人大附中 2020~2021 学年度第一学期高二年级数学阶段检测

2020 年 9 月 25 日

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置）

1.已知 i 是虚数单位，复数 $z=(i+a)i$，且 $z=\overline{z}$，那么实数 a 的值为（　　）

A.-1　　B.0　　C.1　　D.2

2.已知 i 是虚数单位，复数 $\dfrac{1-2i}{1-i}$ 的虚部为（　　）.

A.$-\dfrac{1}{2}$　　B.$\dfrac{3}{2}$　　C.$-\dfrac{1}{2}i$　　D.$\dfrac{3}{2}i$

3.已知三条不同的直线 l,m,n 和两个不同的平面 α,β，下列四个命题中正确的为（　　）

A.若 $l//\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　B.若 $l//m$，$m\subset\alpha$，则 $l//\alpha$

C.若 $l//\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha//\beta$　　D.若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$

4.已知平面向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，则“$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$”是“$\left(\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)\cdot\boldsymbol{a}=0$”的（　　）

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

5.已知直线 m,n 不共面，则过 n 且与 m 垂直的平面（　　）

A.有且只有一个　　B.有一个或不存在　　C.有一个或无数个　　D.不存在

6.已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,-3,1),\boldsymbol{b}=(2,0,4),\boldsymbol{c}=(-4,-6,2)$，则下列结论正确的是（　　）

A.$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$　　B.$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$　　C.$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　D.以上都不对

7.在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{2}{3},AC=4,BC=3$，则 $\cos B=$（　　）

A.$\dfrac{1}{9}$　　B.$\dfrac{1}{3}$　　C.$\dfrac{1}{2}$　　D.$\dfrac{2}{3}$

8.在四面体 $ABCD$ 中，P 在面 ABC 内，Q 在面 BCD 内，且满足 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}+u\overrightarrow{AD}$，若 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{s}{t}$，则下面表述中，小强数学线段 AQ 与 DP 的关系是（　　）

A.AQ 与 DP 所在直线是异面直线　　B.AQ 与 DP 所在的直线平行

C.线段 AQ 与 DP 必相交　　D.线段 AQ 与 DP 延长后相交

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

9.在三棱锥$T-ABC$中，TA,TB,TC两两垂直，点T在平面ABC上的射影为D，O为三棱锥$T-ABC$内任意一点，连接OA,OB,OC,OT并延长，交对面于点A',B',C',T'，则：

①$TA\perp BC$，$TB\perp AC$，$TC\perp AB$；

②$\triangle ABC$是锐角三角形；

③$S_{\Delta ABC}^2=\frac{1}{3}\left(S_{\Delta TAB}^2+S_{\Delta TAC}^2+S_{\Delta TBC}^2\right)$；

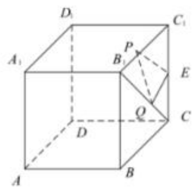
④$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OT'}{TT'}=1$；

⑤$\frac{1}{TD^2}=\frac{1}{TA^2}+\frac{1}{TB^2}+\frac{1}{TC^2}$.

以上结论中正确结论有（　　）个.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

10.棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为棱CC_1的中点，点P，Q分别为面$A_1B_1C_1D_1$和线段B_1C上的动点，则$\triangle PEQ$周长的最小值为（　　）



A.$2\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{10}$　　C.$\sqrt{11}$　　D.$2\sqrt{3}$

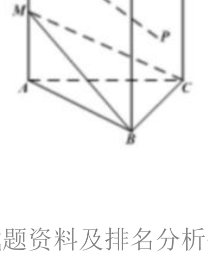
二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分，请把答案填在答题纸中相应横线上

11.已知i是虚数单位，若$z=1+i$，则$\left|z^2-2z\right|=$______.

12.在平行六面体$ABCD-A'B'C'D'$中，$\angle BAD=\angle A'AB=\angle A'AD=60^\circ$，$AB=3$，$AD=4$，$AA'=5$，则$AC'=$________.

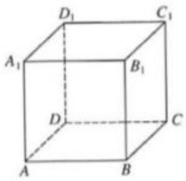
13.在$\triangle ABC$中，三边长分别为$a=4$，$b=5$，$c=6$，则$\triangle ABC$的最大内角的余弦值为______，$\triangle ABC$的面积为________.

14.如图，在棱长均为2的正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，点M是侧棱AA_1的中点，点P、Q分别是侧面BCC_1B_1、底面ABC内的动点，且$A_1P//$平面BCM，$PQ\perp$平面BCM，则点Q的小强数学轨迹的长度为__________.



关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

15.正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，动点 M 在线段 CC_1 上，动点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且 $AP\perp$ 平面 MBD_1.



（Ⅰ）当点 M 与点 C 重合时，线段 AP 的长度为_____；
（Ⅱ）线段 AP 长度的最小值为________.

三、解答题：本大题共6小题，共85分解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸中相应位置上.

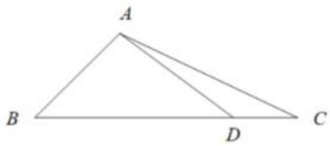
16.（本小题13分）已知 i 是虚数单位，设复数 z 满足 $|z-2|=2$，

（Ⅰ）求 $|z+1-4i|$ 的最小值与最大值；

（Ⅱ）若 $z+\dfrac{4}{z}$ 为实数，求 z 的值.

17.（本小题13分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a=3$，$c=\sqrt{2}$，$B=45°$.



（Ⅰ）求 $\sin C$ 的值；

（Ⅱ）在边 BC 上取一点 D，使得 $\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$，求 $\tan\angle DAC$ 的值..

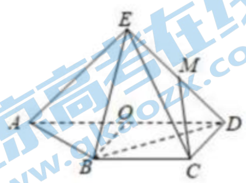
18.（本小题 14 分）

在锐角三角形 ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\dfrac{b^2-a^2-c^2}{ac}=\dfrac{\cos(A+C)}{\sin A\cos A}$.

（I）求角 A；

（II）若 $a=\sqrt{2}$，求 bc 的取值范围.

19.（本小题 15 分）如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，平面$ADE\perp$平面$ABCD$，O,M 分别为线段 AD,DE 的中点. 小强数学四边形 $BCDO$ 是边长为 1 的正方形，$AE=DE$，$AE\perp DE$.



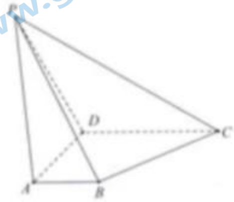
（I）求证：CM//平面ABE；

（II）求直线 CM 与 BD 所成角的余弦值；

（III）点 N 在直线 AD 上，若平面$BMN\perp$平面ABE，求线段 AN 的长.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

20.（本小题 15 分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $ABCD\perp$ 平面 PCD，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB\,/\!/\,CD$，$AD\perp PC$，且 $AB=1$，$AD=DC=DP=2$，$\angle PDC=120^\circ$，M 是棱 PA 的中点.



（I）求证：$AD\perp$ 平面 PCD；

（II）求证：对于棱 BC 上任意一点 F，MF 与 PC 都不平行；

（III）设 CM 与平面 PBD 交于点 Q，求三棱锥 $Q-ABD$ 的体积.

21.（本小题 15 分）已知 $n\in\mathbf{N}^*, n\ge 2$，给定 $n\times n$ 个整点 (x,y)，其中 $1\le x,y\le n, x,y\in\mathbf{N}^*$.

（I）当 $n=2$ 时，从上面的 2×2 个整点中任取两个不同的整点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，求 x_1+x_2 的所有小强数学可能值；

（II）从上面 $n\times n$ 个整点中任取 m 个不同的整点，$m\ge\dfrac{5n}{2}-1$.

（i）证明：存在互不相同的四个整点 $(x_1,y_1),(x_1',y_1'),(x_2,y_2),(x_2',y_2')$，满足 $y_1=y_1', y_2=y_2', y_1\ne y_2$；

（ii）证明，存在互不相同的四个整 $(x_1,y_1),(x_1',y_1),(x_2,y_2),(x_2',y_2)$，满足 $x_1+x_1'=x_2+x_2', y_1\ne y_2$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

人大附中 2020~2021 学年度第一学期高二年级数学阶段检测

2020 年 9 月 25 日

说明：本试卷 21 道题，共 150 分，考试时间 120 分钟；请在答题卡上填写个人信息，并将答案写在答题纸的相应位置上.

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置）

1.已知 i 是虚数单位，复数 $z=(i+a)i$，且 $z=\bar{z}$，那么实数 a 的值为（　　）

A.-1　　　　B.0　　　　C.1　　　　D.2

解析： $z=-1+ai$，$\bar{z}=-1-ai$，故 $a=0$，选 B.

2.已知 i 是虚数单位，复数 $\dfrac{1-2i}{1-i}$ 的虚部为（　　）.

A. $-\dfrac{1}{2}$　　　　B. $\dfrac{3}{2}$　　　　C. $-\dfrac{1}{2}i$　　　　D. $\dfrac{3}{2}i$

解析： $\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$，故虚部为 $-\dfrac{1}{2}$，选 A.

3.已知三条不同的直线 l,m,n 和两个不同的平面 α,β，下列四个命题中正确的为（　　）

A.若 $l//\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　　　B.若 $l//m$，$m\subset\alpha$，则 $l//\alpha$

C.若 $l//\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha//\beta$　　　　D.若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$

解析：画长方体排除 3 个选一个，选 A.

4.已知平面向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，则“$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$”是“$\left(\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)\cdot\boldsymbol{a}=0$”的（　　）

A.充分而不必要条件　　　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　　　D.既不充分也不必要条件

解析： $|\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$，即 $\vec{a}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，又 $(\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a})\cdot\vec{a}=0$，即 $\vec{a}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，故选 C.

5.已知直线 m,n 不共面，则过 n 且与 m 垂直的平面（　　）

A.有且只有一个　　B.有一个或不存在　　C.有一个或无数个　　D.不存在

解析： m,n 为异面直线，可能异面垂直或者异面不垂直，选 B.

6.已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,-3,1),\boldsymbol{b}=(2,0,4),\boldsymbol{c}=(-4,-6,2)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$　　　　B. $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$　　　　C. $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　　　D.以上都不对

解析： $\vec{c}=2\vec{a}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，选 C.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

7.在△ABC中，$\cos C=\frac{2}{3}, AC=4, BC=3$，则$\cos B=$（　　）

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

解析：$\frac{2}{3}=\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{25-c^2}{24}$，$c=3$，则$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9+9-16}{2\times3\times3}=\frac{1}{9}$，选 A.

8. 在四面体 $ABCD$ 中，P 在面 ABC 内，Q 在面 BCD 内，且满足 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}+u\overrightarrow{AD}$，若$\frac{x}{y}=\frac{s}{t}$，则下面表述中，线段 AQ 与 DP 的关系是（　　）

A. AQ 与 DP 所在直线是异面直线　　B. AQ 与 DP 所在的直线平行

C.线段 AQ 与 DP 必相交　　D.线段 AQ 与 DP 延长后相交

解析：由于$\frac{x}{y}=\frac{s}{t}$，故令$\frac{s}{x}=\frac{t}{y}=m$，则$\overrightarrow{AQ}=m\overrightarrow{AP}+\mu\overrightarrow{AD}$，故 A,P,D,Q 四点共面，又 AQ 与 DP 不平行，故 AQ 与 DP 必相交，选 C.

9. 在三棱锥$T-ABC$中，TA,TB,TC 两两垂直，点T在平面 ABC 上的射影为D，O为三棱锥 $T-ABC$ 内任意一点，连接 OA,OB,OC,OT 并延长，交对面于点 A',B',C',T'，则：

①$TA\perp BC$，$TB\perp AC$，$TC\perp AB$；　　②△ABC是锐角三角形；

③$S_{\Delta ABC}^2=\frac{1}{3}\left(S_{\Delta TAB}^2+S_{\Delta TAC}^2+S_{\Delta TBC}^2\right)$；　　④$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OT'}{TT'}=1$；

⑤$\frac{1}{TD^2}=\frac{1}{TA^2}+\frac{1}{TB^2}+\frac{1}{TC^2}$.

以上结论中正确结论有（　　）个.

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

解析：对于①，TA,TB,TC 两两垂直，很容易推出，①正确；

对于②，设 $TA=a$，$TB=b$，$TC=c$，$AB=\sqrt{a^2+b^2}$，$AC=\sqrt{a^2+c^2}$，$BC=\sqrt{b^2+c^2}$，

$\cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}>0$，同理$\cos B>0$，$\cos C>0$，则△$ABC$是锐角三角形，②正确；

对于③，过T作$TE\perp BC$交BC于E，连接AE，则$BC\perp$平面ATE，则$AE\perp BC$，故$S_{\Delta ABC}{}^2=\frac{1}{4}(TB^2+TC^2)\cdot(TA^2+TE^2)=S_{\Delta TAB}^2+S_{\Delta TAC}^2+S_{\Delta TBC}^2$，③错误；

对于④，$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OT'}{TT'}=\frac{V_{O-BCT}}{V_{A-BCT}}+\frac{V_{O-CAT}}{V_{A-BCT}}+\frac{V_{O-ABT}}{V_{A-BCT}}+\frac{V_{O-ABC}}{V_{A-BCT}}=\frac{V_{A-BCT}}{V_{A-BCT}}=1$，④正确；

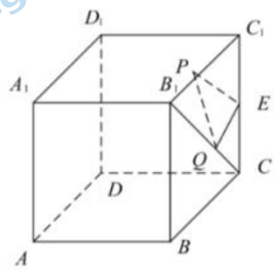
对于⑤，由③，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$，等体积法，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}abc=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\cdot TD$，

所以$\frac{1}{TD^2}=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2b^2c^2}$，$\frac{1}{TA^2}+\frac{1}{TB^2}+\frac{1}{TC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2b^2c^2}$，⑤正确.

综上，①②④⑤正确，选 C.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

10.棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 CC_1 的中点，点 P，Q 分别为面 $A_1B_1C_1D_1$ 和线段 B_1C 上的动点，则 $\triangle PEQ$ 周长的最小值为（　　）



A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $\sqrt{11}$　　D. $2\sqrt{3}$

解析： 延长 CC_1 于 E_1 取 $C_1E=C_1E_1$，取 BC 中点 E_2，连接 E_2Q，

此时三角形的周长为 $E_1P+PQ+QE_2$，三条线共线时周长最短，连接 $E_1E_2=\sqrt{10}$，选 B.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分，请把答案填在答题纸中相应横线上

11.已知 i 是虚数单位，若 $z=1+i$，则 $|z^2-2z|=$______.

解析： $z^2-2z=(1+i)^2-2(1+i)=-2$，故 $|z^2-2z|=|-2|=2$.

12.在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，$\angle BAD=\angle A'AB=\angle A'AD=60°$，$AB=3$，$AD=4$，$AA'=5$，则 $AC'=$______.

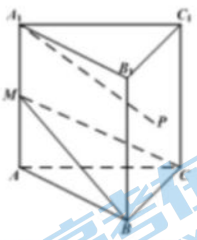
解析： $|\overrightarrow{AC'}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}|=\sqrt{|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}|^2}=\sqrt{3^2+4^2+5^2+(3\times4+4\times5+3\times5)}=\sqrt{97}$.

13.在 $\triangle ABC$ 中，三边长分别为 $a=4$，$b=5$，$c=6$，则 $\triangle ABC$ 的最大内角的余弦值为______，$\triangle ABC$ 的面积为______.

解析： $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{16+25-36}{2\times4\times5}=\dfrac{1}{8}$；则 $\sin C=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

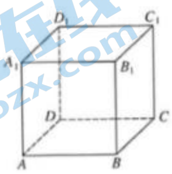
14.如图，在棱长均为 2 的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 M 是侧棱 AA_1 的中点，点 P、Q 分别是侧面 BCC_1B_1、底面 ABC 内的动点，且 $A_1P//$平面BCM，$PQ\perp$平面BCM，则点 Q 的轨迹的长度为____________.



解析：设 BB_1 中点为 E，设 CC_1 中点为 F，则 P 的轨迹为线段 EF，

则Q的轨迹平行BC，也是一个线段，根据计算，Q经过 ΔABC 的重心，故轨迹的长度 $2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.

15.正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，动点 M 在线段 CC_1 上，动点 P 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上，且 $AP\perp$平面MBD_1.



（Ⅰ）当点 M 与点 C 重合时，线段 AP 的长度为______；

（Ⅱ）线段 AP 长度的最小值为________.

解析：（Ⅰ）当 M 与 C 重合时，此时平面 MBD_1 即平面 BCD_1A_1，此时 $AB_1\perp$ 平面 BCD_1A_1，即此时点 P 与点 B_1 重合，$AP=AB_1=\sqrt{2}$；

（Ⅱ）建系，设点 $M(0,1,z_0)(0\le z_0\le 1)$，$P(x_0,y_0,1)(0\le x_0,y_0\le 1)$，

因为 $AP\perp$ 平面 MBD_1，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MB}=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MD_1}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_0=z_0+1\\ y_0=z_0-1\end{cases}$，

$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2+1}=\sqrt{z_0^2+(z_0-1)^2+1}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(z_0-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$，**当** $z_0=\frac{1}{2}$，$AP_{min}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)，　获取更多试题资料及排名分析信息。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸中相应位置上.

16.（本小题 13 分）已知 i 是虚数单位，设复数 z 满足 $|z-2|=2$，

（I）求 $|z+1-4i|$ 的最小值与最大值；

（II）若 $z+\dfrac{4}{z}$ 为实数小强数学，求 z 的值.

简析：

（I）设 $z=a+bi$，则 $|(a-2)+bi|=2$，故 $(a-2)^2+b^2=2^2$，故以 $(2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，

$|(a+1)+(b-4)i|=\sqrt{(a+1)^2+(b-4)^2}$，表示点 $(-1,4)$ 与点 (a,b) 的距离，点 $(-1,4)$ 到圆心 $(2,0)$ 的距离为 5，则最小值 $5-2=3$，最大值 $5+2=7$；

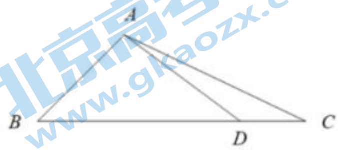
（II）$z+\dfrac{4}{z}=a+bi+\dfrac{4}{a+bi}=a+bi+\dfrac{4(a-bi)}{a^2+b^2}$，由题，虚部 $b-\dfrac{4b}{a^2+b^2}=0$，即 $b(a^2+b^2-4)=0$，

当 $b=0$ 时，$|a-2|=2$，解得 $a=0$（舍）或 $a=4$；

当 $a^2+b^2-4=0$ 时，联立 $\begin{cases}(a-2)^2+b^2=4,\\ a^2+b^2=4\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1\\ b=-\sqrt{3}\end{cases}$，故 $z=1\pm\sqrt{3}i$，

综上，$z=4$ 或 $z=1+\sqrt{3}i$ 或 $z=1-\sqrt{3}i$.

17.（本小题 13 分）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a=3$，$c=\sqrt{2}$，$B=45°$.



（I）求 $\sin C$ 的值；

（II）在边 BC 上取一点 D，使得 $\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$，求 $\tan\angle DAC$ 的值..

简析：

（I）在 ΔABC 中，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\times AB\times BC}=\dfrac{11-AC^2}{6\sqrt{2}}$，解得 $AC=\sqrt{5}$，

$\cos C=\dfrac{5+9-2}{2\times3\times\sqrt{5}}=\dfrac{12}{6\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\triangle ABC$ 中，$\sin C>0$，故 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

（II）因为 $\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$，$\triangle ADC$ 中，$\sin\angle ADC>0$，故 $\sin\angle ADC=\dfrac{3}{5}$，

故 $\sin\angle DAC=\sin(\angle C+\angle ADC)=\sin\angle C\cos\angle ADC+\cos\angle C\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times(-\dfrac{4}{5})+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$，

因为 $\angle DAC\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\cos\angle DAC=\sqrt{1-\sin^2\angle DAC}=\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$，故 $\tan\angle DAC=\dfrac{\sin\angle DAC}{\cos\angle DAC}=\dfrac{2}{11}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

18.（本小题 14 分）在锐角三角形 ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\frac{b^2-a^2-c^2}{ac}=\frac{\cos(A+C)}{\sin A\cos A}$.

（I）求角 A；

（II）若 $a=\sqrt{2}$，求 bc 的小强数学取值范围.

简析:（I）$-2\cos B=\dfrac{-\cos B}{\frac{1}{2}\sin 2A}$，即 $\sin 2A=1$，又 ΔABC 为锐角三角形，故 $A\in(0,\frac{\pi}{2})$，$2A\in(0,\pi)$，

故 $2A=\frac{\pi}{2}$，$A=\frac{\pi}{4}$；

（II）由正弦定理，$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=2$，故 $b=2\sin B$，$c=2\sin C$，

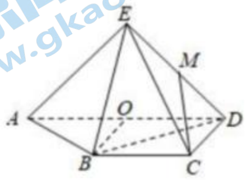
故 $bc=4\sin B\sin C=4\sin B\sin(\frac{3\pi}{4}-B)=2\sin(2B-\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}$，

因为 ΔABC 为锐角三角形，则 $B\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，故 $2B-\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$，

当 $2B-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 时，$bc=2+\sqrt{2}$，当 $2B-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 或 $2B-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ 时，$bc=2+\sqrt{2}$，$bc=2\sqrt{2}$，

故 bc 的取值范围为 $(2\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$.

19.（本小题 15 分）如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，O,M 分别为线段 AD,DE 的中点.四边形 $BCDO$ 是边长为 1 的正方形，$AE=DE$，$AE\perp DE$.



（I）求证：CM // 平面 ABE；

（II）求直线 CM 与 BD 所成角的余弦值；

（III）点 N 在直线 AD 上，若平面 $BMN\perp$ 平面 ABE，求线段 AN 的长.

简析:

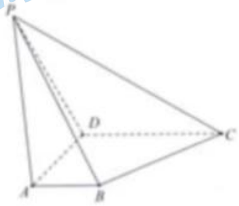
（I）证明：取 AE 中点 F，连接 BF，MF，四边形 $BCMF$ 为平行四边形；

（II）建系，直线 CM 与 BD 所成角的余弦值为 $\left|\cos\langle\overrightarrow{BD},\overrightarrow{CM}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CM}\right|}{\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CM}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$；

（III）设 $N(0,y_0,0)$，解得 $y_0=\frac{2}{3}$，故 $AN=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

20.（本小题 15 分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面$ABCD\perp$平面PCD，底面 $ABCD$ 为梯形，$AB\,/\!/\,CD$．$AD\perp PC$，且 $AB=1$，$AD=DC=DP=2$，$\angle PDC=120^\circ$，M 是棱 PA 的中点.



（I）求证：$AD\perp$平面PCD；

（II）求证：对于棱 BC 上任意一点 F，MF 与 PC 都不平行；

（III）设 CM 与平面 PBD 交于点 Q，求三棱锥 $Q-ABD$ 的体积.

简析：

（I）证明：在平面 PCD 中过 D 作 $DH\perp DC$，交 PC 于 H，可证 $AD\perp DH$；

（II）证明：设 $\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{MF}=\mu\overrightarrow{PC}$，有 $\begin{cases}1-2\lambda=0\\ \dfrac{3}{2}+\lambda=3\mu\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}\mu\end{cases}$ **，无解，故 MF 与 PC 不平行.**

（III）因为点 Q 在平面 PBD 内，

设 $\overrightarrow{DQ}=m\overrightarrow{DB}+n\overrightarrow{DP}$，得 $Q(2m,m-n,\sqrt{3}n)$，又 C,M,Q 三点共线，设 $\overrightarrow{CQ}=r\overrightarrow{CM}$，有

$\begin{cases}2m=r\\ m-n-2=-\dfrac{5}{2}r\\ \sqrt{3}n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\end{cases}$ **，解得** $\begin{cases}m=\dfrac{2}{5}\\ n=\dfrac{2}{5}\\ r=\dfrac{4}{5}\end{cases}$ **，所以** $Q(\dfrac{4}{5},-2,\dfrac{2\sqrt{3}}{5})$**，故** $V_{Q-ABD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\dfrac{2\sqrt{3}}{5}=\dfrac{2\sqrt{3}}{15}$.

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

21.（本小题 15 分）已知 $n\in\mathbf{N}^*, n\geq 2$，给定 $n\times n$ 个整点 (x,y)，其中 $1\leq x,y\leq n, x,y\in\mathbf{N}^*$.

（I）当 $n=2$ 时，从上面的 2×2 个整点中任取两个不同的整点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，求 x_1+x_2 的所有可能值；

（II）从上面 $n\times n$ 个整点中任取 m 个不同的整点，$m\geq\dfrac{5n}{2}-1$.

（i）证明：存在互不相同的四个整点 $(x_1,y_1),(x_1',y_1'),(x_2,y_2),(x_2',y_2')$，满足 $y_1=y_1', y_2=y_2', y_1\neq y_2$；

（ii）证明：存在互不相同的四个整 $(x_1,y_1),(x_1',y_1),(x_2,y_2),(x_2',y_2)$，满足 $x_1+x_1'=x_2+x_2', y_1\neq y_2$.

简析：（I）当 $n=2$ 时，4 个整点分别为 $(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)$.

所以 x_1+x_2 的所有可能值 $2,3,4$.

（II）(i) 假设不存在互不相同的四个整点 $(x_1,y_1),(x_1',y_1'),(x_2,y_2),(x_2',y_2')$，

满足 $y_1=y_1', y_2=y_2', y_1\neq y_2$.

即在直线 $y=i(1\leq i\leq n, i\in\mathbf{N}^*)$ 中至多有一条直线上取多于 1 个整点，其余每条直线上至多取一个整点， 此时符合条件的整点个数最多为 $n-1+n=2n-1$.

而 $2n-1<\dfrac{5}{2}n-1$，与已知 $m\geq\dfrac{5}{2}n-1$ 矛盾.

故存在互不相同的四个整点 $(x_1,y_1),(x_1',y_1'),(x_2,y_2),(x_2',y_2')$，满足 $y_1=y_1', y_2=y_2', y_1\neq y_2$.

（ii）设直线 $y=i(1\leq i\leq n, i\in\mathbf{N}^*)$ 上有 a_i 个选定的点.

若 $a_i\geq 2$，设 $y=i$ 上的这 a_i 个选定的点的横坐标为 x_1，x_2，…，x_{a_i}，且满足 $x_1<x_2<\cdots<x_{a_i}$.

由 $x_1+x_2<x_1+x_3<x_2+x_3<x_2+x_4<x_3+x_4<\cdots<x_{a_i-1}+x_{a_i}$，

知 x_1，x_2，…，x_{a_i} 中任意不同两项之和至少有 $2a_i-3$ 个不同的值，这对于 $a_i<2$ 也成立.

由于 $1,2,3,\cdots,n$ 中任意不同两项之和的不同的值恰有 $2n-3$ 个，

而 $\sum\limits_{i=1}^{n}(2a_i-3)=2m-3n\geq 5n-2-3n\geq 2n-3$，可知存在四个不同的点

$(x_1,y_1),(x_1',y_1),(x_2,y_2),(x_2',y_2)$，满足 $x_1+x_1'=x_2+x_2', y_1\neq y_2, y_1\neq y_2$.

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多

关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(ID:bj-gaokao)， 获取更多试题资料及排名分析信息。