -10\times 2\sqrt{(x+1)\times\frac{900}{x+1}}+1960=1360$

当且仅当 $x+1=\frac{900}{x+1}$ 即 $x=29$ 时等号成立，$\therefore W(x)_{\max}=W(29)=1360$. -----------11 分

$\because 1360>1150$，

$\therefore$ 当年产量为 29 万台时，该公司获得的利润最大为 1360 万元. -------------------12 分

19．（Ⅰ）**证明**：取 AC 的中点 O，连接 EF,OF.

$\because$ 在 ΔDAC 中 $DA=DC$，$\therefore DO\perp AC$.

$\therefore$ 由平面 $DAC\perp$ 平面 ABC，且交线为 AC 得 $DO\perp$ 平面 ABC. ------------------------------2分

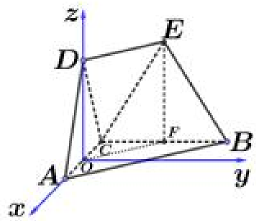
$\because O,F$ 分别为 AC,BC 的中点，$\therefore OF\,//\,AB$，且 $AB=2OF$.

又 $DE\,//\,AB$，$AB=2DE$，$\therefore OF\,//\,DE$，且 $OF=DE$.

$\therefore$ 四边形 $DEFO$ 为平行四边形. $\therefore EF\,//\,DO$

$\therefore EF\perp$ 平面 ABC. --6 分

（Ⅱ）**解**：$\because DO\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$



$\therefore$ 以 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，过点 O 与 CB 平行的直线为 y 轴，OD 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系. 则 $A(1,0,0)$，$C(-1,0,0)$，$B(-1,4,0)$. ---7 分

$\because EF\perp$ 平面 ABC，$\therefore$ 直线 BE 与平面 ABC 所成的角为 $\angle EBF=60^\circ$.

$\therefore DO=EF=BF\tan 60^\circ=2\sqrt{3}$. $\therefore D(0,0,2\sqrt{3})$. ------------------8 分

可取平面 ADC 的法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$，------------------------9 分

设平面 ADB 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,4,0)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,2\sqrt{3})$，

则 $\begin{cases}-2x+4y=0\\-x+2\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取 $z=1$，则 $x=2\sqrt{3},y=\sqrt{3}$. $\therefore \vec{n}=(2\sqrt{3},\sqrt{3},1)$，---------------------11 分

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore$ 二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$. ----------------------12 分

20.解：（Ⅰ）将直线 l 的方程 $x=my+2$ 代入抛物线 $y^2=2x$ 得：$y^2-2my-4=0$.

设点 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$ 则 $y_1y_2=-4$. --------------------------2 分

由题得 $A(2,2),B(2,-2)$，直线 AC 的方程为 $y-2=\frac{2}{y_1+2}(x-2)$，

直线 BD 的方程为 $y+2=\dfrac{2}{y_2-2}(x-2)$，消去 y 得 $x=\dfrac{2(y_1y_2-y_1+y_2)}{y_1-y_2+4}$，

将 $y_1y_2=-4$ 代入上式得 $x=-2$，故点 Q 在直线 $x=-2$ 上. ----------------6 分

（Ⅱ）$\because S_{\Delta PQC}=\dfrac{1}{2}|AP|(x_1+2)=x_1+2$，$S_{\Delta PBD}=\dfrac{1}{2}|BP|(2-x_2)=2-x_2$， ----------7 分

又 $x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2}\cdot\dfrac{y_2^2}{2}=\dfrac{16}{4}=4$，$\therefore \lambda=\dfrac{S_{\Delta PQC}}{S_{\Delta PBD}}=\dfrac{x_1+2}{2-x_2}=\dfrac{x_1+2}{2-\dfrac{4}{x_1}}=\dfrac{x_1(x_1+2)}{2(x_1-2)}$. ---------------9 分

令 $t=x_1-2,(t>0)$ 则 $\lambda=\dfrac{(t+2)(t+4)}{2t}=\dfrac{t}{2}+\dfrac{4}{t}+3\geq 2\sqrt{2}+3$，

当且仅当 $t=2\sqrt{2}$ 即 $x_1=2+2\sqrt{2}$ 时 λ 取到最小值 $2\sqrt{2}+3$. --------------12 分

21．解：（Ⅰ）$g(x)=f'(x)=ax\sin x-\dfrac{1}{2}$，　$g'(x)=a(\sin x+x\cos x)$. ----------1 分

当 $a=0$ 时 $g(x)=-\dfrac{1}{2}$，不合题意，舍去.

