

2023 北京陈经纶中学高一 10 月月考

数 学

本试卷共 8 页，150 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{-1, 1, 2, 4\}$ ， $B = \{x | -1 < x < 3\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

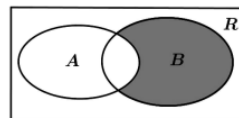
- A. $\{-1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{1, 4\}$ D. $\{-1, 4\}$

2. 若函数 $f(x+1) = x$ ，且 $f(a) = 8$ ，则 $a =$ ()

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

3. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x \leq 1\}$ ， $B = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$ ，则图中阴影部分对应的集合为 ()

- A. $\{x | x \geq 1\}$ B. $\{x | 1 \leq x < 2\}$
C. $\{x | x > 1\}$ D. $\{x | 1 < x < 2\}$



4. 若 $0 < b < a$ ，下列不等式中不一定成立的是 ()

- A. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ D. $-a < -b < 0$

5. 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-1, 0)$ ，则 $f(2x)$ 的定义域是 ()

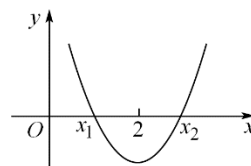
- A. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ B. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ C. $[-2, 0)$ D. $[0, 2)$

6. 已知实数 a 、 b 、 c 满足 $c < b < a$ ，那么“ $ac < 0$ ”是“ $ab > ac$ ”成立的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 二次函数 $y = x^2 + (m-3)x + 2m$ 的图象与 x 轴的两个交点的横坐标分别为 x_1 ， x_2 ，且 $0 < x_1 < 2 < x_2$ ，如图所示，则 m 的取值范围是 ()

- A. $m > 0$ B. $m > \frac{1}{2}$
C. $0 < m < \frac{1}{2}$ 或 $m > 5$ D. $0 < m < \frac{1}{2}$



8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 1 \\ x - 2, & x < 1 \end{cases}$ ，若 $f(f(a)) = 3$ ，则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. 0 C. $\sqrt{3}$ 或 0 D. $\pm\sqrt{3}$

9. 若存在 $x \in [0, 1]$ ，有 $x^2 + (1-a)x + 3 - a > 0$ 成立，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{5}{2})$ B. $(-\infty, 3)$ C. $(\frac{5}{2}, 3)$ D. $(-\infty, \frac{5}{2}) \cup (3, +\infty)$

10. 对集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的每一个非空子集, 定义一个唯一确定的“交替和”, 概念如下: 按照递减的次序重新排列该子集, 然后从最大的开始, 交替减加后面的数所得的结果. 例如: 集合 $\{1, 2, 4, 6\}$ 的“交替和”为 $6 - 4 + 2 - 1 = 3$, 集合 $\{3, 8\}$ 的“交替和”为 $8 - 3 = 5$, 集合 $\{6\}$ 的“交替和”为 6 , 则集合 A 所有非空子集的“交替和”的和为 ()

A. n^2 B. $n^2 + n - 1$ C. $n \cdot 2^{n-1}$ D. $n \cdot 2^n$

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

11. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域为_____.

12. 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$, 则 $x + 2y$ 的取值范围是_____. $[9, +\infty)$

13. 已知不等式 $ax^2 + bx + c \leq 0$ 的解集为 $\{x | x \leq -3 \text{ 或 } x \geq 4\}$, 则不等式 $bx^2 + 2ax - c - 3b \leq 0$ 的解集是_____.

14. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 4x$, $x \in [m, 4]$ 的值域是 $[0, 4]$, 则实数 m 的取值范围是_____.

15. 若 $\{x | 0 \leq x \leq 1\} \cap \{x | x^2 - 2x + m > 0\} = \emptyset$, 则实数 m 的一个取值为_____.

16. 高斯函数是数学中的一个重要函数, 在自然科学、社会科学以及工程学等领域都能看到它的身影. 设 $x \in \mathbf{R}$, 用符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 如 $[1.6] = 1$, $[-1.6] = -2$ 称函数 $f(x) = [x]$ 叫做高斯函数. 给出下列关于高斯函数的说法:

① $f(-3) = -3$

② 若 $f(a) = f(b)$, 则 $|a - b| < 1$

③ 函数 $y = f(x) - x$ 的值域是 $[-1, 0)$

④ 函数 $y = x \cdot f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增

其中所有正确说法的序号是_____.

三、解答题共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

17. 设全集为 \mathbf{R} , 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, $B = \{x | a - 1 < x < 2a + 3\}$.

(I) 若 $a = -1$, 求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$;

(II) 当 $a = 0$ 时, 是否满足 $A \cup B = \mathbf{R}$? 说明理由;

(III) 在① $A \cup B = A$, ② $A \cap B = B$, ③ $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \emptyset$, 这三个条件中任选一个作为已知条件, 求实数 a 的取值范围.

(注: 如果选择多个条件分别解答, 则按第一个解答计分)

18. 设 $f(x) = mx^2 + (1-m)x + m - 2$.

(I) 若不等式 $f(x) + 2 \geq 0$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(II) 已知 $m < 0$, 解关于 x 的不等式 $f(x) < m - 1$.

19. 某游戏厂商对新出品的一款游戏设定了“防沉迷系统”规则如下:

①3 小时内 (含 3 小时) 为健康时间, 玩家在这段时间内获得的累积经验值 E (单位: EXP) 与游玩时间 t (单位: 小时) 满足关系式: $E = t^2 + 20t + 16a$;

②3 到 5 小时 (含 5 小时) 为疲劳时间, 玩家在这段时间内获得的经验值为 0 (即累积经验值不变);

③超过 5 小时为不健康时间, 累积经验值开始损失, 损失的经验值与不健康时间成正比例关系, 正比例系数为 50.

(I) 当 $a = 1$ 时, 写出累积经验值 E 与游玩时间 t 的函数关系式 $E = f(t)$, 求出游玩 6 小时的累积经验值;

(II) 该游戏厂商把累积经验值 E 与游玩时间 t 的比值称为“玩家愉悦指数”, 记为 $H(t)$, 若 $a > 0$, 且该游戏厂商希望在健康时间内, 这款游戏的“玩家愉悦指数”不低于 24, 求实数 a 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{2x^2}{x+1} - 1$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的零点;

(II) 证明: 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(III) 若 $x > 0$ 时, $f(ax^2 + 2a) > 0$ 恒成立, 求正数 a 的取值范围.

21. 设集合 A 为非空数集, 定义 $A^+ = \{x | x = a + b, a, b \in A\}$, $A^- = \{x | x = |a - b|, a, b \in A\}$.

(I) 若集合 $A = \{-1, 1\}$, 直接写出集合 A^+ 及 A^- ;

(II) 若集合 $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 且 $A^- = A$, 求证 $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$;

(III) 若集合 $A \subseteq \{x | 0 \leq x \leq 2023, x \in \mathbf{N}\}$, 且 $A^+ \cap A^- = \emptyset$, 求 A 中元素个数的最大值.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【答案】B
2. 【答案】C
3. 【答案】D
4. 【答案】A
5. 【答案】B
6. 【答案】A
7. 【答案】D
8. 【答案】A
9. 【答案】B
10. 【答案】C

【分析】将此集合分成两类，并在两类集合之间建立一一映射关系后根据“交替和”的定义即可求出答案。

【详解】解：由题意得：

集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的非空子集中，除去集合 $\{n\}$ ，还有 $2^n - 2$ 个非空集合，将这 $2^n - 2$ 个子集分成两类：

第一类：包含 n 的子集；第二类：不包含 n 的子集；

在第二类和第一类子集之间建立如下的对应关系： $f: A_i \rightarrow A_i \cup \{n\}$ ，其中 A_i 是第二类子集，显然这种对应是一一映射

设 A_i 的“交替和”为 k ，则 $A_i \cup \{n\}$ 的“交替和”为 $n - k$ ，这一对集合的“交替和”的和等于 n ，所以集合 A 的

所有非空集合的“交替和”总和为 $\frac{1}{2}(2^n - 2) \times n + n = n \cdot 2^{n-1}$

故选：B

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11. 【答案】 $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$
12. 【答案】 $[9, +\infty)$
13. 【答案】 $\{x | -3 \leq x \leq 5\}$
14. 【答案】 $[0, 2]$
15. 【答案】 $m = 0$ （答案不唯一）
16. 【答案】①②④，对 1 个给 3 分，对 2 个给 4 分，全对给 5 分，有错不得分

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17. 解：(I) 全集为 \mathbf{R} ，集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\} = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ （1 分），

所以 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$ （2 分）；

又 $a = -1$ 时, 集合 $B = \{x | a - 1 < x < 2a + 3\} = \{x | -2 < x < 1\}$ (3分),

所以 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | -1 \leq x < 1\}$; (5分, 若结果开闭区间错扣1分)

(II) 当 $a = 0$ 时, 不满足 $A \cup B = \mathbf{R}$, (6分)

理由如下: $B = \{x | -1 < x < 3\}$, $A \cup B = \{x \in \mathbf{R} | x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 3\}$, 故 $A \cup B \neq \mathbf{R}$ (8分).

(III) 选择① $A \cup B = A$ 作为已知条件. (选择②③的解法同①)

因为 $A \cup B = A$, 所以 $B \subseteq A$ (9分), 又由 $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ 得,

当 $B = \emptyset$ 时, $a - 1 \geq 2a + 3$ (10分), 解得 $a \leq -4$; (11分)

当 $B \neq \emptyset$ 时, $\begin{cases} a - 1 < 2a + 3 \\ 2a + 3 \leq -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a - 1 < 2a + 3 \\ a - 1 \geq 3 \end{cases}$, (12分)

所以 $\begin{cases} a > -4 \\ a \leq -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a > -4 \\ a \geq 4 \end{cases}$, 所以 $-4 < a \leq -2$ 或 $a \geq 4$. (13分)

综上, 可得 a 的取值范围为 $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$. (14分)

18. (I) 解: 由 $y = mx^2 + (1 - m)x + m - 2 \geq -2$ 对一切实数 x 恒成立,

即 $mx^2 + (1 - m)x + m \geq 0$ 对一切实数 x 恒成立, (1分)

当 $m = 0$ 时, $x \geq 0$, 不满足题意; (2分)

当 $m \neq 0$ 时, 则满足 $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta = (1 - m)^2 - 4m^2 \leq 0 \end{cases}$ (4分), 解得 $m \geq \frac{1}{3}$ (5分),

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $[\frac{1}{3}, +\infty)$ (6分).

(2) 解: 由不等式 $mx^2 + (1 - m)x + m - 2 < m - 1$, 即 $(mx + 1)(x - 1) < 0$, (8分)

方程 $(mx + 1)(x - 1) = 0$ 的两个根为 $x_1 = -\frac{1}{m}, x_2 = 1$, (9分, 此步骤不写不扣分)

① 当 $m = -1$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; (10分)

② 当 $m < -1$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{m}) \cup (1, +\infty)$; (12分)

③ 当 $-1 < m < 0$ 时, 不等式的解集为 $(-\infty, 1) \cup (-\frac{1}{m}, +\infty)$. (14分)

若①②合并讨论, 结果正确也给分

19. 【详解】(1) 当 $0 < t \leq 3$ 时, $a = 1$, $E = t^2 + 20t + 16$, (1分)

当 $t = 3$ 时, $E = 85$ (2分), 故当 $3 < t \leq 5$ 时, $E = 85$, (3分)

当 $t > 5$ 时, $E = 85 - 50(t - 5) = 335 - 50t$, (5分, 列式1分, 化简1分)

所以 $E(t) = \begin{cases} t^2 + 20t + 16, 0 < t \leq 3 \\ 85, 3 < t \leq 5 \\ 335 - 50t, t > 5 \end{cases}$, (6分) 当 $t = 6$ 时, $E(t) = 35$. (7分)

(2) 当 $0 < t \leq 3$ 时, $H(t) = \frac{t^2 + 20t + 16a}{t} \geq 24$, (9分)

整理得: $t^2 - 4t + 16a \geq 0$ 恒成立, (10分)

令 $f(t) = t^2 - 4t + 16a$ 函数的对称轴是 $t = 2 \in (0, 3]$,

当 $t = 2$ 时, $f(t)$ 取得最小值 $16a - 4$ (12分), 即 $16a - 4 \geq 0$, $a \geq \frac{1}{4}$.

所以实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{4}, +\infty)$. (14分)

用其他方法酌情给分.

20. (1) 解: 因为 $f(x) = \frac{2x^2}{x+1} - 1$, 所以 $x \neq -1$, (1分, 若结果正确, 此步不写不扣分)

令 $f(x) = \frac{2x^2}{x+1} - 1 = 0$, 则有 $2x^2 = x + 1$,

即 $2x^2 - x - 1 = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = -\frac{1}{2}$; (3分)

(2) 证明: 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 < x_2$, (4分)

则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1^2}{x_1+1} - \frac{2x_2^2}{x_2+1} = \frac{2x_1^2(x_2+1) - 2x_2^2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{2(x_1-x_2)(x_1x_2+x_1+x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$, (6分)

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $\frac{2(x_1-x_2)(x_1x_2+x_1+x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)} < 0$, (7分)

即 $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, (8分)

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增; (9分)

(3) 解: 若 $x > 0$ 时, $f(ax^2 + 2a) > 0$ 恒成立, 即 $f(ax^2 + 2a) > f(1)$ 恒成立 (10分)

因为 $a > 0$, 所以 $ax^2 + 2a > 0$,

又函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 “ $f(ax^2 + 2a) > f(1)$ 恒成立” 等价于 “ $ax^2 + 2a > 1$ 恒成立” (12分)

即 $a > \frac{1}{x^2 + 2}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立,

故 a 的取值范围为 $[\frac{1}{2}, +\infty)$. (14分, 开闭区间错扣1分)

21. 解: (I) $A^+ = \{-2, 0, 2\}$, $A^- = \{0, 2\}$; (4分, 每个2分)

(II) 由于集合 $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 且 $A^- = A$,

所以 A^- 中也只包含四个元素, 即 $A^- = \{0, x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1\}$, (6分)

剩下的 $x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = x_2 - x_1$, 所以 $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$; (8分)

(III) 设 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 满足题意, 其中 $a_1 < a_2 < \dots < a_k$,

则 $2a_1 < a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \dots < a_1 + a_k < a_2 + a_k < a_3 + a_k < \dots < a_{k-1} + a_k < 2a_k$,

所以 $|A^+| \geq 2k-1$, $a_1 - a_1 < a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \dots < a_k - a_1$, 所以 $|A^-| \geq k$,

因为 $A^+ \cap A^- = \emptyset$, 由容斥原理 $|A^+ \cup A^-| = |A^+| + |A^-| \geq 3k-1$,

$A^+ \cup A^-$ 中最小的元素为 0, 最大的元素为 $2a_k$,

所以 $|A^+ \cup A^-| \leq 2a_k + 1$, 所以 $3k-1 \leq 2a_k + 1 \leq 4047 (k \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $k \leq 1349$,

实际上当 $A = \{675, 676, 677, \dots, 2023\}$ 时满足题意, 证明如下:

设 $A = \{m, m+1, m+2, \dots, 2023\}$, $m \in \mathbf{N}$,

则 $A^+ = \{2m, 2m+1, 2m+2, \dots, 4046\}$, $A^- = \{0, 1, 2, \dots, 2023-m\}$,

依题意有 $2023-m < 2m$, 即 $m > 674\frac{1}{3}$,

故 m 的最小值为 675, 于是当 $m = 675$ 时, A 中元素最多,

即 $A = \{675, 676, 677, \dots, 2023\}$ 时满足题意,

综上所述, 集合 A 中元素的个数的最大值是 1349. (14 分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

