2021 年全国高中数学联赛浙江赛区初赛试题

（说明：所有题目的答案填写在答题纸上。）

一、填空题（每题 4 分，共 40 分）

1. 已知单位向量 $\vec{a},\vec{b}$，则 $|\vec{a}-2\vec{b}|$ 的取值范围为________________。

2. 计算 $\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ=$__________。

3. 设复数 $z=x+yi$ 的实虚部 x,y 所形成的点 (x,y) 在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 上。若 $\frac{z-1-i}{z-i}$ 为实数，则复数 $z=$__________。

4. 对于正整数 n，若 $(xy-5x+3y-15)^n$ 展开式经同类项合并，$x^iy^j(i,j=0,1,\cdots,n)$ 合并后至少有 2021 项，则 n 的最小值为________________。

1. $|\vec{a}-2\vec{b}|\le|\vec{a}|+2|\vec{b}|=3$

$|\vec{a}-2\vec{b}|\ge\big||\vec{a}|-2|\vec{b}|\big|=1$

2. $\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ$

$=\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ-2\sin 20^\circ\sin 40^\circ\cos 120^\circ$

$=\sin^2 120^\circ=\frac{3}{4}$

3. $\frac{z-1-i}{z-i}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)R_0\in R$

$\therefore \alpha=0$ 或 π.

直线方程: $y=1$, $\therefore x=\sqrt{9\times\frac{15}{16}}=\frac{3}{4}\sqrt{15}$

$\therefore z=\frac{3}{4}\sqrt{15}+i$ 或 $-\frac{3}{4}\sqrt{15}+i$

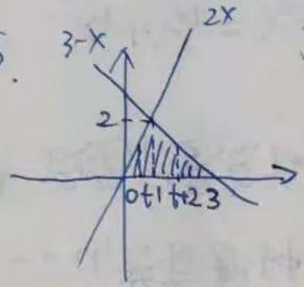
5. 设直角坐标平面上两个区域为 $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le \min(2x,3-x)\}$，$N=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid t\le x\le t+2\}$，记 M 与 N 的公共部分面积为 $f(t)$。当 $0\le t\le 1$ 时，则 $f(t)$ 的表达式为____________。

6. 设 $a_0=0,a_1=a_2=1,a_{3n}=a_n,a_{3n+1}=a_{3n+2}=a_n+1(n\ge 1)$，则 $a_{2021}=$__________。

7. 给定实数集合 A,B，定义运算 $A\otimes B=\{x \mid x=ab+a+b,a\in A,b\in B\}$。设 $A=\{0,2,4,\cdots,18\},B=\{98,99,100\}$，则 $A\otimes B$ 中的所有元素之和为__________。

8. 在 ΔABC 中，$\angle B=\angle C=30^\circ,BC=2\sqrt{3}$，$P,Q$ 分别在线段 AB 和 AC 上，$AP=1,AQ=\sqrt{2}$，直线 $AD\perp BC$ 于 D。现将三角形 ΔABC 沿着 AD 对折，当平面 ADB 与平面 ADC 的二面角为 60° 时，则线段 PQ 的长度为________________。

5.



$f(t)=\frac{(2+2t)(1-t)}{2}+\frac{(2+1-t)(t+1)}{2}$

$=1-t^2+\frac{(3-t)(1+t)}{2}$

$=-\frac{3}{2}t^2+t+\frac{5}{2}$

6. $a_0=0\ \ a_1=a_2=1,\ \ a_3=a_1=1$

$a_4=a_5=a_1+1=2,\ \ a_6=a_2=1$

$a_7=a_8=a_2+1=2,\ \ a_9=a_3=1$

$a_{10}=a_{11}=a_3+1=2,$

$a_{2021}=a_{673}+1=a_{224}+2=a_{74}+3$

$=a_{24}+4$

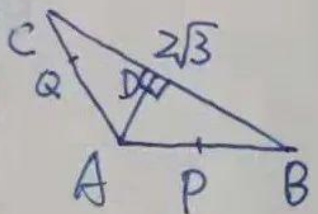
$=a_8+4=6$

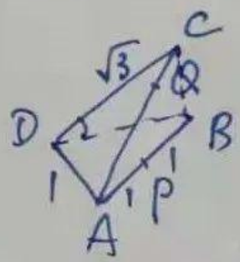
7. 对 $b\in B$ 则 和为 $10b+\Sigma a\cdot b+\Sigma a$.

$\therefore 10b+(b+1)\cdot 180\cdot\frac{1}{2}=100b+90$

$\therefore$ 总和为 $100\times 99\times 3+90\times 3=29970$

8.





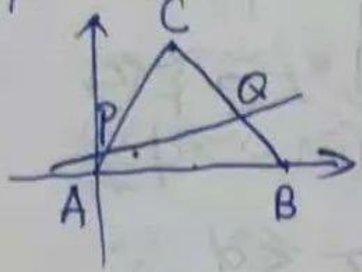
$BC=\sqrt{3}$ $\therefore \cos CAB=\frac{4+4-3}{2\times 2\times 2}=\frac{5}{8}$

$\therefore PQ=\sqrt{1+2-2\sqrt{2}\times\frac{5}{8}}=\sqrt{3-\frac{5}{4}\sqrt{2}}$

9. 已知 ΔABC 三个顶点的坐标为 $A(0,0),B(7,0),C(3,4)$，过点 $(6-2\sqrt{2},3-\sqrt{2})$ 的直线分别与线段 AC,BC 交于 P,Q。若 $S_{\Delta PQC}=\frac{14}{3}$，则 $|CP|+|CQ|=$________________。

10. 设数列 $a_{n+1}=[\frac{a_n}{2}]+[\frac{a_n}{3}],n=1,2,\cdots,7$，这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。若 $a_8=8$，则正整数 a_1 有________________种可能的取值情况。

9.



l_{PQ}: $y=k(x-6+2\sqrt{2})+3-\sqrt{2}$

l_{AC}: $y=\frac{4}{3}x$

l_{BC}: $y=7-x$

$\because AC=5\quad AB=7,\ BC=4\sqrt{2}$

(1) $\therefore \cos C=\frac{32+25-49}{2\times5\times4\sqrt{2}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\frac{1}{50}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$

$\frac{4}{3}x=kx+3-\sqrt{2}-k(6-2\sqrt{2})$

$x_P=\frac{(1-2k)(3-\sqrt{2})}{\frac{4}{3}-k}$

$7-x=kx+3-\sqrt{2}-k(6-2\sqrt{2})$

$x_Q=\frac{4+\sqrt{2}+k(6-2\sqrt{2})}{k+1}$

$CP=\frac{5}{3}(3-x_P)\quad CQ=\sqrt{2}(x_Q-3)$

$\therefore \frac{5}{3}\sqrt{2}(3-x_P)(x_Q-3)\frac{7}{10\sqrt{2}}=\frac{14}{3}$

即 $(3-x_P)(x_Q-3)=4$

$\because 3-x_P=\frac{3T}{4-3k},\quad x_Q-3=\frac{T}{k+1}$

其中 $T=4-x_0+(2x_0-3)k\quad x_0=3-\sqrt{2}$

$\therefore T^2=\frac{4}{3}(4-3k)(k+1)$

而 $CP+CQ=\frac{5T}{4-3k}+\frac{\sqrt{2}T}{k+1}$

$$=T\frac{5k+5+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}k}{(4-3k)(k+1)}$$

$$=\frac{T}{(4-3k)(k+1)}\left(4\sqrt{2}+5+(5-3\sqrt{2})k\right)$$

因 $T=4-x_0+(2x_0-3)k=1+\sqrt{2}+(3-2\sqrt{2})k$

又 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+3)=5+4\sqrt{2}$，$(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}+3)=5-3\sqrt{2}$

∴ $CP+CQ=\frac{T}{(4-3k)(k+1)}(\sqrt{2}+3)\left(\sqrt{2}+1+(3-2\sqrt{2})k\right)$

$$=\frac{(\sqrt{2}+3)T^2}{(4-3k)(k+1)}=\frac{4}{3}(\sqrt{2}+3)$$

10. 设 $a_n=6k,6k+1,6k+2,6k+3,6k+4,6k+5$，

则 $a_{n+1}=5k,5k,5k+1,5k+2,5k+3,5k+3$

∵ $a_8=8$，∴ $k_7=1$，$a_7=10,11$

∴ $k_6=2$　$a_6=12$ 或 13 或 14

∴ $k_5=2$，$a_5=15$，或 16 或 17.

∴ $k_4=3$，$a_4=18,19,20,21$

∴ $k_3=3,4$，$a_3=22,24,25,26,23$

∴ $k_2=4,5$，$a_2=27,30,31,32,28,29$

∴ $k_1=5,6$，$a_1=33,36,37,38,39,34,35$

∴ a_1 共有 7 种

二、解答题（共 5 题，11-13 各 10 分，14、15 各 15 分，合计 60 分）

11. 已知二次函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbb{R})$ 有两个不同的零点。若 $f(x^2+2x-1)=0$ 有四个不同的根 $x_1<x_2<x_3<x_4$，且 x_1,x_2,x_3,x_4 成等差数列，求 $a-b$ 的取值范围。

12. 设 C 为椭圆 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左焦点，直线 $y=kx+1$ 与椭圆交于 A,B 两点。

（1）求 $|CA|+|CB|$ 的最大值；

（2）若直线 $y=kx+1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 M,N，且以 MN 为直径的圆与线段 MN 的垂直平分线的交点在椭圆内部（包括在边界上），求实数 k 的取值范围。

11. 设两个零点为 $p>q$. $\therefore x^2+2x-1-p=0$

或 $x^2+2x-1-q=0$

$\therefore x_1+x_4=x_2+x_3=-2$

$x_1x_4=-1-p,\quad x_2x_3=-1-q$

$\therefore a-b=-(p+q)-pq=1-(p+1)(q+1)$

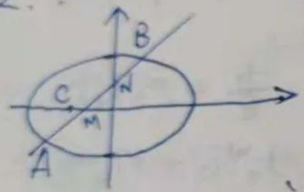
$=1-x_1x_2x_3x_4$

设 $x_2=-1-d\quad x_3=-1+d,\ x_1=-1-3d\quad x_4=-1+3d$

$\therefore a-b=1-(1-d^2)(1-9d^2)=-9d^4+10d^2\leq\frac{25}{9}$

$\therefore a-b\leq\frac{25}{9}$

12.



(1) $CA=(x_A+\frac{a^2}{c})e=ex_A+a$

∴ $CA+CB=e(x_A+x_B)+2a$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_A+x_B)+4\sqrt{2}$

∵ $x^2+2(k^2x^2+2kx+1)=8$

∴ $(1+2k^2)x^2+4kx-6=0$

∴ $x_A+x_B=\frac{-4k}{1+2k^2}\le\frac{-4k}{-2\sqrt{2}k}=\sqrt{2}$

∴ $CA+CB\le 4\sqrt{2}+1$

∴综

(2) $MN=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{|k|}$

$r=\frac{1}{2}MN=\frac{\sqrt{1+k^2}}{2|k|}$

若$k>0$，设中垂线与圆在二象限的交点为G，则 $G(-\frac{1}{2k}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{2k})$

∴ $(\frac{1}{2k}+\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2k})^2\le 8$

即 $3(k+1)^2\le 32k^2$

∴ $k\ge\frac{3+4\sqrt{6}}{29}$

若$k<0$ 则中垂线与圆在一象限的交点为P. 则 $P(-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{2k})$

∴ $(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k})^2+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2k})^2\le 8$

即 $3(k-1)^2\le 32k^2$

∴ $k\le\frac{-3-4\sqrt{6}}{29}$

∴综上 $k\ge\frac{3+4\sqrt{6}}{29}$ or $k\le-\frac{3+4\sqrt{6}}{29}$

13. 设 n 为给定的正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为满足对每个 $m\le n$ 都有 $\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{k}\right|\le 1$ 的一列实数，求 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|$ 的最大值。

14. 设数集 $P=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，它的平均数 $C_p=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}$。现将 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 分成两个非空且不相交子集 A,B，求 $\left|C_A-C_B\right|$ 的最大值，并讨论取到最大值时不同的有序数对 (A,B) 的数目。

15. 设 $x,y,z>0,\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$，证明 $\frac{x^4+y^2z^2}{x^{\frac{5}{2}}(y+z)}+\frac{y^4+z^2x^2}{y^{\frac{5}{2}}(z+x)}+\frac{z^4+y^2x^2}{z^{\frac{5}{2}}(y+x)}\ge 1$。

13. 设 n 为给定的正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为满足对每个 $m\le n$ 都有 $\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{k}\right|\le 1$ 的一列实数，求 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|$ 的最大值。

解 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|n\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{k}\right|\le n\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right|+\sum_{m=1}^{n-1}\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{k}\right|\le 2n-1$ ………………8 分

当 $a_1=1,a_n=-2n$ 取到最大值 $2n-1$。……………………………………………………10 分

另解

$\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|$

$=\left|n(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n})-(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1})-(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{n-2})-(a_1+\frac{a_2}{2})-a_1\right|$

$\le\left|n(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n})\right|+\left|a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}\right|+\cdots+\left|a_1\right|$

$\le n+n-1=2n-1$。（下略）……………………………………………………………………8 分

14. 设数集 $P=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，它的平均数 $C_p=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}$。现将 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 分成两个非空且不相交子集 A,B，求 $|C_A-C_B|$ 的最大值，并讨论取到最大值时不同的有序数对 (A,B) 的数目。

解 不妨设 $C_A>C_B$。

定义 $\min A=k$，若存在 $t>k,t\in B$，则将 t 与 k 进行调换，即可以令 t 在 A 中，k 在 B 中，从而 C_A 变大，C_B 减小。重复以上操作，即知存在正整数 $m\in P$ 使得

$A=\{n,n-1,\cdots,m+1\},B=\{m,m-1,\cdots,1\}$

所以得到$C_A=\dfrac{n+m+1}{2},C_B=\dfrac{m+1}{2}$， ……………………………………………5 分

所以$C_A-C_B=\dfrac{n}{2}$， 与m无关。

所以，$|C_A-C_B|$的最大值为$\dfrac{n}{2}$。 ……………………………………………………10 分

此时m的取值为$1,2,\cdots,n-1$，共$n-1$种情况。

同理考虑$C_A<C_B$的情况，也有$n-1$种情况。

所以，取到最大值的有序数对为$2n-2$。 ……………………………………………15 分

15. 设$x,y,z>0,\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$，证明$\dfrac{x^4+y^2z^2}{x^{\frac{5}{2}}(y+z)}+\dfrac{y^4+z^2x^2}{y^{\frac{5}{2}}(z+x)}+\dfrac{z^4+y^2x^2}{z^{\frac{5}{2}}(y+x)}\geq 1$。

证法 1 由柯西不等式

$$\sum\frac{x^4+y^2z^2}{x^{\frac{5}{2}}(y+z)}\sum\frac{(x^2+yz)^2x^{\frac{1}{2}}}{x^4+y^2z^2}>(\sum\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}})^2$$，而

$$\sum\frac{(x^2+yz)^2x^{\frac{1}{2}}}{x^4+y^2z^2}=\sum x^{\frac{1}{2}}+\sum\frac{2x^{\frac{5}{2}}yz}{x^4+y^2z^2}\leq\sum x^{\frac{1}{2}}+\sum\frac{2x^{\frac{5}{2}}yz}{2x^2yz}\leq 2\sum x^{\frac{1}{2}}=2$$ …………5 分

所以只需要证明

$$\sum\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}\geq\sqrt{2}\Leftrightarrow\sum\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\geq 1\Leftrightarrow\sum\frac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\geq 1-\sum\sqrt{\frac{x+y}{2}}$$

由平方平均值不等式

$$\sum\sqrt{\frac{x+y}{2}}\geq\sum\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}=1$$

所以只需要证明$\sum\dfrac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\geq 0$（※） ………………………………………………10 分

不妨设$x\geq y\geq z$,则有$\dfrac{(x-y)(x-z)}{\sqrt{2x^2(y+z)}}\geq 0$,

$$\frac{(y-x)(y-z)}{\sqrt{2y^2(x+z)}}+\frac{(z-x)(z-y)}{\sqrt{2z^2(x+y)}}=(y-z)(\frac{x-z}{\sqrt{2z^2(x+y)}}-\frac{x-y}{\sqrt{2y^2(x+z)}})\geq 0,$$

所以（※）成立。从而原不等式成立。 ……………………………………………………10 分

证法 2 用 x^2,y^2,z^2 代替 x,y,z，则条件就等价于 $x+y+z=1$，要证明的不等式就变为

$\frac{x^8+y^4z^4}{x^5(y^2+z^2)}+\frac{y^8+z^4x^4}{y^5(z^2+x^2)}+\frac{z^8+y^4x^4}{z^5(y^2+x^2)}\ge 1$，将其通分变为

$$\frac{\sum (x^8+y^4z^4)y^5z^5(z^2+x^2)(y^2+x^2)}{x^5y^5z^5(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}\ge 1=\sum x$$

$$\Leftrightarrow \sum(x^{10}y^5z^5(x^2+y^2+z^2)+x^2y^5z^5(x^2+y^2+z^2)+x^8y^7z^7+y^{11}z^{11})$$
$$\ge x^5y^5z^5(\sum x^4(y^2+z^2)+2x^2y^2z^2)(\sum x)$$

$$\Leftrightarrow (xyz)^5\sum x^2\sum x^5+(xyz)^2\sum x^2\sum y^7z^7+(xyz)^7\sum x+\sum y^{11}z^{11}$$
$$\ge (xyz)^5\sum x^5(y^2+z^2)+(xyz)^5\sum x^4(y^3+z^3)+(xyz)^6\sum x^3(y+z)+2(xyz)^7\sum x$$

$$\Leftrightarrow (xyz)^5\sum x^7+(xyz)^2\sum x^2\sum y^7z^7+\sum y^{11}z^{11}$$
$$\ge (xyz)^5\sum x^4(y^3+z^3)+(xyz)^6\sum x^3(y+z)+(xyz)^7\sum x$$
……………………………………5 分

由舒尔不等式 $\sum x(x^3-y^3)(x^3-z^3)\ge 0\Leftrightarrow \sum x^7-\sum x^4(y^3+z^3)+xyz\sum y^2z^2\ge 0$

所以，只需要证明

$$\Leftrightarrow (xyz)^2\sum x^9(y^7+z^7)+(xyz)^4\sum x^5y^5+\sum x^{11}y^{11}$$
$$\ge (xyz)^6\sum x^2y^2+(xyz)^6\sum x^3(y+z)+(xyz)^7\sum x$$
…………（※）…………………10 分

由均值不等式 $2x^5y^5+y^5z^5+2z^5x^5\ge 5x^4y^3z^3$

类似的三式相加 $\sum x^5y^5\ge (xyz)^3\sum x\Rightarrow (xyz)^4\sum x^5y^5\ge (xyz)^7\sum x$ （1）

又由均值不等式 $5x^{11}y^{11}+3y^{11}z^{11}+3z^{11}x^{11}\ge 11x^8y^8z^6$

类似的三个不等式相加 $\sum x^{11}y^{11}\ge (xyz)^6\sum x^2y^2$ （2）

由均值不等式 $\begin{aligned}&7x^9(y^7+z^7)+3y^9(z^7+x^7)+z^9(x^7+y^7)\ge 11(xyz)^4x^3z\\&7x^9(y^7+z^7)+y^9(z^7+x^7)+3z^9(x^7+y^7)\ge 11(xyz)^4x^3y\end{aligned}$

类似的六式相加 $\begin{aligned}&\sum x^9(y^7+z^7)\ge (xyz)^4\sum x^3(y+z)\\&\Leftrightarrow (xyz)^2\sum x^9(y^7+z^7)\ge (xyz)^6\sum x^3(y+z)\end{aligned}$ （3）

（1）（2）（3）相加即得（※）……………………………………………………………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。