当 $a<0$ 时 $g'(x)<0$ $\therefore$ $g(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递减，$\therefore g_{\max}(x)=g(0)=-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{\pi-1}{2}$，不合题意，舍去.

当 $a>0$ 时 $g'(x)>0$ $\therefore$ $g(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增，$\therefore g_{\max}(x)=g(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{a\pi}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi-1}{2}$，解得 $a=1$

$\therefore$ 综上：$a=1$ --5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $g(x)=x\sin x-\dfrac{1}{2}$，$g'(x)=\sin x+x\cos x$

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递增，$g(0)=-\dfrac{1}{2}<0$，$g(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上有且仅有一个变号零点； -------------------------------------7 分

当 $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时，$g''(x)=2\cos x-x\sin x<0$，$\therefore$ $g'(x)$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减. -------------8 分

又 $g'(\dfrac{\pi}{2})=1>0, g'(\pi)=-\pi<0$

$\therefore \exists x_0\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 使 $g'(x_0)=0$ 且当 $x\in(\dfrac{\pi}{2},x_0)$ 时 $g'(x)>0$，当 $x\in(x_0,\pi)$ 时 $g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,π) 上单调递减. ----------------------10 分

又 $g(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}>0$，$g(x_0)>g(\frac{\pi}{2})>0$，$g(\pi)=-\frac{1}{2}<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上有且仅有一个变号零点.

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 和 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上各有一个变号零点，$\therefore f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上共有两个极值点. -------------12 分

22.解：（Ⅰ）曲线 C 的极坐标方程化为直角坐标方程为 $x^2=4y$， ----------------------------2 分

P 点的极坐标为：$P\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$，化为直角坐标为 $P(0,3)$ -------------------------3 分

（Ⅱ）直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\frac{\pi}{3},\\ y=3+t\sin\frac{\pi}{3},\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t,\\ y=3+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\end{cases}$ （t 为参数） ---------------5 分

将 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程，得 $\frac{1}{4}t^2=12+2\sqrt{3}t$，

整理得：$t^2-8\sqrt{3}t-48=0$，

显然有 $\Delta>0$，则 $t_1\cdot t_2=-48, t_1+t_2=8\sqrt{3}$， ---7 分

将 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程，得 $\frac{1}{4}t^2=12+2\sqrt{3}t$，

整理得：$t^2-8\sqrt{3}t-48=0$，

显然有 $\Delta>0$，则 $t_1\cdot t_2=-48, t_1+t_2=8\sqrt{3}$， ---7 分

$|PA|\cdot|PB|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1\cdot t_2|=48, |PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=8\sqrt{6}$，

所以 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|PA|+|PB|}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. ----------------10 分

23.解：（Ⅰ）原不等式即 $|x-5|+|2x-3|<5$，

$\therefore \begin{cases}x\ge 5\\ x-5+2x-3<5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{3}{2}\le x<5\\ 5-x+2x-3<5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<\frac{3}{2}\\ 5-x+3-2x<5\end{cases}$，

所以 x 无解或 $\frac{3}{2}\le x<3$ 或 $1<x<\frac{3}{2}$，即 $1<x<3$，

$\therefore$ 原不等式的解集为 $(1,3)$. -- 5 分

（Ⅱ）若存在 $x\in R$ 使不等式 $2f(x)-g(x)\le a$ 成立，则 $2f(x)-g(x)$ 的最小值小于或等于 a

$2f(x)-g(x)=2|x-5|-5+|2x-3|=|2x-10|+|2x-3|-5\ge|2x-10-(2x-3)|-5=2$.

当且仅当 $x\in[\frac{3}{2},5]$ 时取等号，$\therefore 2f(x)-g(x)$ 的最小值为 2.

$\therefore a\ge 2$. -- 10 分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 20 万+。

北京高考在线_2020 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao